PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2019
Profesores: A. Cataldo, R. Cuadrado, J. González, P. Guajardo, M. Klapp

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: 22 de mayo

La Tarea tiene cinco preguntas de las cuales dos serán seleccionadas por el equipo docente para ser evaluadas después de la entrega; cada pregunta valdrá 3 puntos. De todas formas, la solución de toda la Tarea será pública después de la entrega.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo entrega una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** por cada pregunta de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano, debe **estar ordenado y legible**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cinco grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día miércoles 22 de mayo a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:00 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1.

a) Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{mín} \quad c^T x \\ s.a. \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Sea x^* la solución óptima de P e y^* la solución óptima del problema dual de P.

i) Si el vector de costos de la función objetivo cambia a c', entonces la solución óptima primal es x'. Muestre que $(c' - c)^T(x' - x^*) \leq 0$.

ii) Suponga ahora que el vector de costos se mantiene en c, pero se reemplaza el vector de recursos b por $\hat{b}$. Sea $\hat{x}$ la nueva solución óptima primal. Muestre que ${y^*}^T(\hat{b} - b) \leq c^T(\hat{x} - x^*)$.

b) Sea P un problema factible de optimización lineal. Usted solo puede ejecutar una función que corre el algoritmo simplex fase I sobre cualquier dominio. ¿Cómo podría determinar si P es acotado (tiene valor óptimo finito)? Explique.

c) Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro no vacío, con $b \in \mathbb{R}^m$. Llame a cualquier variable x_i "nula" si $x_i = 0$ para todo $x \in P$, es decir, si no toma valores diferentes de cero en P.

i) Suponga que existe un $y \in \mathbb{R}^m$, tal que $y^T A \geq 0, y^T b = 0$, con $[y^T A]_i > 0$ (i-ésima componente de $y^T A$ es positiva). Muestre que x_i es "nula".

ii) Muestre *i*) en sentido contrario. Es decir: Si x_i es "nula", entonces existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^T A \geq 0, y^T b = 0$, con $[y^T A]_i > 0$.

iii) Pruebe que existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^T A \geq 0$ y $y^T b = 0$.

d) Considere un problema lineal en formato estándar con variables enteras dado por

$$\min_{x \in \mathbb{Z}_+} c^T x : Ax = b.$$

Suponga que el problema es acotado y que la matriz de restricciones A y el vector de recursos b son enteros. Considere que usted resuelve la relajación lineal del problema y obtiene una configuración de base $B \subset \{1, \ldots, n\}$ que define un vértice óptimo. Muestre que si la matriz formada por columnas de A que tienen índices en B tiene determinante 1 ó -1, entonces el vértice óptimo relajado es solución óptima entera.

Solución Problema 1.

a) *i*) En primer lugar, es necesario notar que si se cambia el vector de costo, la región factible de ambos problemas será la misma:

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{mín} \quad c^T x \\ s.a. \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} P': \quad & \text{mín} \quad c'^T x \\ s.a. \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Como P y P' tienen la misma región factible, x^* y x' son soluciones factibles de ambos problemas, ya que son soluciones óptimas.

Luego

$$(c' - c)^T(x' - x^*) = c'^T x' - c^T x' - c'^T x^* + c^T x^* \qquad (*)$$

Utilizando conceptos de dualidad, se sabe que, por dualidad fuerte

$$c^T x^* = y^{*T} b, \qquad c'^T x' = y'^T b$$

y por dualidad débil

$$c'^T x^* \geq y'^T b, \qquad c^T x' \geq y^{*T} b$$

Luego, $(*)$ es

$$c'^T x' - c^T x' - c'^T x^* + c^T x^* \leq y'^T b - y'^T b - y^{*T} b + y^{*T} b = 0$$

ii) Nuevamente tenemos dos problemas

$$\begin{array}{lrcl} P: & \text{mín} & c^T x & \\ s.a. & & & \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

y,

$$\begin{array}{lrcl} \hat{P}: & \text{mín} & c^T x & \\ s.a. & & & \\ & Ax & = & \hat{b} \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

