PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2019
Profesores: A. Cataldo, R. Cuadrado, J. González, P. Guajardo, M. Klapp

Solución Tarea 4

Fecha de Entrega: 28 de junio

La Tarea tiene cinco preguntas de las cuales dos serán seleccionadas por el equipo docente para ser evaluadas después de la entrega; cada pregunta valdrá 3 puntos. De todas formas, la solución de toda la Tarea será pública después de la entrega.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo entrega una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** por cada pregunta de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano, debe **estar ordenado y legible**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cinco grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 28 de junio a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:00 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1.

a) Considere el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{mín} \quad f(x) \\ & s.a. \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

¿Bajo qué hipótesis las condiciones de KKT en un punto x^* son suficientes para ganatizar que x^* es mínimo global de P.

b) Sea P un problema de optimización no lineal continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^2$. La región factible de P está definida por la restricción $x_1^2 + x_2^2 \leq 10$ y su única solución óptima es el origen. Comente acerca de la veracidad de la siguiente afirmación:

- ◇ El punto óptimo de P no puede satisfacer las condiciones de KKT ya que la única restricción de P no es activa en el óptimo.

c) Resuelva el siguiente problema utilizando las condiciones de Lagrange. Argumente por qué la solución obtenida es óptima.

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{mín} \quad (z-2)^2 - xy \\ & s.a. \\ & x + z = 16 \\ & x + 4y = 4 \end{aligned}$$

Solución Problema 1.

a) Se deben cumplir las siguientes condiciones:

- ◇ x^* debe ser mínimo local tal que se cumpla la condición de regularidad en x^*.
- ◇ f es convexa y la región es factible y convexa.

b) La afirmación es falsa. Se debe cumplir que el gradiente de la función objetivo sea una combinación lineal del gradiente de las restricciones activas en el punto óptimo. En este caso, no hay restricciones activas, por lo que la combinación lineal es 0. Sin embargo, se sabe que P es un problema no lineal diferenciable y el gradiente de la función objetivo en el punto (0,0) es $\vec{0}$, por lo que se satisfacen las condiciones de KKT.

c) En primer lugar, escribimos la matriz Jacobiana de P:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ver, que la matriz J es de rango máximo, por lo que se pueden utilizar las condiciones de Lagrange para todos los puntos.

Luego, el Lagrangeano corresponde a:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (z-2)^2 - xy + \lambda_1(x + z - 16) + \lambda_2(x + 4y - 4)$$

Las condiciones de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -y + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -x + 4\lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - 4 + \lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x + z - 16 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x + 4y - 4 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se encuentra que la solución es

$$(x, y, z) = (58/5, -19/10, 22/5)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (-24/5, 29/10)$$

Para verificar si efectivamente esta es la solución óptima debemos determinar la convexidad del problema. Para esto, es necesario calcular la matriz Hessiana del Lagrangeano.

$$H(L(x, y, x, \lambda_1, \lambda_2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de esta matriz, obtenemos los subdeterminantes, $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = -1, \Delta_3 = 2$, lo que no nos permite decir nada de la matriz.

Utilizando condiciones de segundo orden:

$$\Delta d^T H(L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2))\Delta d, \quad \forall \Delta d \neq 0$$

$$\Delta d = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Diferenciando las restricciones tenemos que:

$$\Delta x + \Delta z = 0 \rightarrow \Delta x = -\Delta z$$
$$\Delta x + 4\Delta y = 0 \rightarrow \Delta y = -\Delta z/4$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} -\Delta z & -\Delta z/4 & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Delta z \\ -\Delta z/4 \\ \Delta z \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\Delta z^2 > 0, \quad \forall \Delta z \neq 0$$

Así, se puede ver que el punto encontrado es un mínimo local en su vecindad. Se puede demostrar existencia de solución óptima ya que la función objetivo es continua y el dominio es acotado, factible y cerrado. Además, P no posee puntos singulares, por lo que el único candidato a mínimo global es el punto encontrado, con lo que este corresponde a la solución óptima de P.

Problema 2.

