PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2021 - 1
Profesores: G. Angulo - R. Cuadrado
J. González - S. Vásquez
F. Verástegui

Interrogación 2

Duración: 150 minutos.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (20 puntos)

(a) **(5 puntos)** Sea (P) $\min\{c^\top x : \ Ax \geq b\}$ un problema lineal factible. Demuestre que si (P) tiene soluciones factibles con valores objetivos v_1 y v_2, donde $v_1 < v_2$, entonces (P) tiene solución factible con valor objetivo $\bar{v}$ para todo $\bar{v} \in [v_1, v_2]$.

Solución: Sean x_1, x_2 factibles tales que $v_1 = c^\top x_1$ y $v_2 = c^\top x_2$. Dado $\bar{v} \in [v_1, v_2]$, sea $\lambda \in [0,1]$ tal que $\bar{v} = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$. Tomando $\bar{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, por la convexidad de la región factible, tenemos que $\bar{x}$ es factible. Más aún, $c^\top \bar{x} = c^\top(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 = \bar{v}$.

(b) **(3 puntos)** Suponga que al tratar de resolver el problema (P) $\min\{c^\top x : \ Ax \geq b\}$, detectó que existe $r \neq 0$ tal que $Ar \geq 0$ y $c^\top r < 0$. Explique por qué (P) no puede tener solución óptima.

Solución: Si (P) es infactible, entonces claramente no tiene solución óptima. Si (P) es factible, las condiciones sobre r implican que (P) es no acotado, por lo que tampoco tiene solución óptima.

(c) **(4 puntos)** Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq 0\}$.

(i) **(2 puntos)** Demuestre que si $\bar{x} \in P$ es tal que $\bar{x} \neq 0$, entonces $\bar{x}$ no es vértice de P.
Solución: Notemos que el origen y $2\bar{x}$ pertenecen a P. Luego, $\bar{x}$ es el promedio de dos vectores distintos pertenecientes a P, y por lo tanto no puede ser vértice.

(ii) **(2 puntos)** ¿Es verdad que $x = 0$ es necesariamente vértice de P? Demuestre o refute con un contraejemplo.
Solución: No necesariamente. Por ejemplo, tomando $P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq 0\}$, vemos que el origen no es vértice de P.

(d) **(4 puntos)** Sean $v_1 = \min\{c^\top x : \ Ax \geq b, \ c^\top x \geq d\}$ y $v_2 = \min\{0 : \ Ax \geq b, \ c^\top x \leq d\}$. Sin necesidad de justificar, indique qué combinaciones restantes en la tabla siguiente son posibles y cuáles no:

	$v_2 = -\infty$	$v_2 \in \mathbb{R}$	$v_2 = +\infty$
$v_1 = -\infty$			
$v_1 \in \mathbb{R}$		Sí	
$v_1 = +\infty$			

Solución:

	$v_2 = -\infty$	$v_2 \in \mathbb{R}$	$v_2 = +\infty$
$v_1 = -\infty$	No	No	No
$v_1 \in \mathbb{R}$	No	Sí	Sí
$v_1 = +\infty$	No	Sí	Sí

(e) **(4 puntos)** Considere el siguiente extracto de código de Python/Gurobi:

```
m = Model()
z = m.addVars(range(n))
r = m.addConstrs(sum(a[i,j]*z[j] for j in range(n)) == b[i] for i in range(k))
m.setObjective(sum(c[j]*z[j] for j in range(n)))
m.optimize()
```

Suponga que Gurobi determina que el problema tiene solución óptima. Indique instrucciones adicionales que le permitan, imprimiendo en pantalla, corroborar el cumplimiento del teorema de holgura complementaria.

Solución:

```
for j in range(n):
    print(z[j].x*(sum(a[i,j]*r[i].pi for i in range(k))-c[j]))
```

Pregunta 2 (20 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad \text{máx} \quad & -4x_1 - 2x_2 - x_3 && (1)\\
\text{s.a.} \quad & -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -3 && (2)\\
& -4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -4 && (3)\\
& x_1 + x_2 - 4x_3 \leq \ \ 2 && (4)\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

(i) **(2 puntos)** Demuestre que el origen en $\mathbb{R}^3$ es infactible para (P) y factible para su dual (D).