En este caso, los problemas no tienen la misma región factible.
Tenemos que:

$$\begin{array}{rcll} c^T(\hat{x} - x^*) & = & c^T\hat{x} - c^T x^* & \\ & = & c^T\hat{x} - y^{*T} b & (**) \end{array}$$

por dualidad fuerte. Así, necesitamos demostrar que:

$$c^T(\hat{x} - x^*) = c^T\hat{x} - y^{*T} b \geq y^{*T}\hat{b} - y^{*T} = y^{*T}(\hat{b} - b)$$

Por otro lado, sabemos que $c^T\hat{x} = \hat{y}^T\hat{b}$, con $\hat{y}$ solución del problema dual de $\hat{P}$. Este existe ya que $\hat{x}$ existe. Considere los problemas duales asociados D y $\hat{D}$

$$\begin{array}{lrcl} D: & \text{máx} & y^T b & \\ s.a. & & & \\ & y^T A & \leq & c \end{array}$$

y,

$$\begin{array}{lrcl} \hat{D}: & \text{máx} & y^T\hat{b} & \\ s.a. & & & \\ & y^T A & \leq & c \end{array}$$

Ambos problemas duales tienen la misma región factible. Entonces:
y^* es solución óptima de D, luego, en particular, es solución básica factible de D y como tiene D y $\hat{D}$ tienen la misma región factible, y^* es solución factible de $\hat{D}$. Por lo tanto, $\hat{y}^T\hat{b} \geq y^*\hat{b}$-

Luego, por $(**)$ se cumple:

$$c^T(\hat{x} - x^*) = c^T\hat{x} - y^{*T} b \geq y^{*T}\hat{b} - y^{*T} = y^{*T}(\hat{b} - b)$$

b) Basta con resolver el problema de fase I del dual de P. Utilizando uno de los corolarios del teorema débil de dualidad, el problema de fase I me permitirá determinar si el primal P es acotado. Si la fase I muestra que el dual es infactible, entonces, como sé que el primal es factible, este será no acotado. De la misma forma, si el dual es factible, entonces el primal P será acotado.

c) *i*) El enunciado sugiere los problemas primal (P) y dual (D) siguientes:

$$\begin{array}{lll} P: & \text{máx} & 0x \\ s.a. & & \\ & Ax & = \quad b \\ & x & \geq \quad 0 \end{array}$$

y,

$$\begin{array}{lll} D: & \text{mín} & y^T b \\ s.a. & & \\ & y^T A & \geq \quad 0 \end{array}$$

Si $(y^T A)_i > 0$ en D, entonces la variable asociada a la restricción i de P, x_i, es cero. Esto es directo del THC. Así:

$$\begin{array}{c} Ax = b \quad /y^T \\ y^T Ax = y^T b = 0 \\ (y^T A)_i x_i = 0 \end{array}$$

Pero $(y^T A)_i > 0$ y $x \geq 0$, luego, $x_i = 0$.

ii) Como P no es vacío, tiene óptimo finito, entonces D tiene un óptimo finito, llamemos $\hat{y}$ al óptimo de D.
A partir de lo anterior, es directo que $\hat{y}^T A \geq 0$ ya que $\hat{y}$ es factible. Además, por dualidad fuerte tenemos que $\hat{y}^T b = 0$.
Si $x_i = 0 \in P$, entonces, la restricción asociada a este x_i en el dual no es activa, por lo tanto, $(y^T A)_i > 0$.

iii) Esto se puede ver directamente de la parte *i*) donde se plantean los problemas P y D. En primer lugar, $y^T b = 0$ por dualidad fuerte, ya que la función objetivo del primal es $0x$. En segundo lugar, $y^T A \geq 0$ por la construcción del problema dual asociado a P.