La Compañía de Harina San Joaquín es una pequeña distribuidora de harina ubicada en la ciudad de Santiago. Esta distribuye diariamente harina entre cuatro locales, ubicados en las comunas de La Florida, Santiago Centro, Las Condes y Maipú. Actualmente, la demanda es de 4, 4, 3 y 7 sacos de harina por día, para los

locales de La Florida, Santiago Centro, Las Condes y Maipú, respectivamente.

El costo en pesos de transportar un saco de harina desde el Centro de distribución (CD) a los distintos locales, y entre locales, se muestra en la siguiente tabla:

Origen/Destino	CD	La Florida	Santiago Centro	Las Condes	Maipú
CD	-	350	250	-	-
La Florida	-	-	-	-	-
Santiago Centro	-	-	-	150	100
Las Condes	-	200	-	-	200
Maipú	-	-	-	-	-

Las celdas con un guión, " $-$ " indican que no existe un arco entre ese par origen/destino.

La compañía actualmente utiliza la siguiente política de distribución: se envían directamente los 4 sacos de demanda del local de La Florida y de Santiago Centro desde el CD, y los 3 sacos demandados por el local de Las Condes junto con los 7 sacos de harina solicitados por el local de Maipú son enviados directamente desde el local en Santiago Centro.

La compañía ha decidido revisar su política de despacho, considerando dos nuevos factores para tomar esta decisión. En primer lugar, se debe agregar un beneficio obtenido cuando se transportan sacos de harina por el arco que va desde el CD al local de Santiago Centro, por el arco que va desde Santiago Centro hasta Las Condes, o por el arco que va desde Las Condes a La Florida. Específicamente, se obtiene un beneficio de 100 pesos por transportar cada saco de harina por alguna de estas tres rutas. En segundo lugar, es posible no cumplir con la demanda de algún local, a costo \$300 por saco no entregado.

a) Formule el problema descrito como un Problema de Transporte de Hitchcock. Dibuje en detalle el grafo asociado al problema, y defina los costos de cada arco, las cotas inferiores y superiores para los flujos y las ofertas y demandas de la red.

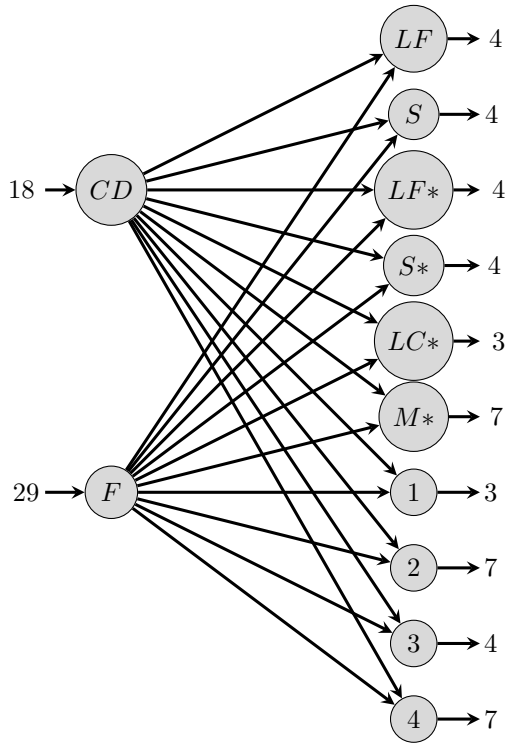
b) Encuentre visualmente la solución óptima al problema.

c) Mediante el algoritmo simplex de redes demuestre que la solución propuesta en *b*) es óptima.

Solución Problema 2.

