PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2019
Profesores: M. Klapp - R. Cuadrado
A. Cataldo - J. González
P. Guajardo

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: 22 de marzo

La Tarea tiene un total de 5 preguntas. Esta será evaluada corrigiendo dos preguntas que serán seleccionadas por el equipo docente después de la entrega. Cada pregunta valdrá 3 puntos. Sin embargo, el grupo tendrá disponible la solución de toda la Tarea después de la fecha de entrega.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cinco preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cinco grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 22 de marzo a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1.

A un ingeniero se le encarga decidir dónde localizar los hospitales de un pueblo. Este pueblo está dividido en un conjunto Z de zonas con h_z habitantes potenciales cada una. Suponga que los hospitales sólo se pueden construir en el subconjunto A específico de zonas (con $A \subset Z$). Asuma que no se puede construir más de un hospital por zona y que cada zona que no cuente con un hospital debe ser asignada a un hospital de otra zona. De esta forma, las personas que no cuenten con un hospital en su zona deben ir al hospital asignado a su zona. Se conoce la distancia entre todas las zonas, siendo d_{za} la distancia entre las zonas z y a, para $z, a \in Z$.

Construir un hospital en a tiene un costo fijo de c_a pesos, para cada $a \in A$. Además, existe un costo igual a f pesos por cada persona que está asignada a un hospital. Cada zona cuenta con un presupuesto de p_z para cubrir los gastos en que se incurre en esa zona. Ahora bien, en caso de que no se construya un hospital en una zona, el presupuesto de esta zona se utilizará para cubrir los gastos de la zona a la que es asignada su población.

Al revisar la información anterior, usted se percata de que la descripción del problema está incompleta, pero el ingeniero a cargo tuvo que salir una semana de la ciudad por lo que no puede consultarle a él sus dudas. Sin embargo, revisando el plan del ingeniero, usted se encontró con el siguiente modelo de programación matemática que le podría ayudar a entender de mejor manera el problema incompletamente descrito.

Variables:

$$y_a = \begin{cases} 1 & \text{si se construye un hospital en la zona } a,\ a \in A \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$x_{az} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna la zona } z \text{ al hospital en la zona } a, \text{ con } z \in Z \text{ y } a \in A \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín}\, w$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \sum_{a \in A} x_{az} = 1, && \forall z \in Z, \\
&2) \quad y_a \geq x_{az}, && \forall a \in A, z \in Z \\
&3) \quad c_a y_a + f s_a \leq \sum_{z \in Z} p_z x_{az}, && \forall a \in A \\
&4) \quad w \geq x_{az} d_{za}, && \forall a \in A, z \in Z \\
&5) \quad s_a = \sum_{z \in Z} x_{az} h_z, && \forall a \in A \\
&6) \quad x_{az} \in \{0, 1\}, && \forall z \in Z, a \in A \\
&7) \quad y_a \in \{0, 1\}, && \forall a \in A
\end{aligned}$$

Basándose en la información entregada (descripción del problema y modelo), responda las siguientes preguntas que le permitirán entender mejor el problema que enfrenta la administración de la ciudad.

a) En el modelo anterior hay variables no declaradas: s_a, $\forall a \in A$, y w. Defina estas variables tal como se ha hecho con x e y.

b) ¿Qué representa la función objetivo del problema?

c) Explique en una frase qué modela cada restricción.

Solución Problema 1.

a) Las definición de variables es la siguiente

$$\begin{aligned} s_a = &\text{ Cantidad de personas asignadas al hospital de la zona } a \text{ con } a \in A \\ w = &\text{ Máxima distancia entre un hospital y alguna zona asignada a este} \end{aligned}$$

La naturaleza de estas variables corresponde a

$$\begin{aligned} &8) \quad s_a \in \mathbb{Z}_0^+, && \forall a \in A \\ &9) \quad w \geq 0 \end{aligned}$$

b) El objetivo del problema es que la distancia entre cada zona y su hospital asignado sea la mínima posible.

c) 1) Cada zona debe tener asignado solo un hospital
2) Se construye un hospital en la zona a, $a \in A$ solo si este es asignado a alguna zona z, $z \in Z$
3) Se debe respetar el presupuesto por zona
4) Establecer la máxima distancia (variable w) entre una zona y el hospital al que está asignada
5) Establecer la cantidad de gente que atenderá cada hospital

6) y 7) Naturaleza de las variables x_{az} e y_a

Problema 2.

