Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Primer Semestre de 2009

ICS 1102, Optimización

Interrogación 3

INSTRUCCIONES: No se permite el uso de calculadoras. La prueba durará exactamente 120 minutos y consta de 100 puntos, 95 de ellos repartidos entre 5 partes y 5 puntos de bonificación si cumple totalmente las siguientes instrucciones obligatorias: cada parte en hojas separada, nombre y número de lista en todas las hojas, no separar las hojas del cuadernillo.

Parte 1[20 pts.] :

1. [10 pts.] Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad \begin{array}{ll} Max & 2x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a. & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

   Muestre que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 2, 0)$ e $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = (1, 0, 0)$ son soluciones óptimas únicas respectivamente de P) y de su problema dual.

2. [10 pts.] Considere el siguiente sistema de desigualdades en dos variables:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 & \leq 3 \\ x_1 + 3x_2 & \leq 6 \\ x_1 & \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

   Encuentre todas las soluciones básicas factibles asociadas a este sistema. Justifique con claridad.

Parte 2[15 pts.] : Comente las siguientes cinco afirmaciones:

1. [3 pts.] "Si un problema de programación lineal es infactible entonces su correspondiente problema dual es necesariamente no acotado".

2. [3 pts.] "Si en una iteración de la Fase I el valor de la función objetivo de Fase I es 0, pero aún hay una variable artificial en la base, entonces el problema es infactible".

3. [3 pts.] "Si un problema de Programación Lineal es factible, entonces su dual no puede tener una región factible no acotada".

4. [3 pts.] En un problema de minimización, al seleccionar la variable que entra a la base hay que tomar siempre la que tenga el menor costo reducido.

5. [3 pts.] En un problema de minimización en que la variable x_k está entrando a la base, al seleccionar la variable que deja la base hay que tomar cualquiera cuyo cuociente $\bar{b}_i/\bar{a}_{ik}$ sea positivo.

6. **Puntos extras: esta pregunta, si se responde correctamente, otorga 7 puntos adicionales**.
   Sea A una matriz de $m \times n$, b un vector de m componentes. Demuestre que si el sistema $Ax = b, x \geq 0$ no tiene solución factible, entonces existe un vector y de m componentes tal que $A^T y \leq 0, b^T y > 0$.

Parte 3[20 pts.] : Una empresa se dedica a la fabricación de 3 tipos de marcos para ventanas, cuyos códigos son MPV001, MPV002 y MPV003. La información de su proceso de producción es la siguiente:

Proceso	Horas necesarias en cada proceso			Horas disponibles al mes en cada proceso
	MPV001	MPV002	MPV003	
1	1	3	2	400
2	2	0	3	600
3	1	4	0	600

Las utilidades generadas por cada producto son de US$3, US$2 y US$4 respectivamente. El proceso productivo actualmente trabaja con una combinación óptima (resultado de maximizar utilidad total) de 300 unidades del tipo MPV001 y 33,33 unidades del tipo MPV002 al mes con una utilidad de US$966,66 (no se fabrica MPV003). Sin embargo, se desea evaluar algunas posibles modificaciones al plan de producción.

1. [8 pts.] Ya que no se fabrican actualmente marcos del tipo MPV003, la empresa ha concluido que las utilidades actuales por producto pueden variar a US$3, US$1 y US$5 respectivamente. ¿Generaría esta política un aumento en la utilidad total actual de la empresa?

2. [6 pts.] Se evalúa un cambio en las horas disponibles al mes del proceso 1, ¿Cuál es el rango de variación en esas horas que mantiene la estructura de solución actual?

3. [6 pts.] Se desea introducir un nuevo tipo de marco (MPV004) el cual requiere para su elaboración 2, 0 y 2 horas para cada proceso respectivamente, y generaría una utilidad de US$2 la unidad. ¿Qué le puede recomendar al gerente en relación a si producir o no de este nuevo marco?

Parte 4[20 pts.] : Considere el siguiente problema de programación lineal y las siguientes dos bases factibles $\mathbf{x}_{B_{(1)}} = \{x_1, x_6, x_3\}$ y $\mathbf{x}_{B_{(2)}} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Utilizando análisis matricial verifique si estas bases son óptimas o no, y en caso de que al menos una lo sea, calcule la solución óptima del problema.

$$\begin{aligned} Max \quad & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & & \\ s.a \quad & x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_2 + 3x_3 & \leq & 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 10 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{aligned}$$

Indicación: se sabe que

$$\mathbf{B}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_{(1)}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_{(2)}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

Parte 5[20 pts.] : Usted es el gerente de operaciones de una empresa de generación eléctrica que dispone de varios generadores eléctricos de tipo térmico (llamemos a este conjunto GENERADORES). Las capacidades de producción máxima de unidades de energía por día corresponden a xmax[i], para i en GENERADORES. Los costos por unidad de energía producida corresponden a m[i], i en GENERADORES. Los costos fijos (de encendido) corresponden a a[i], i en GENERADORES (es decir, un costo que se paga sólo si se produce energía en dicho generador en un cierto día). El objetivo consiste en minimizar la suma de los costos para un conjunto de días TIEMPO={1,..,T}, dado que la empresa se ha comprometido en satisfacer una demanda d[t] para cada día t en TIEMPO.

1. [10 pts.] Escriba un archivo modelo.mod en el cual quede expresado este modelo en formato AMPL.

2. [5 pts.] Escriba un archivo datos.dat en el cual usted le da valores a los parámetros del problema. Para esto suponga que: se dispone de dos generadores, uno en Arica y otro en Iquique; el horizonte de tiempo corresponde a una semana; las capacidades mximas de produccin corresponden a 500 y 1000 unidades de energía, respectivamente; los costos por unidad de energía corresponden a 40 y 30 pesos por unidad de energía, respectivamente; los costos fijos de encendido corresponden a 200 y 600 pesos; y las demandas corresponden a 1200, 1300, 900, 800, 900, 500 y 300, respectivamente.

3. [5 pts.] Escriba un archivo instrucciones.run tal que al ejecutarlo en AMPL: se ingrese el modelo y los datos, se resuelva utilizando un Solver adecuado, se muestre cuáles generadores están encendidos en cada día y cuáles son sus niveles de producción para cada día.

Ayuda de Memoria: Se muestra a continuación un par primal-dual general.

$$
\begin{array}{lll}
Max & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \\
s.a. & \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i & i \in M_1 \\
 & \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i & i \in M_2 \\
 & \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i & i \in M_3 \\
 & x_j \geq 0 & j \in N_1 \\
 & x_j \leq 0 & j \in N_2 \\
 & x_j \text{ libre} & j \in N_3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
Min & \lambda^T\mathbf{b} & \\
s.a. & \lambda_i \leq 0 & i \in M_1 \\
 & \lambda_i \geq 0 & i \in M_2 \\
 & \lambda_i \text{ libre} & i \in M_3 \\
 & \lambda^T\mathbf{A}_j \geq c_j & j \in N_1 \\
 & \lambda^T\mathbf{A}_j \leq c_j & j \in N_2 \\
 & \lambda^T\mathbf{A}_j = c_j & j \in N_3
\end{array}
$$