d) Sea $Adj(B)$ la matriz adjunta de B, con B la base óptima. Como la matriz adjunta se obtiene multiplicando, sumando y restando los coeficientes de B y A solo tiene coeficientes enteros, los coeficientes de $Adj(B)$ serán enteros. Luego, si $det(B)$ =1 ó -1, se tiene que B^{-1}, es decir, la inversa de la base óptima, tendrá solo coeficientes enteros. Luego, como b es un vector entero, $x_B = B^{-1}b$ tiene solo componentes enteras. Como B es la base óptima, x_B es el vértice óptimo y es entero, por lo que el problema relajado tiene una solución entera y no es necesario realizar Branch Bound.

Problema 2.

Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{lll} P & \text{máx} & x_1 + x_2 + 3x_3 \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_3 & \leq \quad 2 \\ & x_2 + x_3 & \leq \quad 2 \\ & x_3 & \geq \quad 1 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq \quad 0 \end{array}$$

a) Escriba P en su forma estándar.

b) Encuentre una solución básica inicial factible mediante simplex fase I.

c) Resuelva el problema P a partir del punto de partida encontrado en *b*). ¿Es la solución acotada? ¿posee solución? ¿Es degenerada? En caso de haber solución óptima: indique una configuración de base para un vértice óptimo.

d) ¿En qué rango de valores pueden moverse el lado derecho de cada restricción para que la configuración de base óptima no cambie?

e) ¿En qué rango de valores pueden moverse (por separado) los coeficientes de costo de x_1, x_2 y x_3 de tal forma que la solución óptima no cambie?

f) ¿Que condiciones debiesen cumplir movimientos simultáneos de los coeficiente de x_1, x_2 y x_3 en la F.O de tal forma que la solución óptima no cambie?

Solución Problema 2.

a) El problema en forma estándar corresponde a

$$\begin{array}{lll} P & \text{mín} & -x_1 - x_2 - 3x_3 \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_3 + x_4 = 2 & \\ & x_2 + x_3 + x_5 = 2 & \\ & x_3 - x_6 = 1 & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & \end{array}$$

b) El problema de fase I corresponde a

$$\begin{array}{lll} P & \text{mín} & y \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_3 + x_4 = 2 & \\ & x_2 + x_3 + x_5 = 2 & \\ & x_3 - x_6 + y = 1 & \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

Iteración 1

$$x_B = (x_4, x_5, y), x_R = (x_1, x_2, x_3, x_6)$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R}^1 = (0,0,0,0) - (0,0,1,-1) = (0,0,-1,1)$$

No estamos en el óptimo y x_3 entra a la base. Según el criterio del mínimo cuociente, y sale de la base

Iteración 2

$$x_B = (x_4, x_5, x_3), x_R = (x_1, x_2, y, x_6)$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \bar{R}^1 = (0,0,1,0) - (0,0,0,0) = (0,0,1,0)$$

Como los costos reducidos de fase I son mayores o iguales a 0 y la variable artificial $y = 0$, utilizamos la base óptima de fase I como base factible inicial para la fase II.

c) Iteración 1

$$x_B = (x_4, x_5, x_3), x_R = (x_1, x_2, x_6)$$

$$B^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (-1, -1, -3)$$

La solución no es óptima y entra la variable x_6. El criterio de salida es:

$$\text{mín}\{\frac{1}{1}, \frac{1}{1}\}$$

Como hay un empate se tendrá una solución degenerada. Escogemos la variable x_4 como variable que sale de la base.