Considere un problema de modelación que posee las siguientes variables:

- $y_i \in \{0,1\}$, $\forall\ i \in \{1,\ldots,m\}$
- $z \in \{0,1\}$.
- $x_{ijt} \in \{0,1\}$, $\forall\ i \in \{1,\ldots,m\}$, $\forall\ j \in \{1,\ldots,J\}$, $\forall\ t \in \{1,\ldots,T\}$
- $r_i \leq k, r_i \in \mathbb{Z}_0^+$, $\forall\ i \in \{1,\ldots,m\}$

Para cada uno de los siguientes casos construya un conjunto de restricciones lineales que modelen las siguientes situaciones:

(a) Conjunción (Y)

(I) $z = 1 \iff y_1 = 1 \wedge y_2 = 1$

(II) $z = 1 \iff y_1 = 1 \wedge y_2 = 1 \wedge \cdots \wedge y_m = 1$

(b) Disyunción (O INCLUSIVO)

(I) $z = 1 \iff y_1 = 1 \vee y_2 = 1$

(II) $z = 1 \iff y_1 = 1 \vee y_2 = 1 \vee \cdots \vee y_m = 1$

(c) Disyunción exclusiva (O EXCLUSIVO)

(I) $z = 1 \iff y_1 = 1 \veebar y_2 = 1$

(II) $z = 1 \iff y_1 = 1 \veebar y_2 = 1 \veebar \cdots \veebar y_m = 1$, para m par

(d) Multiplicación de variables

(I) Variable a_i que represente $a_i = y_i \cdot z$, $\forall i = 1, ..., m$

(II) Variable w_{ijt} que represente $w_{ijt} = x_{ijt} \cdot r_i$, $\forall i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., J$, $t = 1, ..., T$

Solución Problema 2.

(a) (I)
$z \leq y_1$
$z \leq y_2$
$y_1 + y_2 \leq z + 1$

(II)
$z \leq y_i\ \forall i = 1, .., m$
$\sum_{i=1}^{m} y_i \leq z + m - 1$

(b) (I)
$y_1 \leq z$
$y_2 \leq z$
$z \leq y_1 + y_2$

(II)
$y_i \leq z\ \forall i = 1, \ldots, m$
$z \leq \sum_{i=1}^{m} y_i$

(c) (I)
$z \leq 2 - y_1 - y_2$
$z \leq y_1 + y_2$
$y_1 - y_2 \leq z$
$y_2 - y_1 \leq z$

(II) Nota: El conjunto potencia de un conjunto es otro conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto dado. Por ejemplo, sea $A = \{1, 2, 3\}$. El conjunto potencia es:

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

.

$$1) \quad z \geq -(p-1) + \sum_{i \in P} y_i - \sum_{j \notin P} y_j, \quad \forall\, p \in \{1, 3, \ldots, 2\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1\}, \forall\, P \in \mathcal{P}([0,m])\ tq\ |P| = p$$

$$2) \quad z \leq k - \sum_{i \in P} y_i + \sum_{j \notin P} y_j, \qquad \forall\, k \in \{0, 2, \ldots, 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}, \forall\, P \in \mathcal{P}([0,m])\ tq\ |P| = k$$

(d) (I) $a_i \leq \frac{y_i + z_i}{2}$
$y_i - (1 - z_i)M \leq a_i$

(II) $w_{ijt} \leq x_{ijt} k$
$w_{ijt} \leq r_i$
$r_i - (1 - x_{ijt})k \leq w_{ijt}$

Problema 3.