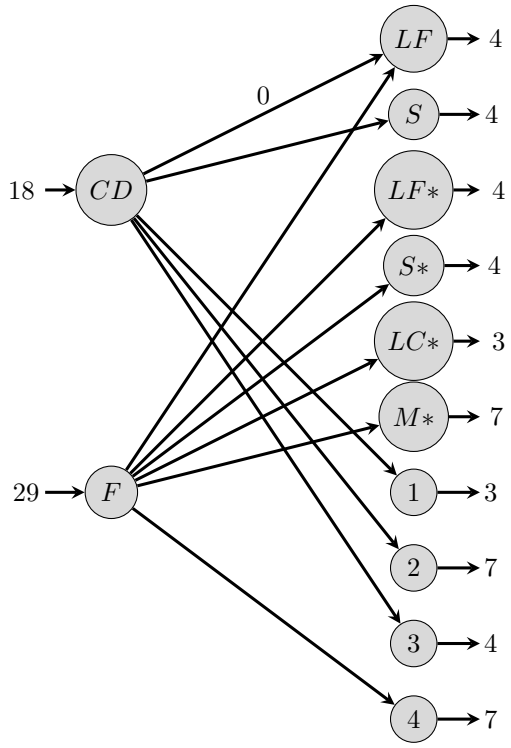
a) Para formular el problema expuesto como un Problema de Transporte de Hitchcock, determinaremos las rutas"posibles para transportar los sacos de harina desde el CD a los 4 locales. La siguiente tabla muestra las rutas posibles, en las que los arcos $CD-LF^*$, $CD-S^*$, $CD-LC^*$ y $CD-M^*$ corresponden a la opción de no entregar sacos de harina a esos locales.

Arco Problema Hitchcock	Nombre nodo	Costo	Demanda
CD-LF	LF	350	4
CD-S	S	250-100=150	4
CD-LF*	LF*	300	4
CD-S*	S*	300	4
CD-LC*	LC*	300	3
CD-M*	M*	300	7
CD-S-LC	1	250-100+150-100=200	3
CD-S-M	2	250-100+100=250	7
CD-S-LC-LF	3	250-100+150-100+200-100=300	4
CD-S-LC-M	4	250-100+150-100+200=400	7



El nodo F es un nodo ficticio que permite no escoger una de las rutas originales, ya sea para repartir sacos de harina, como para considerar no despachar la demanda a algún nodo. Además, este nodo permite conservar el flujo en el problema. El costo de los arcos que salen de este nodo deben ser mayores a los de los arcos que salen del CD. Así, basta con que todos los costos desde el nodo F a los distintos arcos tengan un costo de \$500 pesos, excepto los nodos que van desde F a los nodos LF^*, S^*, LC^* y M^* que tienen un costo de \$400. Para que la capacidad no sea restrictiva, basta con poner un número grande como 30 como capacidad, y 0 como cota inferior.

b) Se propone la siguiente solución óptima al problema:



Donde los flujos de todos los arcos mostrados en el grafo corresponden a la demanda de su nodo destino, excepto para el arco $CD - LF$ que corresponde a 0. Este arco se agrega a la solución para formar un árbol básico. Los arcos que no aparecen el en grafo tienen flujo 0.

El costo de la solución real (sin contabilizar los costos de los arcos que involucran al nodo ficticio) es de \$4150 pesos.

c) Para comprobar si la solución propuesta en *b*) es óptima, es necesario encontrar los valores de las variables duales. Así utilizamos los costos de las variables básicas para determinar los valores de los distintos π. Planteando el sistema y haciendo $\pi_{CD} = 0$, se obtiene:

$$c_{CD-LF} = 350 = \pi_{CD} - \pi_{LF} \rightarrow \pi_{LF} = -350$$
$$c_{CD-S} = 150 = \pi_{CD} - \pi_{S} \rightarrow \pi_{S} = -150$$
$$c_{CD-1} = 200 = \pi_{CD} - \pi_{1} \rightarrow \pi_{1} = -200$$
$$c_{CD-2} = 250 = \pi_{CD} - \pi_{2} \rightarrow \pi_{2} = -250$$
$$c_{CD-3} = 300 = \pi_{CD} - \pi_{3} \rightarrow \pi_{3} = -300$$
$$c_{F-LF} = 500 = \pi_{F} - \pi_{LF} \rightarrow \pi_{F} = 150$$
$$c_{F-LF^*} = 400 = \pi_{F} - \pi_{LF^*} \rightarrow \pi_{LF^*} = -250$$
$$c_{F-S^*} = 400 = \pi_{F} - \pi_{S^*} \rightarrow \pi_{S^*} = -250$$
$$c_{F-LC^*} = 400 = \pi_{F} - \pi_{LC^*} \rightarrow \pi_{LC^*} = -250$$
$$c_{F-M^*} = 400 = \pi_{F} - \pi_{M^*} \rightarrow \pi_{M^*} = -250$$
$$c_{F-4} = 500 = \pi_{F} - \pi_{4} \rightarrow \pi_{4} = -350$$