Iteración 2

$$x_B = (x_6, x_5, x_3), x_R = (x_1, x_2, x_4)$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (2, -1, 3)$$

La solución no es óptima y entra de la base x_2. De acuerdo al criterio del mínimo cuociente, sale de la base la variable x_5

Iteración 3

$$x_B = (x_6, x_2, x_3), x_R = (x_1, x_5, x_4)$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{R}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (1, 1, 2)$$

Luego, como todos los costos reducidos son mayores a cero, la solución es óptima. Entonces, las variables básicas en el vértice óptimo tienen los valores: $(x_6, x_2, x_3) = (1, 0, 2)$. Como se tiene una variable básica que vale cero en el punto óptimo, la solución del problema es degenerada.

d) Sea b_i el coeficiente de lado derecho de cada restricción i, con $i = 1, 2, 3$. Para encontrar el rango en el que puede variar cada b_i es necesario comprobar el criteiro de factibilidad, $B^{-1}b \geq 0$. Lo hacemos por separado para cada uno de los coeficientes:

- ◇ Restricción (1):

$$\left.\begin{array}{c} b_1 - 1 \geq 0 \\ -b_1 + 2 \geq 0 \\ b_1 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow 1 \leq b_1 \leq 2$$

- ◇ Restricción (2):

$$\left.\begin{array}{c} -2 + b_2 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow b_2 \geq 2$$

- ◇ Restricción (3):

$$\left.\begin{array}{c} 2 - b_3 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow b_3 \leq 2$$

e) Para analizar en qué rango se pueden mover los coeficientes de la función objetivo, se comprueba el criterio de optimalidad para c_1, c_2 y c_3 por separado.

Para c_1:

$$\begin{bmatrix} -c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$c_1 \leq 2$$

Para c_2:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -c_2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{c} -1 - c_2 + 3 \geq 0 \\ c_2 \geq 0 \\ 0 - c_2 + 3 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow 0 \leq c_2 \leq 2$$

Para c_3:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{c} -1 - 1 + c_3 \geq 0 \\ -1 + c_3 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow c_3 \geq 2$$

f) Tenemos que resolver el siguiente sistema de desigualdades, que se obtiene a partir de los costos reducidos del problema.

$$\begin{bmatrix} -c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -c_2 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

A partir de este, obtenemos las condiciones que deben cumplir los costos asociados a las variables x_1, x_2 y x_3 para que la solución óptima siga siendo la misma.

$$\left.\begin{array}{c} -c_1 - c_2 + c_3 \geq 0 \\ -c_2 + c_3 \geq 0 \\ c_2 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{c} c_3 \geq c_1 + c_2 \\ c_3 \geq c_2 \\ c_2 \geq 0 \end{array}$$

Problema 3.

Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{lll} P: & \text{mín} & -3x_1 + x_2 \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_2 \geq 0 & \\ & x_1 - 2x_2 \geq -6 & \\ & x_1 + x_2 \leq 5 & \\ & 5x_1 - x_2 \leq 20 & \\ & x_2 \geq 0 & \end{array}$$

a) Encuentre una cota inferior para el valor óptimo de P, a partir de una combinación lineal apropiada de las restricciones.

b) Formule el problema dual de P, llámelo D.

c) Obtenga una solución óptima de P.

d) Resuelva D utilizando el Teorema de Holgura Complementaria y la solución de P.

e) Reemplace el coeficiente del lado derecho de la cuarta restricción por 25, obteniendo el problema P', y desarrolle nuevamente las partes *b*), *c*) y *d*) ¿Cómo son las estructuras de la solución del primal y del dual?

Solución Problema 3.

a) Para encontrar una cota inferior para el valor óptimo de P debemos multiplicar las restricciones por distintos valores. Las primeras dos restricciones se multiplicarán por valores no negativos y las demás, por valores no positivos. Escojamos $y = (1, 1, -5, 0)$. Luego,

$$\begin{array}{rcc} (x_1 + x_2 \geq 0) \cdot 1 & \rightarrow & x_1 + x_2 \geq 0 \\ (x_1 - 2x_2 \geq -6) \cdot 1 & \rightarrow & x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ (x_1 + x_2 \leq 5) \cdot -5 & \rightarrow & -5x_1 - 5x_2 \geq -25 \\ (5x_1 - x_2 \leq 20) \cdot 0 & \rightarrow & 0x_1 + 0x_2 \geq 0 \end{array}$$

