FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Industrias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Curso: Optimización
Semestre: Primavera 2010
Profesor: Alejandro Cataldo C.
Auxiliar: Mauricio Varas V.

Interrogación 1

Duración: 3 horas.

Cada pregunta será evaluada con una nota entre 1.0 y 7.0. La prueba cuenta con una ponderación total de 110 %. No se permite el uso de calculadora o celulares de ningún tipo.

Pregunta 1 (40 %)

Cada una de las cinco partes de esta pregunta vale lo mismo, y es independiente de las otras. La nota de la pregunta se obtendrá considerando sólo las 4 mejores notas de las 5 partes de la pregunta.

Parte A

Considere el siguiente problema de programación lineal con variables continuas.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{máx} & 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 & & & (P) \\
& x_1 + 3x_2 - x_3 & \leq & 7 & (1) \\
& 2x_1 - 2x_2 + x_3 & \geq & 4 & (2) \\
& x_1 + x_2 & \geq & 1 & (3) \\
& x_1 & \geq & 0 & (4) \\
& x_2 & \geq & 0 & (5) \\
& x_3 & \geq & 0 & (6)
\end{array}
$$

i) Utilice alguno de los teoremas de existencia de soluciones óptimas para determinar si el problema (P) admite solución óptima.

ii) Si se agrega al problema (P) la siguiente restricción:

$$-x_2 + x_3 \leq 8$$

el problema de optimización resultante, ¿admite solución óptima? Justifique utilizando alguno de los teoremas de existencia de soluciones óptimas vistos en clases.

Pauta Parte A

i) Veamos una a una las condiciones requeridas por BW:

- ◇ La función objetivo es continua pues es un polinomio.
- ◇ Claramente el espacio de soluciones factibles no es vacío. Basta darse un punto y verificar que cumple. Por ejemplo, el punto $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ cumple simultáneamente con todas las restricciones.
- ◇ Todas las restricciones son del tipo mayor o igual y menor o igual, luego el espacio es cerrado.
- ◇ El espacio es no acotado, puesto que x_3 no lo está (solo esta acotada por $x_3 \geq 0$). Esto se puede observar ya que la restricción (3) no aporta información respecto a x_3, y de (1) y (2) se tiene:

$$
\begin{array}{lcll}
x_1 + 3x_2 & \leq & 7 + x_3 & (1) \\
-2x_1 + 2x_2 & \leq & -4 + x_3 & (2)
\end{array}
$$

Luego, el teorema de BW no sirve en este caso. Luego, es necesario utilizar el teorema práctico de la existencia de soluciones óptimas de la programación lineal. Para ello, resta demostrar que la función

objetivo si está acotada, en este caso, acotada por arriba. Para esto multiplicamos la restricción (1) por 3 y consideramos la naturaleza de x_1 y x_2:

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 \leq 21 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 21 \geq 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = (2x_1 + 5x_2 - 3x_3) + x_2 + 4x_2 \geq 2x_1 + 5x_2 - 3x_3$$

Luego, se demuestra que la función objetivo del problema está acotada por arriba, pues 21 es una cota. Entonces, por el teorema práctico de la existencia de soluciones de la programación lineal se ha demostrado que el problema si admite solución óptima.

ii) Si agregamos una restricción a un problema que ya admite solución este problema seguirá admitiendo solución, siempre y cuando siga teniendo un espacio de soluciones factibles no vacío. Por lo tanto, en este caso basta con encontrar un punto que satisfaga las restricciones (1) a (6) y la nueva restricción $-x_2+x_3 \leq 8$. El fácil verificar que el mismo punto anterior $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ cumple simultáneamente con todas las restricciones, luego, el espacio es no vacío, y entonces el problema con la nueva restricción admite soluciones óptimas.

Parte B

Responda brevemente las siguientes preguntas.

i) Si un problema de programación lineal está definido sobre un dominio no acotado, cerrado, no vacío y con función objetivo continua, ¿tiene o no tiene solución óptima?

ii) ¿El criterio de salida del algoritmo Simplex indica la dirección en que se buscará la próxima base?

iii) Si la forma estándar de un problema de optimización lineal en variables continuas se definiese con máximo en lugar de mínimo, ¿qué cambios se deberían realizar en los criterios del algoritmo Simplex?

iv) En un problema de programación lineal en variables continuas, ¿un mínimo local es siempre mínimo global?