Ahora, se calculan los costos reducidos para las variables no básicas:

$$\bar{c}_{CD-LF^*} = c_{CD-LF^*} - \pi_{CD} + \pi_{LF^*} = 300 - 0 + (-250) = 50$$
$$\bar{c}_{CD-S^*} = c_{CD-S^*} - \pi_{CD} + \pi_{S^*} = 300 - 0 + (-250) = 50$$
$$\bar{c}_{CD-LC^*} = c_{CD-LC^*} - \pi_{CD} + \pi_{LC^*} = 300 - 0 + (-250) = 50$$
$$\bar{c}_{CD-M^*} = c_{CD-M^*} - \pi_{CD} + \pi_{M^*} = 300 - 0 + (-250) = 50$$
$$\bar{c}_{CD-4} = c_{CD-4} - \pi_{CD} + \pi_{4} = 400 - 0 + (-350) = 50$$
$$\bar{c}_{F-S} = c_{F-S} - \pi_{F} + \pi_{S} = 500 - 150 + (-150) = 200$$
$$\bar{c}_{F-1} = c_{F-1} - \pi_{F} + \pi_{1} = 500 - 150 + (-200) = 150$$
$$\bar{c}_{F-2} = c_{F-2} - \pi_{F} + \pi_{2} = 500 - 150 + (-200) = 100$$
$$\bar{c}_{F-3} = c_{F-3} - \pi_{F} + \pi_{3} = 500 - 150 + (-300) = 50$$

Como se puede ver, todos los costos reducidos son mayores a cero, por lo que la solución encontrada en *b*) es efectivamente la óptima.

Problema 3.

a) Considere el siguiente problema de optimización no lineal

$$P: \qquad \text{mín} \qquad f(x) = x^4 - 24x^2$$

i) Resuelva P utilizando el método de Newton. Tome como punto de partida el punto $x = 1$. Indique claramente el valor objetivo del punto inicial en cada iteración, el gradiente, el Hessiano y el valor de la función objetivo.

ii) ¿Es la solución encontrada en *a*) óptima? Si no lo es, explique por qué.

b) Considere el siguiente problema de optimización no lineal

$$P: \qquad \text{mín} \qquad f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

i) Realice dos iteraciones para resolver P con el método de Newton y con el método del Gradiente, tomando como punto de partida al punto $(x,y) = (2,4)$.

ii) Uno de los dos métodos utilizados en *i*) converge más rápido a la solución óptima de P que el otro. Explique por qué ocurre esto y qué relación tiene con las curvas de nivel de P.

Solución Problema 3.

a) *i*) En primer lugar, es necesario calcular el gradiente y el Hessiano.

$$\nabla f(x) = 4x^3 - 48x$$

$$H(x) = 12x^2 - 48 \rightarrow H^{-1}(x) = \frac{1}{12x^2 - 48}$$

Iteración 0

◇ Comprobamos si estamos en el óptimo:

$$\nabla f(x=1) = 4 - 48 = -44 \neq 0$$

Luego, seguimos.

◇ Calculamos el siguiente punto:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{36}(-44) = -\frac{2}{9}$$

Iteración 1

◇ Comprobamos si estamos en el óptimo:

$$\nabla f\Big(x = -\frac{2}{9}\Big) = \frac{7744}{729} \neq 0$$

Luego, seguimos.

◇ Calculamos el siguiente punto:

$$x_2 = -\frac{2}{9} - \frac{1}{12\big(\frac{2}{9}\big)^2 - 48}\Big(\frac{7744}{729}\Big) = \frac{1}{540}$$

Iteración 2

◇ Comprobamos si estamos en el óptimo:

$$\nabla f\Big(x = \frac{1}{540}\Big) = \frac{-4}{45} \neq 0$$

Luego, seguimos.