Sumando las restricciones se obtiene:

$$-3x_1 - 6x_2 \geq -31$$

Considerando la función objetivo:

$$z = -3x_1 + x_2 \geq -3x_1 - 6x_2$$

Así, una cota inferior para la función objetivo corresponde a $z \geq -31$.

b) El problema dual corresponde a

$$\begin{array}{lll} D: & \text{máx} & -6y_2 + 5y_3 + 20y_4 \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
s.a. & \\
\quad y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 & = \quad -3 \\
\quad y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 & \leq \quad 1 \\
\quad y_1, y_2 & \geq \quad 0 \\
\quad y_3, y_4 & \leq \quad 0
\end{array}
$$

c) El óptimo de P se alcanza en el punto $x^* = (4, 0)$ con un valor óptimo de $z* = -12$.

d) El Teorema de Holguras Complementarias

$$
\begin{aligned}
{y^*}^T(b - Ax^*) = 0 \qquad (1) \\
{x^*}^T(A^T y^* - c) = 0 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que (1):

$$
\begin{array}{llllll}
y_1(x_1 + x_2 - 0) = 0 & \rightarrow & y_1(4 + 0 - 0) = 0 & \rightarrow & y_1 = 0 \\
y_2(x_1 - 2x_2 - (-6)) = 0 & \rightarrow & y_2(4 - 0 - (-6)) = 0 & \rightarrow & y_2 = 0 \\
y_3(x_1 + x_2 - 5) = 0 & \rightarrow & y_3(4 + 0 - 5) = 0 & \rightarrow & y_3 = 0 \\
y_4(5x_1 - x_2 - 20) = 0 & \rightarrow & y_4(5 \cdot 4 - 0 - 20) = 0 & \rightarrow & y_4 \text{ libre}
\end{array}
$$

Luego, (2) implica:

$$
4(-3 - (y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4)) = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 = -3 \quad \rightarrow \quad y_4 = -3/5
$$

La solución óptima del problema dual corresponde a $y^* = (0, 0, 0, -3/5)$ con un valor óptimo de $w^* = -12$.

e) El problema dual de P', D' corresponde a:

$$
\begin{array}{lll}
D': & \text{máx} & -6y_2 + 5y_3 + 25y_4 \\
s.a. & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\quad y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 & = \quad -3 \\
\quad y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 & \leq \quad 1 \\
\quad y_1, y_2 & \geq \quad 0 \\
\quad y_3, y_4 & \leq \quad 0
\end{array}
$$

La solución óptima de P' es $(x_1^*, x_2^*) = (5, 0)$, con valor óptimo $z^* = -15$.

Teorema de Holguras Complementarias

$$
\begin{array}{llllll}
y_1(x_1 + x_2 - 0) = 0 & \rightarrow & y_1(5 + 0 - 0) = 0 & \rightarrow & y_1 = 0 \\
y_2(x_1 - 2x_2 - (-6)) = 0 & \rightarrow & y_2(5 - 0 - (-6)) = 0 & \rightarrow & y_2 = 0 \\
y_3(x_1 + x_2 - 5) = 0 & \rightarrow & y_3(5 + 0 - 5) = 0 & \rightarrow & y_3 \text{ libre} \\
y_4(5x_1 - x_2 - 20) = 0 & \rightarrow & y_4(5 \cdot 5 - 0 - 25) = 0 & \rightarrow & y_4 \text{ libre}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
x_1(-3 - (y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4)) = 0 & \rightarrow & 5(-3 - (0 + 0 + y_3 + 5y_4)) = 0 & \rightarrow & y_3 + 5y_4 + 3 = 0 \\
x_2(1 - (y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4)) = 0 & \rightarrow & 0(5 - 0 - (-6)) = 0 & &
\end{array}
$$

Se obtiene que la solución del problema dual corresponde a $y_1 = 0, y_2 = 0$, sin embargo, y_3 y y_4 corresponden a cualquier par de puntos pertenecientes a la recta $y_3 + 5y_4 + 3 = 0$, con $y_3, y_4 \leq 0$. Esto indica que la estructura de la solución del problema dual es de múltiples soluciones. De esta forma, podemos concluir que la estructura de la solución primal es degenerada.

Problema 4.

Javiera es una experimentada química y es la única en el país que vende el producto químico C. Para poder realizar el complejo proceso de elaboración del producto C ella debe comprar cada semana a su fiel proveedor, Felipe, los químicos A y B. Estos productos vienen sellados en botellas de 1 litro. Dado que Javiera no tiene mucho espacio de almacenamiento en su laboratorio, la cantidad de botellas de químicos que compra cada vez no puede exceder las 6 botellas, sin embargo, para el buen funcionamiento de su proceso de producción, es necesario que la diferencia entre dos veces las botellas del químico B y las botellas del químico A no sea mayor a 2.
Felipe es un poco temperamental y tiene una regla para respetar los exclusivos precios que le hace a Javiera y es que la suma entre 3 veces la cantidad de botellas que compre de A y las botellas que compre de B debe ser como mínimo 2.
Como Javiera es la única productora de C en el país, su producto es altamente demandado. A pesar de que ella lo venda en cantidades muy pequeñas, le interesa producir el máximo posible del producto C semanalmente. Para la producción de un kilogramo de C se necesitan una botella de A y 3 de B.

a) Formule un problema de programación lineal entera que permita a Javiera determinar la cantidad de botellas semanales de A y B que ella debe comprar a Felipe, de forma de maximizar la cantidad de kilogramos del producto C confeccionados semanalmente.

b) Resuelva el problema formulado en *a*) mediante el algoritmo Branch & Bound. Comience ramificando la variable asociada al número de botellas de A. En cada iteración señale:

- ◇ Subproblema utilizado.
- ◇ Valor de las variables y función objetivo en el óptimo encontrado.
- ◇ Valor del incumbente.
- ◇ Valor de la mejor cota superior disponible para el valor óptimo entero.

Identifique los nodos del árbol que se podan e indique por qué. En su respuesta debe incluir el árbol B&B asociado.

c) Grafique el problema. Encuentre dos cortes de Gomory y grafíquelos.

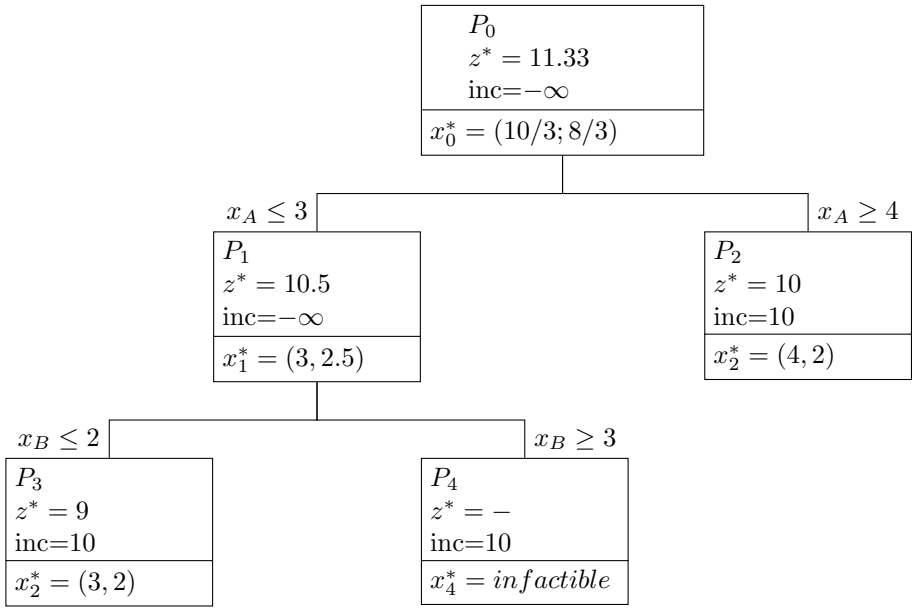
d) Determine el número mínimo de cortes que necesita agregar al problema para que al utilizar el algoritmo simplex, se obtenga una solución óptima que sea factible en el problema original. Identifique dichos cortes.

Solución Problema 4.

a) Sea x_A la cantidad de botellas encargadas del químico A y x_B la cantidad de botellas encargadas del químico B. El modelo de optimización queda:

$$
\begin{array}{lrcl}
P: & \text{máx} & x_A + 3x_B & \\
s.a. & & & \\
& x_A + x_B & \leq & 6 \\
& -x_A + 2x_B & \leq & 2 \\
& 3x_A + x_B & \geq & 2 \\
& x_A, x_B & \geq & 0, \text{ enteros}
\end{array}
$$

b) El árbol de BB para P es el siguiente



El nodo 3 se poda ya que es una solución entera con valor óptimo menor al incumbente. El nodo 4 se poda ya que tiene un dominio infactible. Finalmente, la solución óptima entera es el subproblema 2, con $x^* = (4, 2)$ y valor óptimo $z^* = 10$.

c) Para realizar cortes de Gomory, escribimos el problema relajado en forma estándar

$$
\begin{array}{lll}
PR & \text{mín} & -x_A - 3x_B \\
s.a. & & \\
& x_A + x_B + h_1 = 6 & \\
& -x_A + 2x_B + h_2 = 2 & \\
& 3x_A + 2x_B - e_1 = 2 & \\
& x_A, x_B, h_1, h_2, e_1 \geq 0 &
\end{array}
$$

Los cortes de Gomory están dados por la expresión

$$\sum_{j \in NB} (\bar{a}_{kj} - \lfloor \bar{a}_{kj} \rfloor)(x_R)_j \geq (\bar{b}_k - \lfloor \bar{b}_k \rfloor)$$

Luego, se pueden realizar los siguientes cortes

$$\left(\frac{2}{3} - \lfloor \frac{2}{3} \rfloor\right) h_1 + \left(-\frac{1}{3} - \lfloor -\frac{1}{3} \rfloor\right) h_2 \geq \frac{10}{3} - \lfloor \frac{10}{3} \rfloor$$

$$\left(\frac{1}{3} - \lfloor \frac{1}{3} \rfloor\right) h_1 + \left(\frac{1}{3} - \lfloor \frac{1}{3} \rfloor\right) h_2 \geq \frac{8}{3} - \lfloor \frac{8}{3} \rfloor$$

Resolviendo y reemplazando las variables de holgura, se obtienen las desigualdades

$$x_B \leq 15/6$$

$$x_B \leq 2$$

En el gráfico, las restricciones están representadas por las líneas negras y el espacio factible del problema P se puede ver en azul. La recta naranja representa el primer corte de Gomory y la recta morada el segundo. Se puede ver que los cortes de Gomory acotan el espacio factible, sin embargo, no cortan soluciones enteras de la región factible.