Pauta Parte B

i) En este caso, no se puede afirmar que tenga o no soluciones óptimas. Como es no acotado, BW no nos dice nada, y como no tenemos información respecto a si la función objetivo está acotada o no en la dirección que nos interesa, entonces el teorema práctico de existencia de soluciones de la programación lineal tampoco.

ii) No, pues la dirección de movimiento es determinada por el criterio de entrada.

iii) En este caso, el único cambio es sobre el criterio de optimalidad, que cambiaría su condición de optimalidad de $\bar{c}_j \geq 0$ por $\bar{c}_j \leq 0$.

iv) Los problema de programación lineal en variables continuas son convexos, luego, todo mínimo local es siempre mínimo global.

Parte C

Una empresa productora de leche tiene en el mercado I productos. La empresa cuenta con M plantas instaladas y J lugares potenciales para abrir plantas. Además enfrenta una demanda conocida de d_i^t unidades del producto i para el periodo t. Por políticas de la empresa no se maneja inventario para ninguno de los I productos.

La empresa ha construido un modelo de programación mixta que le permita determinar la política de apertura de plantas y los niveles de producción en cada planta para cada periodo. Para ello, han definido las siguientes variables:

$$\begin{array}{rcl} x_j^t & : & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si se instala una nueva planta en el lugar } j \text{ en el periodo } t. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{array}\right. \\ \mathrm{y}_{im}^t & : & \text{cantidad de producto } i \text{ producida en la planta } m \text{ (existente) en el periodo } t. \\ f_{ij}^t & : & \text{cantidad de producto } i \text{ producida en la planta } j \text{ (potencial) en el periodo } t. \end{array}$$

Con esta definición de variables se han construido las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^{I} f_{ij}^t \leq M \cdot \sum_{k=1}^{t} x_j^k \quad \forall j = 1, ..., J;\ t = 1, ..., T. \quad (1)$$

$$\sum_{m=1}^{M} y_{im}^t + \sum_{j=1}^{J} f_{ij}^t \geq d_i^t \quad \forall i = 1, ..., I;\ t = 1, ..., T. \quad (2)$$

Con la información anterior describa detalladamente qué hace cada una de las restricciones antes expuestas. Para ello, describa cada restricción de manera general, y también detallando cada uno de los términos que la componen.

Pauta Parte C

La restricción (1) indica que no se producirá en plantas que no hayan sido construidas. Esto se construye pues el lado izquierdo de la desigualdad contabiliza la cantidad total de productos que se producirán en una planta determinada (digamos j) en un periodo determinado (digamos t). Por otra parte, el lado derecho de la desigualdad funciona como cota superior para este nivel productivo por planta-periodo. Esta cota depende principalmente del termino $\sum_{k=1}^{t} x_j^k$, que cuenta desde el periodo 1 hasta el actual -t- si la planta se ha construido. Esta suma puede tomar dos valores, 0 o 1. Si toma valor 0, esto quiere decir que hasta el periodo t la planta en cuestión no se ha construido. Por otro lado, si toma valor 1, quiere decir que en algún periodo entre 1 y t la planta se construyó, luego, la planta existe y es posible utilizarla.

La restricción (2) asegura la satisfacción de la demanda de cada producto en cada periodo. Para su construcción, el lado izquierdo de la desigualdad contabiliza la producción, tanto en plantas ya existentes como en plantas potenciales. El lado derecho contiene la información de la demanda que debe ser satisfecha para cada producto y en cada periodo.1

Parte D

Considere el siguiente problema de programación lineal con variables continuas.

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & x_1 + 9x_2 & & & (P) \\ & x_1 + \ 3x_2 & \leq & 12 & (1) \\ & 2x_1 + x_2 & \geq & 14 & (2) \\ & x_1 & \geq & 0 & (3) \\ & x_2 & \geq & 0 & (4) \end{array}$$

Un amigo le indica que la solución óptima del problema es $x_1^* = 6$ y $x_2^* = 2$. Utilice el criterio de optimalidad de Simplex para respaldar o desmentir la afirmación de su amigo.

Pauta Parte D

Primero se debe construir la forma estándar del problema. Esta queda:

$$\begin{array}{lrcll} \text{mín} & -x_1 - 9x_2 & & & (P) \\ & x_1 + \ 3x_2 + x_3 & = & 12 & (1) \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 & = & 14 & (2) \\ & x_1 & \geq & 0 & (3) \\ & x_2 & \geq & 0 & (4) \\ & x_3 & \geq & 0 & (5) \\ & x_4 & \geq & 0 & (6) \end{array}$$

Entonces, la solución entregada por el amigo es $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$. Entonces, las variables básicas son x_1 y x_2, mientras que las variables no básicas son x_3 y x_4. Luego, se conocen las matrices B y R en este punto, y son:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

luego, aplicando el criterio de optimalidad:

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}

$$\bar{c_R} = \begin{pmatrix} 17/5 & 6/5 \end{pmatrix}$$

luego, como los costos reducidos de todas las variables no básicas son ≥ 0, se confirma la afirmación del amigo, ya que la solución es óptima.