◇ Calculamos el siguiente punto:

$$x_3 = -\frac{1}{540} - \frac{1}{12\big(\frac{1}{540}\big)^2 - 48}\Big(\frac{-4}{45}\Big) \approx 0$$

Iteración 3

◇ Comprobamos si estamos en el óptimo:

$$\nabla f(x=0) = 0$$

Por lo tanto se acaba la iteración.

◇ El Hessiano está dado por: $H(x) = 12(0)^2 - 48 = -48$

Iteración	Punto (x)	Gradiente (f'(x))	Hessiano (H(x))	Función Objetivo
0	1	-44	-36	-23
1	-2/9	77744/729	-1280/27	-1042/881
2	1/540	-4/45	-48	0
3	0	0	-48	0

ii) La solución encontrada no corresponde al óptimo del problema, ya que es un máximo. El método hace crecer la función objetivo hasta converger a este máximo. Esto ocurre ya que el punto inicial, $x_0 = 1$ no fue bien elegido, dado que el Hessiano de f es definido negativo en el intervalo (-2,2).

b) *i*) Comenzamos con el Método de Newton:
Calculamos el gradiente:

$$f\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}$$

Luego, el Hessiano:

$$H\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow H^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El punto de partida es:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Iteración 0:

◇ Evaluamos el gradiente en el punto:

$$\nabla f\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que no estamos en el óptimo.

◇ Calculamos un segundo punto de partida

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteración 1

◇ Evaluamos el gradiente en el punto:

$$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El óptimo es $x^1 = (0, 0)$

Continuamos con el Método del Gradiente:
Iteración 0

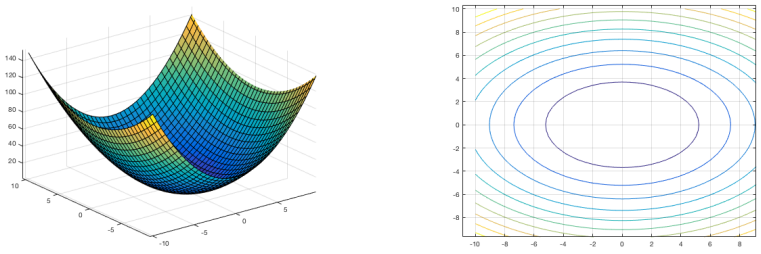
◇ Evaluamos el gradiente en el punto:

$$\nabla f\begin{pmatrix} \mathrm{x}^0 = 2 \\ \mathrm{y}^0 = 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que no estamos en el óptimo

◇ Calculamos un segundo punto:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda_0 \nabla f\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



(a) Gráfico de $f(x, y)$ (b) Curvas de nivel de $f(x, y)$

Figura 1: Gráficos pregunta 3b)ii)

Con $\lambda_k \to \text{mín}_\lambda f(x^k - \lambda_k \nabla f(x^k))$

$$f(x^0 - \lambda_0 \nabla f(x^0)) = f\begin{pmatrix} 2\text{-}\lambda_0 4 \\ 4\text{-}\lambda_0 4 \end{pmatrix} = (2 - \lambda_0 4)^2 + \frac{1}{2}(4 - \lambda_0 4)^2$$

$$\lambda_0 \to \text{mín}(2 - \lambda_0 4)^2 + \frac{1}{2}(4 - \lambda_0 4)^2$$

$$\frac{\partial(2 - \lambda_0 4)^2 + \frac{1}{2}(4 - \lambda_0 4)^2}{\partial \lambda_0} = 0 \to \lambda_0 = \frac{2}{3}$$

Luego, el siguiente punto es:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Iteración 1

- ◇ Evaluamos el gradiente en el punto:

$$\nabla f\begin{pmatrix} \text{x}^1 = -2/3 \\ \text{y}^1 = 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{-}4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que no estamos en el óptimo

ii) El método de Newton converge más rápido a la solución, que el método del Gradiente, llegando a la solución óptima en tan solo 2 iteraciones. Esto se debe a que las superficies de nivel son excéntricas, lo que se traduce en un mayor número de iteraciones en el método del gradiente. En los siguientes gráficos se pueden ver las curvas de nivel de esta función y su forma de elipsoide.