(ii) **(4 puntos)** A partir del origen como solución dual factible y utilizando el método Simplex, verifique que al hacer un solo cambio de base sobre (D), no se alcanza la solución óptima. Para ello, le puede ser de utilidad la siguiente información:

$$
\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix},
$$

Regla de Bland: Si para alguna iteración del método Simplex encuentra más de una variable x_i con costo reducido negativo, ingrese aquella con menor índice i.

(iii) **(4 puntos)** La solución óptima de (D) corresponde al vector $[9/2, 0, 5/2]$. A partir de este hecho, obtenga la solución óptima de (P).

(iv) **(4 puntos)** Asumiendo que usted puede aumentar localmente sólo uno de los coeficientes del vector lado derecho del problema (P), ¿Cuál preferiría aumentar? ¿Por qué?.

(v) **(4 puntos)** Considere el problema (P') construido a partir de (P), cambiando la función objetivo por $4x_1 - 2x_2 - x_3$. Muestre que (P') es no acotado.

(vi) **(2 puntos)** Basándose en el resultado de (v), muestre que el siguiente sistema es infactible:

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + x_3 &\geq 4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq -2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &\geq -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

(i) El origen (vector nulo) no es primal factible, pues al evaluar en (2), se tiene que

$$0 \leq -3.$$

Por otro lado, el problema dual (D) de (P) es

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad \text{mín} \quad & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\ s.a. \quad & -y_1 - 4y_2 + y_3 \geq -4 \\ & -y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -2 \\ & 2y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0, \end{aligned}$$

para el cual el vector nulo satisface todas las restricciones:

$$0 \geq -4, \ 0 \geq -2, \ 0 \geq -1, \ 0 \geq 0.$$

(ii) El problema dual, escrito en forma estandar, incorporando variables de holgura y_4, y_5 e y_6, corresponde a:

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad \text{mín} \quad & -3y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\ s.a. \quad & -y_1 - 4y_2 + y_3 - y_4 = -4 \\ & -y_1 - 2y_2 + y_3 - y_5 = -2 \\ & 2y_1 + y_2 - 4y_3 - y_6 = -1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{aligned}$$

El punto obtenido en la pregunta (ii) corresponde al vector $(y_1, y_2, y3) = (0, 0, 0)$, es decir, al origen en el espacio dual.

La base asociada a este punto (y por lo tanto, la base inicial para el algoritmo), corresponde a las variables de holgura, i.e., $B_0 = \{4, 5, 6\}$. Primero, verificamos la factibilidad de la solución básica:

$$A_B = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y_B = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Calculando los costos reducidos:

$$\overline{c}_N = c_N - \left[c_B^\top A_B^{-1} A_N \right]^\top = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En este caso, tenemos dos variables con costo reducido negativo en un problema de minimización. Haremos que ingrese y_1 a la base según la regla de Bland. Aplicando el test de razón mínima:

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{mín} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{A}_{i1}} : \overline{A}_{i1} > 0 \right\} = 2,$$

con lo que y_1 ingresa a la base, con valor de 2. Por otro lado, y_5 se hace 0, y sale de la base. Con todo, la nueva base corresponde a $B_1 = \{1, 4, 6\}$. Nuestra nueva solución básica factible corresponde al siguiente punto:

$$y_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_4 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La submatríz básica y su inversa corresponden respectivamente a:

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando los costos reducidos:

$$\overline{c}_N = c_N - \left[c_B^\top A_B^{-1} A_N \right]^\top = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dado que el costo reducido de la variable no básica y_3 es negativo, se verifica que con un solo cambio de base la solución alcanzada no es óptima.