Parte E

Responda las siguientes preguntas:

i) (3.0 puntos) Sean x_1 y x_2 soluciones óptimas de un problema de programación lineal. Usted sabe que estas soluciones están asociadas a vértices adyacentes del poliedro que define el espacio de soluciones factibles del problema. Demuestre, tal y como se hizo en ayudantía, que cualquier combinación convexa de las soluciones señaladas, también es solución óptima del mismo problema.

ii) (3.0 puntos) Con respecto al algoritmo de Simplex, ¿por qué el criterio de entrada a la base es que el costo reducido de la variable entrante sea negativo? Demuéstrelo tal como se hizo en ayudantía.

Pauta Parte E

i) Si x_1 y x_2 son soluciones óptimas de un problema de programación lineal en variables continuas, entonces verifican que:

$$Ax_1 = \bar{b} \quad \text{y} \quad Ax_2 = \bar{b}$$

y teniendo siempre presente que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Luego, una combinación convexa de x_1 y x_2 es:

$$x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

con $\lambda \in [0, 1]$. Premultiplicando por A se tiene:

$$Ax_3 = A\left[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\right] = \lambda Ax_1 + Ax_2 - \lambda Ax_2 = \lambda\bar{b} + \bar{b} - \lambda\bar{b} = \bar{b}$$

entonces, como se ha demostrado que $Ax_3 = \bar{b}$, x_3 es también solución óptima.

ii) Sea el siguiente problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

luego, definidas las variables básicas (x_B) y las no básicas (x_R), es posible reescribir este problema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_R^T x_R + c_B^T x_B \\ & Bx_B + Rx_r = b \\ & x_R = 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Reordenando términos y premultiplicando por B^{-1} se tiene.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_R^T x_R + c_B^T x_B \\ & B^{-1}Bx_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R \\ & x_R = 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Definiendo $\bar{b} = B^{-1}b$ y $\bar{R} = B^{-1}R$ y reemplazando se tiene.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_R^T x_R + c_B^T x_B \\ & x_B = \bar{b} - \bar{R}x_R \\ & x_R = 0 \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Reemplazando x_B en la función objetivo y x_R en las restricciones se tiene.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_R^T x_R + c_B^T(\bar{b} - \bar{R}x_R) \\ & x_B = \bar{b} \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

Finalmente, agrupando términos en la función objetivo y definiendo $\bar{c_R} = c_R - c_B\bar{R}$ se tiene la forma reducida del problema, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \bar{c_R}^T x_R + c_B^T \bar{b} \\ & x_B = \bar{b} \\ & x_B \geq 0 \end{aligned}$$

el término $c_B^T \bar{b}$ es constante en la función objetivo, luego nos interesa el término $\bar{c_R}^T x_R$. Si recordamos, $x_R = 0$ (por construcción), luego para que nos convenga cambiar de base (y por lo tanto no estar en el óptimo), debe haber al menos una variable no básica que no nos convenga que tenga valor 0. Luego, en este problema reducido, si el costo reducido $\bar{c_R}$ de una variable no básica es negativo, no nos convendrá que esta variable tenga valor 0, y por lo tanto es candidata a entrar a la base para así permitir que su valor deje de ser 0.

Pregunta 2 (25 %)

Los integrantes de una pandilla han decidido volver a las andanzas, y están planificando sus nuevos golpes. Para ello, se han dividido en dos grupos para realizar asaltos semanales. En la planificación de estos atracos se han puesto límites máximos para la cantidad a realizar en cada semana, siendo este límite dos atracos para el grupo 1 y un atraco para el grupo 2. Además, a modo de evitar rencillas dentro de la pandilla, se ha decidido que la diferencia entre los atracos realizados por los grupos no debe ser más que dos (también semanal), y que nunca el grupo 2 realizará más atracos que el grupo 1. Para su funcionamiento la pandilla cuenta con un suministro de siete granadas semanales y su experiencia indica que el grupo 1 requerirá de dos granadas en cada uno de sus atracos y el grupo 2 de tres de ellas. Una vez realizado el atraco, el grupo 1 logra reclutar a dos nuevos integrantes para la pandilla, mientras que el grupo 2 pierde a uno de ellos en la acción kamikaze. Dado lo anterior la pandilla se ha puesto como meta aumentar en al menos un integrante su número durante cada semana. Por último, la intención de la pandilla es maximizar el efecto político de sus actos. Para esto se ha estimado que cada atraco del grupo 1 convertirá a dos políticos, y cada atraco del grupo 2 solamente convertirá a uno.