Problema 4.

Considere el siguiente problema de optimización no lineal

$$P: \quad \text{mín} \quad x_1 + x_2^2 - 12x_2 + 32$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} x_1^2 + 2x_2^2 & \leq & 128 \\ x_1 - x_2^2 & \leq & 1 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Muestre que P admite al menos una solución óptima.

b) Plantee las condiciones de KKT para P.

c) Encuentre todos los puntos que cumplen las condiciones planteadas en *b*).

d) Determine la solución óptima de P. Indique si este es un punto regular y si cumple o no las condiciones de KKT planteadas.

Solución Problema 4.

a) Para demostrar que el problema admite al menos una solución óptima usando BW:

- ◇ La función $f(x_1, x_2)$ es **continua** sobre el dominio.
- ◇ El dominio D es **no vacío**, ya que el punto $(x_1 = 0, x_2 = 4) \in D \rightarrow D \neq \emptyset$.
- ◇ El dominio D es **cerrado**, ya que las desigualdades que definen el dominio D son amplias $(\geq, \leq)$, y las restricciones están definidas por funciones continuas sobre el dominio.
- ◇ El dominio D es **acotado**:

$$\left.\begin{array}{c} x_1^2 + 2x_2^2 \leq 128 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{c} 0 \leq x_1 \leq \sqrt{128} \\ 0 \leq x_2 \leq 8 \end{array}$$

Por teorema de existencia, el problema admite al menos una solución óptima.

b) El Lagrangeano de este problema está dado por:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = x_1 + x_2^2 - 12x_2 + 32 + \lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 128) + \lambda_2(x_1 - x_2^2 - 1) + \lambda_3(4 - 2x_1 - x_2) - \lambda_4 x_1 - \lambda_5 x_2$$

Las condiciones de KKT están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow 1 + 2x_1\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow 2x_2 - 12 + 4x_2\lambda_1 - 2x_2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_5 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \leq 0 \rightarrow x_1^2 + 2x_2^2 - 128 \leq 0 \qquad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \rightarrow \lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 128) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \leq 0 \rightarrow x_1 - x_2^2 - 1 \leq 0 \qquad (5)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \rightarrow \lambda_2(x_1 - x_2^2 - 1) = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} \leq 0 \rightarrow 4 - 2x_1 - x_2 \leq 0 \qquad (7)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0 \rightarrow \lambda_3(4 - 2x_1 - x_2) = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} \leq 0 \rightarrow -x_1 \leq 0 \qquad (9)$$

$$\lambda_4 \frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = 0 \rightarrow \lambda_4 x_1 = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_5} \leq 0 \rightarrow -x_2 \leq 0 \qquad (11)$$

$$\lambda_5 \frac{\partial L}{\partial \lambda_5} = 0 \rightarrow \lambda_5 x_2 = 0 \qquad (12)$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0 \qquad (13)$$

c) Para encontrar los puntos que cumplen con las condiciones de KKT, se deben analizar todas las posibles soluciones, que están dadas por la cantidad y tipo de restricciones que está activa. Para esto, nos ayudamos del gráfico de la Figura 2.

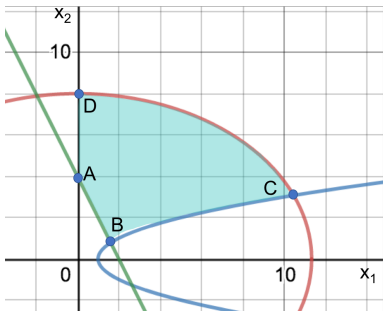


Figura 2: Gráfico 1 Pregunta 4c)

◇ Supuesto 1: La solución óptima se encuentra en el interior del espacio de soluciones factibles.

Todas las soluciones están inactivas, luego $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, sin embargo, no se cumple la condición (1) de KKT, ya que: $1 + 2x_1\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \rightarrow 1 \neq 0$

◇ Supuesto 2: Sólo hay una restricción activa

- La solución óptima se encuentra en el segmento $A - B$, sin incluir los puntos A y B.

  Solo la restricción (7) está activa, luego: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \wedge \lambda_3 \neq 0$, obteniéndose: $x_2 = 6,25$, $x_1 = -\frac{2,25}{2}$, $\lambda_3 = 0,5$, con lo que no se cumple la restricción $x_1 \geq 0$, por lo que el punto no pertenece al dominio.

- La solución óptima se encuentra en el segmento $B - C$, sin incluir los puntos B y C.

  Solo la restricción (5) está activa. Luego: $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$. Sin embargo, de (1) se obtiene que $\lambda_2 = -1$, que no cumple la última condición de KKT.

- La solución óptima se encuentra en el segmento $C - D$, sin incluir los puntos C y D.

  Solo la restricción (3) está activa, luego: $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \wedge \lambda_1 \neq 0$. Sin embargo, de las condiciones (1), (2) y (3), se obtienen los valores de $x_2 = 5,83$ y $x_2 = 6,14$, que al reemplazarlos en la condición (3), se obtienen valores de $x_1 > 0$, que al reemplazarlos en la ecuación (1), generan $\lambda_1 < 0$, lo que no cumple la ecuación (13).

- La solución óptima se encuentra en el segmento $A - D$, sin incluir los puntos A y D.

  Solo la restricción (9) esá activa, luego: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0 \wedge \lambda_4 \neq 0$. Con lo que se obtiene $\lambda_4 = 1$. Esto se reemplaza en (2) y se obtiene $x_2 = 6$. Además, se sabe que $x_1 = 0$, con lo que el punto $(0, 6)$ cumple las condiciones de KKT.

◇ Supuesto 3: Hay dos restricciones activas

- La solución óptima se encuentra en el punto A.

  Solo las restricciones (7) y (9) se activa, luego: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0 \wedge \lambda_3, \lambda_4 \neq 0$. Se obtiene $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$, pero $\lambda_3 = -4$, que no cumple la condición (13).

- La solución óptima se encuentra en el punto B.

  Solo las restricciones (5) y (7) están activas, luego: $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \wedge \lambda_2, \lambda_4 \neq 0$. Con el sistema de ecuaciones activas se obtiene $x_2 = 0,78$, que al reemplazarlo en (2) y (3) permite obtener un sistema de ecuaciones para λ_2 y λ_3. A partir de este sistema se obtiene $\lambda_3 = -2,15$, que no cumple la condición (13) de KKT.

- La solución óptima se encuentra en el punto C.

  Solo las restricciones (3) y (5) están activas, luego: $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \wedge \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. Con el sistema de ecuaciones de las restricciones activas se obtiene $x_2 = 3,07$ y $x_1 = 10,45$ que al reemplazarlo en (3) se obtiene $\lambda_1 = -\frac{0,28}{140,6}$, lo que no cumple la condición (13) de KKT.

- La solución óptima se encuentra en el punto D.

  Solo las restricciones (3) y (9) están activas, luego: $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0 \wedge \lambda_1, \lambda_4 \neq 0$. Con el sistema de ecuaciones de las restricciones activas se obtiene $x_1 = 0$ y $x_2 = 8$, que al reemplazarlo en (2), se obtiene $\lambda_4 = 1$ y $\lambda_1 = -\frac{1}{8}$, que no cumple la restricción (13).

Finalmente, el único punto que cumple las condiciones de KKT es el punto $(x_1, x_2) = (0, 6)$

d) Para encontrar si el punto $(0, 6)$ es la solución óptima de P debemos analizar la regularidad de todos los puntos del dominio. Como el problema no es convexo, no podemos utilizar conceptos de convexidad. Analizando los puntos, se puede ver que todos son regulares ya que:

- ◇ En todo punto donde hay una o dos restricciones activas, se puede verificar que los gradientes de las restricciones activas son l.i.
- ◇ No hay un punto factible con 3 o más restricciones activas
- ◇ En los puntos en los que no hay restricciones activas, se tiene que todos los puntos son regulares

Luego, el punto obtenido en la parte *c*) es un punto regular, que cumple todas las condiciones de KKT, por lo que $(0, 6)$ es la solución óptima de P.

Problema 5.

Una compañía de agua debe gestionar el envío de agua a partir de sus embalses hacia las distintas ciudades que atiende. Esto se puede representar mediante una red $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos. Este conjunto incluye a los embalses pertenecientes a la compañía, a las ciudades que esta atiende y a estaciones de agua, que corresponden a puntos que conectan algunos embalses con las ciudades más alejadas. Por otro lado, A representa los arcos de la red, es decir, las líneas que unen a los distintos puntos. Se sabe que para un mes de funcionamiento, existe una oferta o demanda mensual de agua de t_i $[m^3]$ para cada nodo $i \in N$ de la red. Si $t_i < 0$ el nodo corresponde a una demanda y si $t_i > 0$ corresponde a una oferta. Para las estaciones de agua, se tiene que $t_i = 0$. La red de agua está balanceada. Cada arco (i, j) tiene una capacidad máxima mensual de transporte de agua, que corresponde a u_{ij} $[m^3]$, es decir, la máxima cantidad de m^3 de agua que se pueden enviar mensualmente desde el nodo i al nodo j es de u_{ij}. Para calcular el costo c_{ij} de enviar agua por el arco $(i, j) \in A$ se utiliza una función no lineal, que corresponde a $c_{ij}(f_{ij}) = p_{ij} f_{ij} + q_{ij}(f_{ij})^{r_{ij}}$. El flujo de agua del arco (i, j) corresponde a f_{ij}. Los parámetros p_{ij}, q_{ij} y r_{ij} corresponden a constantes positivas. Debido a problemas de infraestructura, existe una zona en la que la cantidad total del agua que se transporta no puede superar los ℓ metros cúbicos mensuales. Así, los arcos (i, j) involucrados en esta restricción son todos aquellos que conectan nodos pertenecientes al conjunto Z, $Z \subset N$, con $i \in Z$ y $j \in Z$.

a) Formule un modelo de optimización que permita cumplir con todas las restricciones planteadas anteriormente y que permita minimizar el costo mensual de transporte de agua.

b) Suponga que las ofertas y demandas de la red son irrelevantes. El director de la compañía de agua quiere saber cuál es la máxima cantidad de agua que se puede enviar desde el embalse primario, $v \in N$, hasta la ciudad más lejana, $s \in N$. Formule un modelo de optimización que le permita resolver este problema.

Solución Problema 5.

a) Conjuntos

$$N : \text{nodos},$$

$$A : \text{arcos},$$

$$Z : \text{subconjunto de nodos con problemas de infraestructura},$$

Sea D el conjunto definido como $D = \{(i,j) : (i,j) \in A, i \in Z, j \in Z\}$

Variables

$$f_{ij} = \text{flujo de agua que se envía desde el nodo } i \text{ al nodo } j, \text{ con } i,j \in N$$

El modelo corresponde a:

$$P: \quad \text{mín} \quad z = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}(f_{ij})$$

$$\begin{aligned}
s.a. \quad & \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} f_{ki} = t_i \qquad \forall i \in N \\
& \sum_{(i,j)\in D} f_{ij} \leq \ell \\
& 0 \leq f_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \\
& c_{ij}(f_{ij}) = p_{ij} f_{ij} + q_{ij}(f_{ij})^{r_{ij}} \qquad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

b) Se agrega la siguiente variable

$$F = \text{flujo máximo de agua que se puede transportar por la red}$$

Manteniendo el conjunto D creado en *a*) se obtiene el siguiente modelo:

$$P: \quad \text{máx} \quad F$$

$$\begin{aligned}
s.a. \quad & \\
& \sum_{j:(v,j)\in A} f_{vj} - \sum_{k:(k,v)\in A} f_{kv} = F \\
& \sum_{j:(s,j)\in A} f_{sj} - \sum_{k:(k,s)\in A} f_{ks} = -F \\
& \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} f_{ki} = 0 \qquad \forall i \in N - \{v,s\} \\
& \sum_{(i,j)\in D} f_{ij} \leq \ell \\
& 0 \leq f_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$