(iii) El vector de las variables duales óptimas, incorporando variables de holgura, corresponde a:

$$y^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ 5/2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

Por Teorema de Holguras Complementarias, sabemos que la primera y tercera restricción del problema primal (P) se deben cumplir en forma de igualdad. Esto es:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Además, en el problema dual, la variable de holgura y_4 es mayor a cero. Esto implica que la restricción asociada a dicha variable de holgura dual no se cumple como igualdad, y por lo tanto, la variable primal asociada debe ser 0. En este caso, dicha variable es x_1.

$$x_1 = 0$$

Con lo anterior, llegamos al siguiente sistema de dos variables y dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &= -3 \\ x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, encontramos la solución óptima del problema primal, correspondiente a:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(iv) De la pregunta anterior, sabemos que el vector de variables duales óptimas corresponde a:

$$y^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Por los desarrollos de análisis de sensibilidad, sabemos que y_1, y_2 e y_3 corresponden al precio sombra de las restricciones del problema primal, que llamaremos respectivamente R_1, R_2, R_3.

Por inspección, podemos ver que $\text{máx}\{y_1^*, y_2^*, y_3^*\} = y_1^*$. Esto implica que aumentar el lado derecho de R_1 resultaría en un mayor aumento en la función objetivo que un aumento equivalente en R_2 o R_3.

Luego, la respuesta es que es preferible aumentar el lado derecho de R_1, porque en el óptimo, la variable dual asociada a dicha restricción toma el valor más positivo entre todas las variables duales.

(v) El problema (P') es

$$\begin{aligned}
\text{(P')} \quad \text{máx} \quad & c'^{\top} x = 4x_1 - 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} \quad & -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -3 \\
& -4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -4 \\
& x_1 + x_2 - 4x_3 \leq \quad 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

El cono de recesión asociado al poliedro Q que define el dominio de (P') es

$$\text{rec(Q)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3_+ : \begin{array}{r} -x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 0 \end{array} \right\}.$$

El punto $r^{\top} = (4, 0, 1)$ pertenece a rec(Q), por lo que Q es no acotado. Además, este punto es tal que $c'^{\top} r = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 > 0$, por lo que (P') es no acotado.

(vi) El sistema corresponde a las restricciones del problema dual (D') de (P'). Luego, dado que (P') es no acotado, (D') es infactible. Esto implica que no existe solución que satisfaga el sistema, por lo que es infactible.

Pregunta 3 (20 puntos)

En un cierto canal de televisión, le contratan a usted para que les ayude a realizar la programación de un día completo respetando ciertas condiciones. Suponga que el día puede dividirse en T bloques horarios, y en cada uno se debe decidir qué se transmitirá.

Se sabe que en cada bloque se puede decidir mostrar algún programa grabado con anterioridad (listados en el conjunto I_a), o bien un programa en vivo (listados en el conjunto I_v). Sea $I = I_a \cup I_v$. Los programas grabados con anterioridad se pueden transmitir en cualquier momento del día, y todos tienen una duración de un bloque. Sin embargo, los programas en vivo solo se pueden transmitir a una hora específica (ya que corresponden a eventos que están ocurriendo en tiempo real). El parámetro binario d_{it} indica si el programa en vivo i puede ser transmitido en el bloque t o no. Asuma que un programa en vivo puede durar más de un bloque, y son siempre bloques seguidos. Si se decide transmitir el programa en vivo i, se debe hacer de forma completa usando todos los bloques señalados en el parámetro d_{it} igual a 1.

Otro de los aspectos que debe decidir es la cantidad de publicidad a mostrar en cada bloque, medido en porcentaje del total de la duración del bloque. Existe una lista J de avisos publicitarios que pueden mostrarse durante el día. Además, usted sabe que el parámetro b_{jt} indica el beneficio económico marginal por cada unidad porcentual del bloque t que está cubierto por la publicidad j. No obstante, durante la transmisión de los programas en vivo, no se pueden mostrar avisos publicitarios.