a) (0.5 puntos) Formule el problema planteado anteriormente.

b) (1.0 punto) Demuestre que el problema planteado en la parte a) admite soluciones óptimas. Para ello aplique el teorema de existencia de soluciones de la programación lineal o utilice el teorema de Bolzano Weirtrass.

c) (1.0 punto) Encuentre gráficamente la solución óptima del problema e indique qué restricciones están activas.

d) (1.0 punto) Indique para qué rangos de la diferencia entre los atracos realizados por cada grupo, la solución óptima encontrada deja de serlo. Además, indique para qué rangos de la diferencia señalada el problema se vuelve infactible.

e) (1.0 punto) Escriba el problema planteado en la parte a) en el formato estándar de Simplex. Determine el vector c^T, la matriz A y el vector b. Determine los valores que toman todas las variables que definió (originales, holguras y excesos) considerando la solución óptima de este problema y las restricciones que están activas.

f) (1.0 punto) ¿Cuántas variables básicas debe tener el problema definido en e)? ¿Qué le parece extraño en cuánto a los valores que encontró en el punto anterior? ¿Por qué se produce esto?

g) (0.5 punto) Suponga que usted está resolviendo este problema mediante Simplex. ¿En qué paso del método se daría cuenta de la existencia del fenómeno que describió en f), y cómo?

Pauta Pregunta 2

a) Para la formulación del problema definimos las variables x_1 como la cantidad de atracos que realizará durante la semana el grupo 1 de la pandilla, y la variable x_2 como la cantidad de atracos que realizará durante la semana el grupo 2 de la pandilla. Con esto, el modelo queda:

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

s.a.

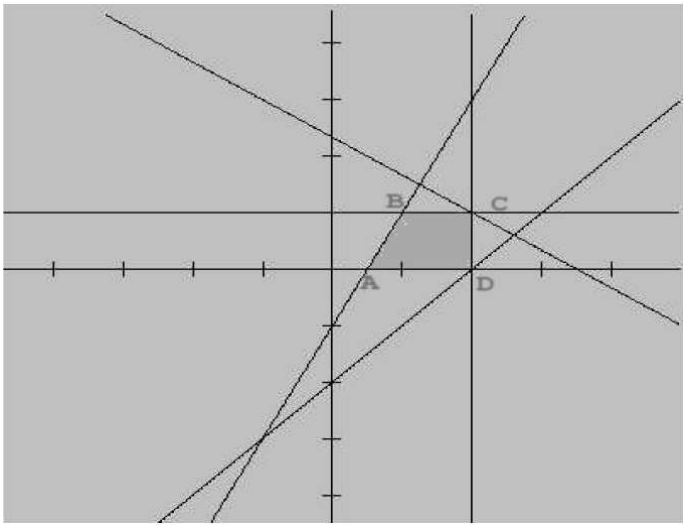
$$\begin{array}{rcll} 2x_1 - x_2 & \geq & 1 & (1) \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 7 & (2) \\ x_1 - x_2 & \leq & 2 & (3) \\ x_1 & \leq & 2 & (4) \\ x_2 & \leq & 1 & (5) \\ x_1 & \geq & 0 & (6) \\ x_2 & \geq & 0 & (7) \end{array}$$

b) Veamos una a una las condiciones requeridas por BW:

- ◇ La función objetivo es continua pues es un polinomio.
- ◇ Claramente el espacio de soluciones factibles no es vacío. Basta darse un punto y verificar que cumple. Por ejemplo, el punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ cumple simultáneamente con todas las restricciones.
- ◇ Todas las restricciones son del tipo mayor o igual y menor o igual, luego el espacio es cerrado.
- ◇ Con las restricciones (4), (5), (6) y (7) se asegura que ambas variables se encuentran acotadas. En este caso, $0 \leq x_1 \leq 2$ y $0 \leq x_2 \leq 1$.