Isabel está organizando una liga de fútbol femenino a jugarse el primer semestre del 2019. La liga consiste en dos torneos (uno por división), todos contra todos, con partidos de ida y vuelta.

En la división principiante hay 12 equipos inscritos. Los cinco primeros lugares del torneo principiante avanzarán a la división amateur para el siguiente semestre y los últimos 5 del torneo amateur bajan a la división principiante. El sistema de puntajes del torneo es el tradicional, es decir, 3 puntos para el equipo ganador del partido y 1 punto para cada equipo en caso de empate. Si al finalizar el semestre 2 equipos tienen el mismo puntaje total, se define la posición de acuerdo a la diferencia de goles.

a) La hermana de Isabel, Alejandra, competirá en la división de principiantes con su equipo El Huevo F.C. Este equipo ha quedado fuera de la división amateur por pocos puntos en los últimos 2 semestres. Formule un problema de programación lineal entera que permita a Alejandra saber cuál es el puntaje máximo con el que su equipo no avanzaría a la división amateur.
HINT: Asigne todos los resultados posibles a todos los partidos entre los equipos participantes.

b) Suponga ahora que en su primer partido, El Huevo F.C. venció al equipo Goleadoras F.C. Edite el modelo de la parte *a*) para incluir este resultado. Además, indique su edición si el resultado hubiese sido un empate o una derrota.

c) Luego de la primera fecha (parte *b*)), tras vencer al equipo Goleadoras F.C., Alejandra le pregunta a Isabel con cuántos puntos tendría asegurada la clasificación a la liga amateur (Isabel tiene resuelto el modelo de la parte *b*)). Explique cómo con este resultado ella puede responder a la pregunta de Alejandra.

Solución Problema 3.

a) Conjuntos

$$I : \text{equipos},\ I = \{1, ..., 12\}$$

Sea El Huevo F.C el equipo 1, es decir, $i = 1$, con $i \in I$

Variables

$$x_{ij} = \text{número de partidos que el equipo } i \text{ le gana al equipo } j,\ \forall i, j = 1, ..., 12$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el equipo } i \text{ tiene los mismos o más puntos que El Huevo F.C. } \forall i = 2, ..., 12 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$p_i = \text{cantidad de puntos que tiene el equipo } i, \forall i = 1, ..., 12$$

Función Objetivo

$$Max\ p_1$$

Restricciones

1) Combinación de posibles resultados

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 2, \qquad \forall i, j = 1, ..., 12,$$

$$x_{ii} = 0, \qquad \forall i = 1, ..., 12,$$

2) El Huevo F.C. queda eliminado

$$\sum_{i=2}^{12} y_i \geq 5,$$

3) Cálculo de puntos por equipo

$$p_i = 3\sum_{j=1}^{12} x_{ij} + \sum_{j=1}^{12}(2 - x_{ij} - x_{ji}), \qquad \forall i = 1, ..., 12$$

4) Variable y_i toma valor cero o uno cuando corresponde

$$p_i \geq p_1 - M(1 - y_i), \qquad \forall i = 2, ..., 12, M >> 0$$

$$p_i + 1 \leq p_1 + My_i, \qquad \forall i = 2, ..., 12, M >> 0,$$

5) $x_{ij} \in \{0, 1, 2\}, \qquad \forall i, j = 1, ..., 12$

6) $y_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i = 2, ..., 1$

7) $p_i \geq 0, \qquad \forall i = 1, ..., 12$

b) Sea Goleadoras F.C. el equipo 2. Para incorporar el resultado de la primera fecha, es necesario agregar las siguientes restricciones al modelo, según sea el caso:
Triunfo: $x_{12} \geq 1$
Derrota: $x_{21} \geq 1$
Empate: $x_{12} + x_{21} \leq 1$

c) Como el modelo entrega la mayor cantidad de puntos que obtendría El Huevo F.C. para no clasificar a la liga amateur, basta con sumarle 1 punto al resultado del modelo luego de la primera fecha para que el puntaje asegure el avance.

Problema 4.

Una municipalidad de la ciudad de Santiago está organizando un festival gratuito para sus habitantes, que comprende distintos tipos de espectáculos. Hay espectáculos de cultura, educación, entretención y chismes. Sea E el conjunto de espectáculos disponibles para contratar. Sean $C \subseteq E$ los espectáculos de cultura y educación, $F \subseteq E$ los de entretención y $G \subseteq E$ los shows de chismes. Estos shows tienen una duración de una hora cada uno. Los espectáculos de entretención y chismes no pueden ser repetidos durante todo el festival y los de cultura o educativos pueden programarse a lo más dos veces y en días distintos cada uno.

El festival dura 3 días, de viernes a domingo, y la programación es de 11am a 11pm, siendo el horario de más público u horario *peak*, entre las 8pm y las 10pm. Se deben programar espectáculos para las 12 horas de funcionamiento de cada día. La municipalidad no tiene grandes fondos para financiar este evento, sin embargo, los distintos espectáculos generan ingresos debido a distintas actividades, como compra de souvenirs, alimentación, estacionamientos, entre otros. Los ingresos que genera el espectáculo e, con $e \in E$, cuando se transmite en horario *peak* corresponden a p_e y en horario normal (no *peak*) a n_e. Además, el costo de contratar al espectáculo e, sin importar su hora de presentación, es de c_e. Dado que no se cuenta con un presupuesto para la actividad, es fundamental que este festival se pueda autofinanciar.

Para el alcalde de esta comuna es muy importante que se presenten la máxima cantidad de horas posibles de espectáculos de cultura y educación, que permitan las siguientes condiciones:

- ◇ Por lo menos la mitad de los espectáculos contratados deben ser de alguna empresa o artista de la comuna. Para esto considere que existe el parámetro h_e que toma valor 1 si el espectáculo e es de algún miembro de la comuna y 0 en otro caso.
- ◇ Para cada día, al menos un 10 % de los espectáculos programados deben ser de entretención.
- ◇ Puede haber máximo 3 programas de chismes en el festival.
- ◇ Se debe incluir por lo menos dos horas de shows de cultura o educación en horario peak durante el festival.
- ◇ Todo espectáculo de entretención tiene que tener después un show de cultura o educación.
- ◇ Por cada 2 espectáculos de educación o cultura agendados en total entre los días viernes y domingo, se podrá agendar un show de entretención el día sábado. Por ejemplo, si entre viernes y domingo hay un total de 5 shows de cultura, se pueden programar 2 espectáculos de entretención para el día sábado.

Formule un problema de programación lineal entera que permita planificar la programación de espectáculos para el festival cumpliendo con las condiciones antes descritas y alcanzar el objetivo del alcalde de programar la mayor cantidad de espectáculos de educación o cultura posibles.

Solución Problema 4.

Conjuntos

$$E : \text{espectáculos},$$

$$C : \text{espectáculos de cultura y educación, } C \subseteq E$$

$$F : \text{espectáculos de entretención, } F \subseteq E$$

$$G : \text{espectáculos de chismes, } G \subseteq E$$

$$T : \text{horas de festival en cada día, } T = \{1, ..., 12\}$$

$$D : \text{días, } d = \{1, 2, 3\}$$

Variables

$$x_{etd} = \begin{cases} 1 & \text{Si agendo el espectáculo } e \text{ en la hora } t \text{ del día } d.\ \forall e \in E,\ \forall t = \{1, ..., 12\},\ d = \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo

$$Max \sum_{e \in C} \sum_{t=1}^{12} \sum_{d=1}^{3} x_{etd}$$

Restricciones

1) El festival se debe autofinanciar

$$\sum_{e \in E} \sum_{d=1}^{3} \Big[\sum_{t=1}^{9} (n_e - c_e) x_{etd} + \sum_{t=10}^{11} (p_e - c_e) x_{etd} + (n_e - c_e) x_{e12d} \Big] \geq 0,$$