Por último, la realización de cada programa en vivo i tiene un costo c_i^v por cada bloque que dure el programa. A su vez los programas grabados con anterioridad tienen un costo de c_i^a por bloque transmitido. Cada bloque con este tipo de programa puede tener hasta una cierta fracción del total del bloque con publicidad, medido con el parámetro $p \in (0, 1)$. Se le exige que el ingreso por publicidad alcance a cubrir el costo del día.

(a) **(16 puntos)** Formule un problema de programación lineal entero mixto que maximice el atractivo total del canal. Para esto, cada programa grabado $i \in I_a$ tiene un atractivo α_{it} si se está transmitiendo en el bloque t, mientras que un programa en vivo $i \in I_v$ tiene un atractivo

de β_i si se transmite, independiente de su duración. Además, por cada punto porcentual de publicidad j en un bloque t se pierde atractivo del canal medido en el parámetro γ_{jt}.

(b) **(4 puntos)** Dado el esfuerzo que se debe hacer para la emisión de los programa en vivo, los productores del canal le solicitan que existan al menos dos bloques de diferencia entre cada programa en vivo que se decida realizar. Agregue las modificaciones necesarias a su modelo para que se pueda abordar esta consideración.

Solución:

Se otorga 2 puntos por cada variable (junto con su naturaleza), 2.5 por la función objetivo y 1.5 por cada set de restricciones.

Variables:

- x_{it}: 1 si se decide transmitir el programa $i \in I$ en el bloque $t \in \{1, ..., T\}$.
- y_i: 1 si se decide transmitir el programa en vivo $i \in I_v$.
- z_{jt}: porcentaje del bloque $t \in \{1, ..., T\}$ que se ocupa con publicidad del aviso $j \in J$.

Función Objetivo: Maximizar el atractivo total del canal, que corresponde a lo que se gana con cada programa que se transmite menos lo que se pierde por dar publicidad.

$$\text{máx} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in I_a} \alpha_{it} x_{it} + \sum_{i \in I_v} \beta_i y_i - \sum_{t=1}^{T} \sum_{j \in J} \gamma_{jt} z_{jt}$$

Restricciones:

(a) Debe transmitirse exactamente un programa en cada bloque.

$$\sum_{i \in I} x_{it} = 1 \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

(b) Si se transmite un programa en vivo, se debe hacer solo cuando corresponde.

$$x_{it} \leq d_{it} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, i \in I_v$$

(c) Si se transmite un programa en vivo, se debe hacer de forma completa.

$$y_i * d_{it} \leq x_{it} \qquad \forall i \in I_v, t \in \{1, ..., T\}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leq y_i * M \qquad \forall i \in I_v$$

* El M grande puede ser un valor conveniente, como $\sum_{t=1}^{T} d_{it}$.

(d) Restricciones de publicidad según el tipo de programa.

$$\sum_{j \in J} z_{jt} \leq p(1 - \sum_{i \in I_v} x_{it}) \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

(e) La programación del día debe tener un saldo económico no negativo.

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j\in J} b_{jt}z_{jt} \geq \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in I_a} c_i^a x_{it} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i\in I_v} c_i^v x_{it}$$

(f) Naturaleza de variables

$$0 \leq z_{jt} \leq 1 \qquad \forall t \in \{1,...,T\}, j \in J$$
$$x_{it} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I, t \in \{1,...,T\}$$
$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I_v$$

Sobre el uso de la variable z_jt: el beneficio económico (b_{jt}) utilizado en la restricción (e) y la pérdida de atractivo (γ_{jt}) utilizado en la función objetivo, se podía interpretar como una multiplicación directa por la variable o bien que se debía multiplicar por 100 para reflejar cada punto porcentual. Ambas opciones se aceptan para la corrección.

Para incorporar la diferencia de dos bloques entre programas en vivo, se toma en consideración lo siguiente.

$$x_{it} + x_{k,t+1} \leq 1 \qquad \forall t \in \{1,...,T-1\}, \quad i,k \in I_v : i \neq k$$
$$x_{it} + x_{k,t+2} \leq 1 \qquad \forall t \in \{1,...,T-2\}, \quad i,k \in I_v : i \neq k$$

Tabla conversión Primal-Dual

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas