PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: 23 de marzo.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- El plazo de entrega vence impostergablemente el día jueves 23 de marzo a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (3 puntos) Responda a las siguientes preguntas:

i) ¿Qué ocurre si se quiere modelar un problema en el cual quiero optimizar dos funciones? ¿Qué podría hacer en ese caso?

ii) En un problema de producción, puede ser muy común encontrarse con una variable binaria multiplicada por una "M grande". ¿Por qué se utiliza eso?

iii) Comente la siguiente afirmación: *Un problema de programación lineal con variables enteras puede ser modelado como uno de programación lineal con variables continuas y me sirve de igual forma en la práctica.* ¿Es siempre cierto esto? ¿Qué características debiera tener un modelo para poder considerar correcta esta frase, o qué supuestos debieran hacerse?

b) (12 puntos) El centro de alumnos de Ingeniería (CAI) debe realizar una fiesta durante todo un día. Existen distintas actividades $j \in J$ a realizarse durante toda la fiesta, para lo cual debe tener distintas personas a cargo de cada actividad en todo momento del día. Gracias a las gestiones del CAI, existe una lista I de voluntarios dispuestos a estar en cada una de las actividades, para lo cual dividieron el día en turnos $t \in T$.

Este problema fue modelado, y usted no tiene toda la información, solo sabe algunas cosas de forma incompleta: cada voluntario tiene restricciones de horario y tiene preferencias por cada actividad, pues existe un beneficio asociado a cada alumno que se encarga de una determinada actividad. Sin embargo, cada voluntario tiene un grupo de actividades que le provocan perjuicio en vez de beneficio.

El modelo correspondiente es:

$$\max \sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} B_{ij}x_{ijt} - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}y_{ij}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J} x_{ijt} &\leq D_{it} && ,\forall i \in I, t \in T && (1)\\
\sum_{i\in I} x_{ijt} &\geq 2 && ,\forall j \in J, t \in T && (2)\\
\sum_{t\in T} x_{ijt} &\leq y_{ij} \cdot M && ,\forall i \in I, j \in J && (3)\\
x_{ijt}, y_{ij} &\in \{0,1\} && ,\forall i \in I, j \in J, t \in T
\end{aligned}$$

i) ¿Cuáles son las variables de decisión, y cómo están definidas?

ii) Interprete correctamente las restricciones 1 y 2 en base a la información entregada en el enunciado.

iii) La restricción 3 relaciona dos variables, permitiendo que una de las variables esté acotada por un lado. ¿Por qué razón no es necesario que esté acotada por el otro lado?

iv) Ahora el Centro de Alumnos quiere también preocuparse por la justicia y compatibilidad entre los distintos voluntarios. En particular, el CAI quiere lograr que:

- ◇ Cada voluntario no esté con gente con la cual no compatibiliza. Para eso, cada voluntario i tiene asociado una lista A_i, que contiene a los voluntarios con los cuales no compatibiliza.
- ◇ Para que sea lo más equilibrado posible, se quiere lograr que la cantidad de turnos del voluntario que realiza la mayor cantidad de turnos sea menos del doble que la cantidad de turnos del voluntario que realiza la menor cantidad de turnos. Esto excluye a los alumnos que no hacen ningún turno.

Agregue las variables y restricciones necesarias para cumplir con las necesidades del CAI, siempre manteniéndose como un modelo de programación lineal.

Solución Problema 1.

a) i) Se debe comentar alguna forma para enfrentarse a esto. Puede ser generando una función que sea combinación de las dos funciones originales, o bien una de las funciones se puede traspasar a las restricciones y se consigue un objetivo similar al buscado originalmente.

ii) Supongamos que tengo X como mi variable continua e Y como variable binaria. Esto se hace porque Y permite que X sea positivo. Es decir, si Y es cero, restringe a que X sea cero. Si Y es uno, quiero que X tome cualquier valor y que no esté acotada por 1 (que sería el mayor valor de Y). Por eso, que X esté acotado superiormente por $Y \cdot M$, con M un número muy grande, resuleve el problema.

iii) Claramente, no es la misma solución exacta. Sin embargo, hay veces en que uno quiere una solución que este cercana al óptimo, y el problema trabaja con números muy grandes. por lo que la diferencia porcentual entre un número entero y el siguiente es muy bajo. En cambio, hay otros en que hacer ese supuesto sería un error. Por ejemplo, si quiero modelar la decisión de cuántas máquinas industriales comprar en una empresa, probablemente la solución esté en comprar 1 o 2 máquinas. Si el problema con variables continuas me dice que mi solución óptima es comprar $1,5$ máquinas, no me permite tomar una buena decisión.

b) i)

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{Si el voluntario } i \text{ se asigna a la actividad } j \text{ en el período } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el voluntario } i \text{ se asigna a la actividad } j \text{ por lo menos una vez en el día} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

ii) El parámetro D_{it} es igual a 1 si el voluntario i tiene disponibilidad en ese horario, 0 en otro caso. Por lo tanto, la restricción 1 impide asignar un voluntario en un cierto horario (da lo mismo la actividad) si no tiene disponibilidad. Al mismo tiempo, si tiene disponibilidad, me asegura de no poder asignarlo en más de una actividad al mismo tiempo.
La restricción 2 asegura que en cada actividad y en cada período existan dos voluntarios al menos encargados de esa actividad.

iii) La variable x_{ijt} no es necesario que esté acotada por abajo debido a la función objetivo. Para maximizar la función, x_{ijt} siempre va a tender a ser lo más alta posible, por lo que siempre tomará el valor 1 cuando pueda. Así que no es necesario obligarla a ser 1 cuando corresponda, pues en el óptimo se debiese cumplir.

iv) Se agrega la siguiente variable:

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el voluntario } i \text{ hace algún turno} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Y se agregan las siguientes restricciones:

$$x_{ijt} + \frac{\sum_{l \in A_i} x_{ljt}}{|A_i|} \leq 1 \qquad \forall i \in I, j \in J, t \in T$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{t \in T} x_{ijt} \leq 2 \cdot \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} x_{ljt} + (1 - z_l) \cdot M \qquad \forall i, l \in I, l \neq i$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{t \in T} x_{ijt} \leq z_i \cdot M \qquad \forall i \in I$$

$$z_i \leq \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} x_{ijt} \qquad \forall i \in I$$

Siendo M un número muy grande.

Problema 2. (10 puntos)

a) (6 puntos) Usted está a cargo de organizar un evento deportivo en la ciudad de Salsacia, en que debe realizar múltiples corridas durante el día, definidas en el conjunto I, y cada corrida estará compuesta de distintas rutas, que se definen en el conjunto R. Además, sabe que cada corrida puede ser del tipo $k \in K$, en donde el parámetro E_{ik} vale 1 si la corrida i es del tipo k, y 0 en caso contrario. El hecho de usar cada ruta también tiene un costo asociado c_{kr} que se debe pagar por cada corrida del tipo k que tiene la ruta r en su trayecto.

Para su sorpresa, una persona ya había modelado esta situación como un problema de programación lineal, pero lamentablemente no describió casi nada lo que tenía anotado. Lo único que se podía rescatar era la variable de decisión:

$$x_{ir} = \begin{cases} 1 & \text{si la corrida } i \text{ tiene a la ruta } r \text{ dentro de su trayecto} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

También, dentro del trabajo de la persona anterior, se encontraron las siguientes restricciones:

$$\sum_{r \in R} x_{ir} \geq F_k \cdot E_{ik} \qquad \forall i \in I, k \in K \tag{1}$$

$$x_{ir} + \frac{\sum_{j \in A(i)} x_{jr}}{|A(i)|} \leq 1 \qquad \forall r \in R, i \in I \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ir} \leq L \qquad \forall r \in R \tag{3}$$

i) ¿Qué representa la restricción (1)? ¿Qué puede representar F_k?

ii) ¿Qué representa la restricción (2)? ¿Qué puede representar $A(i)$?

iii) ¿Qué representa la restricción (3)? ¿Qué puede representar L?

b) (4 puntos) Suponga ahora que usted quiere agregar una variable y_r, que indica si la ruta r se utilizará durante el día o no. ¿Que restricciones agregaría al modelo para que sea correctamente incorporada la variable?

Nota: $|A(i)|$ representa la cantidad de elementos en el conjunto $A(i)$.

Solución Problema 2.

a) i) F_k representa el mínimo de rutas que debe tener una corrida del tipo k. Por lo tanto, la restricción obliga a que una corrida del tipo k cumpla con el requisito impuesto por F_k.

ii) $A(i)$ es el grupo de carreras que tiene conflicto con la carrera i, por lo que no pueden compartir una ruta.

iii) L es la máxima cantidad de corridas que pueden haber dentro de una misma ruta.

b)

$$x_{ir} \leq y_r \qquad \forall r \in R, i \in I$$

$$y_r \leq \sum_{i \in I} x_{ir} \qquad \forall r \in R$$

Problema 3. (15 puntos)

a) (6 puntos) La empresa RED se ubica en el rubro de venta de aceites y acaba de firmar un contrato con la empresa BLUE para vender muchos barriles de aceite. Sin embargo, RED no posee los barriles para poder transportar su producto, por lo que tendrá que mandarlos a hacer a la empresa GREEN, indicando las medidas de los barriles (largo, radio). Puede asumir que un barril es un cilindro perfecto con base circular.

RED sabe que debe transportar V_i litros de cada aceite $i \in I$, y obviamente no puede mezclar distintos aceites dentro de un mismo barril. El costo del material de los cilindros es $C\frac{\$}{m^2}$. Por razones desconocidas de la empresa GREEN, todos los barriles que mande a confeccionar deben ser iguales (es decir, el mismo largo y el mismo radio).

Confeccione un modelo de optimización que permita saber cómo mandar a hacer los barriles para transportar todo el aceite de manera de minimizar el costo total.

b) (9 puntos) Usted está a cargo de un barco pesquero, el cual ahora entrará en la temporada de pesca. Existen distintas zonas a las que puede ir su barco (no tiene que ir a todas), definidas en el conjunto K. Asuma que usted parte en la zona $Z \in K$, que debe volver a la zona Z al final de la temporada y que tiene la certeza que al menos visitará una zona distinta a la zona Z. Para pescar un cierto tipo de pez $j \in J$, usted debe pagar una licencia F_j por el derecho de pescar. Existe también un costo de transporte entre zonas, correspondiente a c_{kh}, con $h, k \in K$. Además, para proteger cada especie, solo se pueden pescar L_{jk} kilogramos de pescado de tipo j en la zona k.

Su objetivo es tratar de maximizar las ganancias esta temporada. Sabe que en cada zona k podrá vender a un precio de D_{jk} cada kilogramo de pescado j. También sabe que el peso máximo de pescado que resiste su barco es P.

i) Formule un modelo de programación lineal entero mixto que le permita maximizar sus ganancias esta temporada.

ii) Suponga ahora que el precio por kilo de todos los peces es el mismo en todos lados, y que a usted lo auspician con todos los gastos "administrativos"(gastos en transporte y en licencias). ¿Cómo cambiaría el modelo? ¿Influye el parámetro D_{jk} en la solución óptima?

Solución Problema 3.

a) En el enunciado no se pide explícitamente un modelo lineal, por lo que se puede modelar de forma no lineal. Una posible solución es:

◇ Variables de decisión
x_i: cantidad de barriles a ocupar para el aceite i.
y: largo del barril.
z: radio del barril.

◇ Función objetivo: minimizar el costo total.

$$\text{mín}\, C \cdot (2\pi \cdot z^2 + 2\pi z y) \cdot \sum_{i \in I} x_i$$

◇ Restricciones: debo cumplir con el requisito del volumen para cada tipo de aceite.

$$\begin{array}{rcll} x_i \cdot \pi z^2 y & \geq & V_i & \forall i \in I \\ y, z & \geq & 0 & \\ x_i & \in & \mathbb{Z}^+ & \forall i \in I \end{array}$$

b) i)

$$\begin{array}{rcl} x_{jk} & = & \text{Cantidad de Kilogramos de peces tipo } j \text{ obtenidos en la zona } k. \\ y_j & = & \begin{cases} 1 & \text{Si se decide pescar el pescado tipo } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \\ & & \\ z_{kh} & = & \text{Cantidad de viajes que se hacen entre la zona } k \text{ y la zona } h. \\ w_k & = & \begin{cases} 1 & \text{Si se visita la zona } k \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases} \end{array}$$

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} D_{jk} x_{jk} - \sum_{j \in J} F_j y_j - \sum_{k \in K} \sum_{h \in K} c_{kh} z_{kh}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- ◇ La cantidad pescada en una cierta zona no puede superar el límite debido al peligro de extinción:

$$x_{jk} \leq L_{jk} \qquad \forall j \in J, k \in K$$

- ◇ Lo que pesco en una zona no puede superar mi peso total:

$$\sum_{j \in J} x_{jk} \leq P \qquad \forall k \in K$$

- ◇ Relación entre variable para tener licencia para pescar y lo que se pesca:

$$\sum_{k \in K} x_{jk} \leq y_j \cdot M \qquad \forall j \in J$$

- ◇ Si no accedo a una determinada zona, entonces no puedo pescar ahí:

$$\sum_{j \in J} x_{jk} \leq \sum_{h \in K} z_{hk} \cdot M \qquad \forall k \in K$$

- ◇ Relación entre variables que si no accedo a una zona, no la visito:

$$\sum_{k \in K} z_{kh} \geq w_h \qquad \forall h \in K$$

$$z_{kh} \leq w_h \cdot M \qquad \forall k, h \in K$$

- ◇ Las veces que entro a una zona es igual a las veces que salgo de ella:

$$\sum_{h \in K} z_{hk} = \sum_{l \in K} z_{kl} \qquad \forall k \in K$$

- ◇ Tengo que salir al menos una vez de la zona Z:

$$\sum_{k \in K} z_{Zk} \geq 1$$

- ◇ Evitar subtours. Si tengo dos subconjuntos de zonas que forman una partición de K, uno contiene al nodo Z, por lo que siempre debe existir algún camino usado entre ambas particiones (siempre y cuando se visite las zonas que están en la otra partición).

$$\sum_{k \in U} \sum_{h \in K \setminus \{U\}} z_{kh} \geq 1 - \sum_{h \in K \setminus \{U\}} (1 - w_h) \cdot M \qquad \forall U : Z \in U, 1 \leq |U| \leq |K| - 1$$

- ◇ Naturaleza de las variables:

$$x_{jk} \geq 0 \qquad \forall j \in J, k \in K$$

$$y_j, w_k \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J, k \in K$$

$$z_{kh} \in \mathbb{Z}^+ \qquad \forall k, h \in K$$

ii) Como ya no tengo que preocuparme por los gastos administrativos, los dos términos que se restan en la función objetivo desaparecen. Además, Djk es igual para todo j y k, por lo que la función objetivo quedaría:

$$\max D_{jk} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{jk}$$

La forma de maximizar eso es, simplemente, pescando la mayor cantidad de peces posible. Por lo tanto, visitaría todas las zonas y pescaría hasta alcanzar el peso P del barco en cada zona, o hasta alcanzar el límite L_{jk} en cada zona.

Problema 4. (20 puntos)

Suponga que usted esta a cargo de la agenda de Roger Federer, tenista profesional, y quiere calendarizar su año de competencias en el circuito ATP (Asociación de Tenistas Profesionales) de manera de optimizar sus ganancias. En específico, usted quiere planificar qué realizará el jugador en cada una de las semanas del año (un año tiene 52 semanas). Existen diversos campeonatos a los cuales puede asistir, los cuales están contenidos en el conjunto J. Cada campeonato j tiene una duración L_j medida en semanas, y su inicio está marcado por el parámetro S_{jt}, igual a 1 si el campeonato j empieza en la semana t, 0 en caso contrario. También, debido a que no tiene las condiciones físicas de antes, no puede jugar dos campeonatos seguidos, es decir, debe dejar pasar al menos una semana entre un campeonato y otro.

Cada campeonato tiene un nivel de dificultad distinto y otorgan diferentes puntos para el ranking ATP. Debido a su experiencia, sabe que el campeonato j le otorgará P_j puntos si lo juega. Sabe también que hay algunos campeonatos que le pagarán una cierta cantidad de dinero, contenido en el parámetro H_j, sólo por el hecho de jugar ese campeonato.

Existen diversos patrocinadores asociados a los distintos campeonatos. El conjunto N contiene a todos los patrocinadores de la ATP, y usted debe decidir con cuáles patrocinadores firmará contrato. Para esto, puede hacerlo en cualquier momento del año. Por el hecho de firmar contrato, usted incurrirá en un gasto F_{it} por firmar contrato con el patrocinador i en la semana t. También sabe que para cada campeonato, si uno de sus patrocinadores (con el cual debe haber firmado contrato a esa altura) auspicia también al campeonato y Federer asiste, obtiene una bonificación extra de dinero, B_j. Para eso, cuenta con el parámetro D_{ij} que es igual a 1 si el patrocinador i auspicia el campeonato j, 0 en caso contrario.

También, a Federer le preocupa la popularidad que tenga con sus seguidores. Si llegan a pasar 3 semanas seguidas sin estar en un campeonato, deberá dar una conferencia de prensa en esa tercera semana sin campeonato dando las explicaciones pertinentes, lo cual tiene un costo de C_t para la semana t. Además, lo que tiene prohibido es que no puede pasar 4 semanas seguidas sin jugar un campeonato, pues perdería muchos fanáticos de todo el planeta y él no está dispuesto a tal situación

Se le pide que modele este problema como un modelo de programación lineal entero mixto que le ayude a decidir cómo organizar su calendario y qué patrocinadores adquirir (y en qué momento), respetando los requerimientos del jugador y obteniendo una cantidad mínima de puntos E en el ranking de modo de maximizar sus ganancias.

Solución Problema 4.

a) Variables de decisión:

$$x_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{Si Federer está jugando el campeonato } j \text{ en la semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{Si se firma contrato con patrocinador } j \text{ en la semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{Si Federer debe dar conferencia de prensa en la semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se recibe bonificación por el campeonato } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{Si Federer asiste al campeonato } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\beta_{it} = \begin{cases} 1 & \text{Si se cuenta con contrato firmado del patrocinador } i \text{ en la semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\text{máx} \sum_{j \in J} H_j \alpha_j + \sum_{j \in J} B_j w_j - \sum_{t=1}^{52} \sum_{i \in N} F_{it} y_{it} - \sum_{t=1}^{52} C_t z_t$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- ◇ Cantidad de puntos mínima:

$$\sum_{j \in J} P_j \alpha_j \geq E$$

- ◇ Relación α_j y x_{jt}:

$$L_j \alpha_j S_{jt} \leq \sum_{s=t}^{t+L_j-1} x_{js} \qquad \forall j \in J, t \in \{1, ..., 52\}$$

- ◇ Popularidad y definición de variable z_t:

$$\sum_{j \in J} (x_{jt} + x_{jt-1} + x_{jt-2} + x_{jt-3}) \geq 1 \qquad t \in \{4, 5, ..., 52\}$$

$$\sum_{j \in J} (x_{jt} + x_{jt-1} + x_{jt-2}) \geq 1 - z_t \qquad t \in \{3, 4, 5, ..., 52\}$$

- ◇ Relación β_{it} e y_{it}:

$$\beta_{it} = \sum_{l=1}^{t} y_{il} \qquad \forall i \in N, t \in \{1, ..., 52\}$$

- ◇ Definición de la bonificación por campeonato (w_j):

$$\alpha_j \geq w_j \qquad \forall j \in J$$

$$\sum_{t=1}^{52} \sum_{i \in N} D_{ij} \beta_{it} S_{jt} \geq w_j \qquad \forall j \in J$$

- ◇ Solo se puede firmar contrato una vez:

$$\sum_{t=1}^{52} y_{it} \leq 1 \qquad \forall i \in N$$

- ◇ Solo se puede estar jugando un campeonato a la vez:

$$\sum_{j \in J} x_{jt} \leq 1 \qquad \forall t \in \{1, ..., 52\}$$

- ◇ No puede jugar dos campeonatos seguidos. Si está jugando un campeonato en una semana, a la semana siguiente no puede estar en otro campeonato:

$$x_{jt} + x_{kt+1} \leq 1 \qquad \forall t \in \{1, 2, ..., 51\}; j, k \in J, k \neq j$$

- ◇ Naturaleza de variables:

$$x_{jt}, y_{it}, z_t, w_j, \alpha_j, \beta_{it} \in \{0, 1\} \qquad \forall j, i, t$$