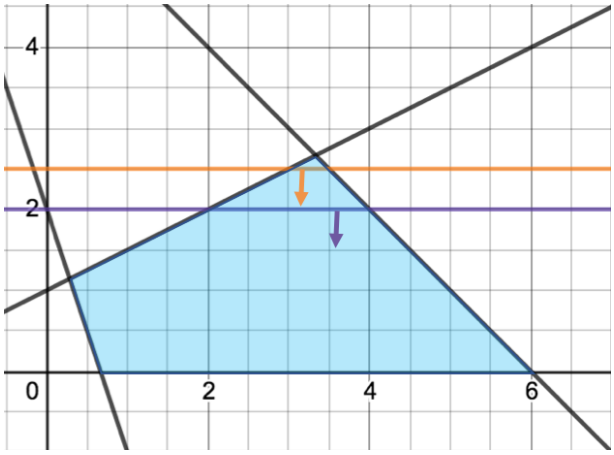


Figura 1: Gráfico P con Cortes de Gomory

d) Para que al utilizar el algoritmo simplex se obtenga una solución óptima factible en el problema original, el vértice óptimo del espacio factible debe ser entero. Así, es necesario realizar cortes válidos que permitan obtener el vértice $(4, 2)$ como punto óptimo. Para esto es necesario solo un corte, ya que como se puede ver en el gráfico anterior, el corte de Gomory $x_B \leq 2$ corta del espacio factible la parte superior no entera y considerando el gradiente de la función objetivo, permite que $(4, 2)$ se el punto óptimo del problema relajado.

Problema 5.

Para un concurso de innovación se ha traído a un especialista en emprendimiento desde Estados Unidos con el objetivo de que asesore a los distintos equipos concursantes. Para esto, se deben definir las horas de atención a los equipos de modo que la mayor cantidad de equipos tengan disponibilidad de tiempo para asistir al menos a uno de dichos módulos. Suponga que en cada día de lunes a viernes hay 6 módulos horarios. En el concurso hay E equipos participando. Para cada equipo se dispone información de su indisponibilidad; por lo tanto, en esos módulos el equipo no podría asistir al horario de atención del especialista. Suponga que la disponibilidad del equipo i, está registrada en base a los siguientes parámetros:

$$\alpha_{imd} = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ tiene disponible el módulo } m \text{ del día } d;\ i = 1, 2, ..., E;\ m = 1, 2, ...6;\ d = 1, 2, ..., 5 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Por otro lado, el especialista tiene otros compromisos en algunos módulos horarios, suponga que esta información se registra en el siguiente parámetro:

$$\beta_{md} = \begin{cases} 1 & \text{si el especialista tiene disponible el módulo } m \text{ del día } d;\ m = 1, 2, ..., 6;\ d = 1, 2, ..., 5 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Se desean escoger dos módulos horarios en la semana para que el especialista atienda a los equipos, de modo de maximizar el número de equipos que tienen libre alguno de estos dos módulos.

a) Formule este problema como un problema de Programación Lineal Entera

b) Suponga ahora que se quiere agregar la restricción de que los dos módulos seleccionados deben estar en días distintos. Formule un modelo para esta nueva situación.

Solución Problema 5.

a) Conjuntos

$$E : \text{equipos},$$
$$M : \text{módulos}, \ M = \{1, 2, ..., 6\}$$
$$D : \text{días}, \ D = \{1, 2, ..., 5\}$$

Variables

$$x_{md} = \begin{cases} 1 & \text{Si se utiliza el módulo } m \text{ del día } d \text{ para atender equipos; } m \in M, d \in D \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el equipo } i \text{ puede asistir a algún horario de atención, } i \in E \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

El modelo corresponde a:

$$P: \qquad \text{máx} \qquad \sum_{i \in E} y_i$$

s.a.

$$\begin{array}{ccccc} x_{md} & \leq & \beta_{md} & \forall m \in M, d \in D \\ \sum_{m \in M} \sum_{d \in D} \alpha_{md} x_{md} & \geq & y_i & \forall i \in E \\ \sum_{m \in M} \sum_{d \in D} x_{md} & = & 2 & \\ x_{md} \in \{0, 1\} & & & \forall m \in M, d \in D \\ y_i \in \{0, 1\} & & & \forall i \in E \end{array}$$

b) Para evitar que los horarios de atención sean el mismo día, se debe agregar la siguiente restricción:

$$\sum_{m \in M} x_{md} \leq 1 \qquad \forall d \in D$$