Luego, el teorema de BW asegura que el problema formulado en a) admite solución óptima.

c) La siguiente figura muestra el espacio de soluciones factibles del problema:



Como la función objetivo maximiza una suma ponderada de coeficientes positivos de las variables x_1 y x_2, la solución estará lo más hacia arriba y a la derecha en el espacio de soluciones factibles. Entonces, es fácil ver que la solución óptima es el vértice C, cuyas coordenadas son $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$, con función objetivo de valor 5. Las restricciones (2), (4) y (5) son activas en el óptimo.

d) Para cambiar la solución óptima al modificar la restricción (3), es necesario que ésta corte del espacio de soluciones factibles al punto extremo B, luego, para que esto suceda la restricción debe quedar de la siguiente forma:

$$x_1 - x_2 < 1 \ \ (3a)$$

Luego, para que la solución óptima deje de serlo, es necesario que b_3 sea estrictamente menor que 1, con lo cual la recta se desplaza hacia arriba y a la izquierda cortando del espacio de soluciones factibles el punto B.

El problema se vuelve infactible cuando las restricciones no pueden delimitar un espacio de soluciones factibles, o sea, no existe ningún punto que pueda satisfacer todas las restricciones. En el gráfico 3 se puede apreciar que para que esto pase, la restricción (3) debe desplazarse hacia arriba y hacia la izquierda hasta sobrepasar el punto extremo B, y por lo tanto, la restricción debe quedar de la siguiente forma:

$$x_1 - x_2 < 0 \ \ (3b)$$

Con lo cual la diferencia entre la cantidad de atracos realizados por cada grupo (b_3) debe ser menor estricto que 0.

e) (1.0 punto) Escriba el problema planteado en la parte a) en el formato estándar de Simplex. Determine el vector c^T, la matriz A y el vector b. Determine los valores que toman todas las variables que definió (originales, holguras y excesos) considerando la solución óptima de este problema y las restricciones que están activas.

$$\text{Min } z = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$s.a.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A partir de la solución óptima y el sistema estandarizado anterior, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f) De la forma estándar tenemos un sistema de ecuaciones con 7 variables y 5 restricciones. Luego, la base tiene que tener 5 variables ($x_B \geq 0$), y las otras 2 son no básicas ($x_R = 0$). De los valores anteriores se observa que 3 variables toman valor 0 ($x_4, x_6 x_7$). Lo extraño de esto es que bastan 2 que tomen valor 0 para determinar las variables no básicas. Esto sucede cuando el vértice se encuentra sobredeterminado.

g) El algoritmo Simplex nos muestra este fenómeno al momento de determinar la variable que debe abandonar la base. Esto se aprecia cuando en la aplicación del criterio se produce un empate, y cualquiera entre 2 o más variables puede ser escogida para abandonar la base.

Pregunta 3 (45 %)

El rey de Constantinopla y usted han acordado la realización de un torneo en que se correrán Q carreras de caballos. En cada una de estas carreras deberá competir un caballo del rey y uno suyo, no permitiéndose que un caballo corra dos o más carreras. El rey, confiado en la capacidad de sus caballos, le ha dejado a usted la libertad para definir qué caballos de él competirán contra qué caballos suyos.

Para poder realizar este "emparejamiento", usted ha construido los conjuntos R -donde listó los Q caballos del rey- y U -donde listó sus Q caballos-. Además, y gracias a sus años de experiencia en competencias de este tipo, usted ha podido construir el parámetro C_r que indica la capacidad corredora del caballo r del rey, y el parámetro W_u que indica la capacidad corredora de su caballo u. Usted tiene completa certeza de que el ganador de cada carrera será el caballo que tenga la mayor capacidad corredora de entre los dos que compiten. En caso de que la capacidad corredora de ambos caballos sea la misma, la carrera se empatará, con lo cual no se considerará ganada ni perdida, tanto para el rey como para usted. Adicionalmente, sabe que si su caballo u gana la carrera en que participa usted recibirá G_u monedas de oro, pero si pierde o empata, usted deberá cancelar P_u.

Por último, usted ha averiguado que el rey tiene por norma volver a invitar para el año siguiente a aquellos competidores que no le ganen más de B_2 carreras, pero que no pierdan más de B_1 de las carreras programadas.

a) (4.0 puntos) Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal que le permita determinar el "emparejamiento" adecuado para conseguir la mayor cantidad de monedas de oro del torneo, y que asegure su participación en el torneo del próximo año.

b) (1.0 punto) Cómo se modifica el modelo propuesto en la parte a) si los empates se cuentan como media carrera ganada y media carrera perdida.

c) (1.0 punto) Cómo modificaría el problema de la parte a) si adicional a las ganancias ya descritas, usted gana H_r monedas de oro si vence al caballo r del rey, y debe pagar D_r si pierde o empata con este mismo caballo.

Pauta Pregunta 3

a) Las variables de decisión de este modelo son:

$$x_{ru} \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si caballo } r \text{ del rey compite con su caballo } u \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

$$y_u \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si su caballo } u \text{ gana su carrera} \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

$$z_u \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si su caballo } u \text{ pierde su carrera} \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

Para las restricciones es importante destacar que es posible, dependiendo del modelamiento, que la información C_r y W_u se puede manejar en parámetros f_{ru} y H_{ru} definidos como sigue:

$$F_{ru} \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si capacidad de caballo del rey } r \text{ es menor que la su caballo } u \ (C_r < W_u) \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

$$S_{ru} \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si capacidad de caballo del rey } r \text{ es mayor que la su caballo } u \ (C_r > W_u) \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

Las restricciones asociadas al problema son:

(I) Todo caballo suyo debe competir en exactamente una carrera.

$$\sum_{r \in R} x_{ru} = 1 \qquad \forall\ u \in U.$$

(II) Todo caballo del rey debe competir en exactamente una carrera.

$$\sum_{u \in U} x_{ru} = 1 \qquad \forall\ r \in R.$$

(III) Construir la variable que indica si el caballo u gana.

$$\sum_{r \in R : C_r < W_u} x_{ru} = y_u \qquad \forall\ u \in U.$$

o con la utilización de los parámetros definidos:

$$\sum_{r \in R} F_{ru} x_{ru} = y_u \qquad \forall\ u \in U.$$

(IV) Construir la variable que indica si el caballo u pierde.

$$\sum_{r \in R: C_r > W_u} x_{ru} = z_u \qquad \forall\ u \in U.$$

o con la utilización de los parámetros definidos:

$$\sum_{r \in R} S_{ru} x_{ru} = z_u \qquad \forall\ u \in U.$$

(V) Condicionar máximo de carreras perdidas.

$$\sum_{u \in U} z_u \leq B_1$$

(VI) Condicionar máximo de carreras ganadas.

$$\sum_{u \in U} y_u \leq B_2$$

(VII) Naturaleza de las variables.

$$\begin{array}{rcll} x_{ru} & \in & \{0,1\} & \forall r \in R; u \in U. \\ y_u & \in & \{0,1\} & \forall u \in U. \\ z_u & \in & \{0,1\} & \forall u \in U. \end{array}$$

Función Objetivo:

$$\text{Máx Monedas de Oro} = \sum_{u \in U} G_u y_u - \sum_{u \in U} P_u (1 - y_u)$$

b) En este caso, las restricciones (v) y (vi) se deben modificar, quedando:

(v) Condicionar máximo de carreras perdidas.

$$\sum_{u \in U} z_u + \left(\frac{Q - \sum\limits_{u \in U} z_u - \sum\limits_{u \in U} y_u}{2} \right) \leq B_1$$

(vi) Condicionar máximo de carreras ganadas.

$$\sum_{u \in U} y_u + \left(\frac{Q - \sum\limits_{u \in U} z_u - \sum\limits_{u \in U} y_u}{2} \right) \leq B_2$$

c) En este caso, se debe definir una variable binaria que indique si el caballo r del rey gana o no gana (pierde o empata) una carrera. Esta variable es:

$$\alpha_r \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si le gano al caballo } r \text{ del rey} \\ 0 \text{ sino} \end{cases}$$

se debe agregar la restricción que indica si le gano al caballo r del rey, quedando:

$$\sum_{u \in U: C_r < W_u} x_{ru} = \alpha_r \qquad \forall\ r \in R.$$

o con la utilización de los parámetros definidos:

$$\sum_{u \in U} F_{ru} x_{ru} = \alpha_r \qquad \forall\ r \in R.$$

y la restricción de la naturaleza de la nueva variable, que queda:

$$\alpha_r \quad \in \quad \{0,1\} \qquad \forall r \in R.$$

Finalmente, la función objetivo también se modifica quedando:

$$\text{Máx Monedas de Oro} = \sum_{u \in U} G_u y_u - \sum_{u \in U} P_u (1 - y_u) + \sum_{r \in R} H_r \alpha_r - \sum_{r \in R} D_r (1 - \alpha_r)$$