2) Debe haber un mínimo de 2 horas de shows de cultura o entretención en horario peak

$$\sum_{e \in C} \sum_{t=10}^{11} \sum_{d=1}^{3} x_{etd} \geq 2,$$

3) Máximo 3 shows de chismes

$$\sum_{e \in G} \sum_{t=1}^{12} \sum_{d=1}^{3} x_{etd} \leq 3,$$

4) Al menos la mitad de los espectáculos deben ser de miembros de la comuna

$$\sum_{e \in E} \sum_{t=1}^{12} \sum_{d=1}^{3} h_e x_{etd} \geq 36/2,$$

5) Cada día mínimo un 10 % de los shows deben ser de entretención

$$\sum_{e \in F} \sum_{t=1}^{12} x_{etd} \geq 12/10, \qquad \forall d = 1, 2, 3$$

6) Los espectáculos de chismes y entretención no se pueden repetir

$$\sum_{t=1}^{12} \sum_{d=1}^{3} x_{etd} \leq 1, \qquad \forall e \in F \cup G$$

7) Esp. de cultura se pueden repetir máximo 2 veces y en días distintos

$$\sum_{t=1}^{12}\sum_{d=1}^{3} x_{etd} \leq 2, \qquad \forall e \in C$$

$$\sum_{t=1}^{12} x_{etd} \leq 1, \qquad \forall e \in C, d = 1,2,3$$

8) Hay shows en todas las horas y un show cada hora

$$\sum_{e\in E}\sum_{t=1}^{12} x_{etd} = 12, \qquad \forall d = 1,2,3$$

$$\sum_{e\in E} x_{etd} = 1, \qquad \forall t = 1,...13, d = 1,2,3$$

9) Shows de entretención seguidos de un esp. cultural el mismo día

$$\sum_{e\in F} x_{etd} \leq \sum_{e\in C} x_{e(t+1)d}, \qquad \forall t = 1,...,11, d = 1,2,3$$

10) 2 horas de shows de cultura permiten 1h de shows de entretención

$$\sum_{e\in C}\sum_{t=1}^{12} x_{et1} + x_{et3} \geq 2\sum_{e\in F}\sum_{t=1}^{12} x_{et2},$$

11) Naturaleza de las Variables

$$x_{etd} \in \{0,1\}, \qquad \forall e \in E, t = 1,...,12, d = 1,2,3$$

Problema 5.

La famosa cadena de joyas *Silver* desea crear una nueva línea de productos, sin embargo, su planta actual de producción es muy pequeña, por lo que decide construir una nueva fábrica dedicada exclusivamente a esta nueva línea. Como el dueño de *Silver* no tiene los suficientes conocimientos para diseñar su planta, lo contrata a usted para planificar la producción de su nueva fábrica de forma de lograr obtener el mayor ingreso posible.

Las máquinas joyeras disponibles en el mercado están en el conjunto J y el costo de comprar la máquina j es de c_j, con $j \in J$. Se deben comprar las suficientes máquinas para poder producir todos los artículos de la nueva línea de *Silver*, contenidos en el conjunto I. Las máquinas serán ubicadas en un centro de producción que posee la joyería. Este centro cuenta con cuadrantes en los que se pueden ubicar las distintas máquinas, los que se encuentran en el conjunto G. El número de cuadrantes que requiere la máquina j para su funcionamiento es de a_j, con $j \in J$. Para poder ubicar una máquina en el centro de producción, los cuadrantes que esta ocupe deben ser vecinos entre sí. El parámetro binario ℓ_{gm} indica con valor 1 si el cuadrante g es vecino del cuadrante m, con $g, m \in G$.

La nueva línea de joyería está conformada por los artículos del conjunto I, que pueden ser anillos, collares, pulseras, etc., para lo que se dispone del conjunto K de materiales (oro, plata, zafiro, ...) para confeccionarlos. El parámetro binario d_{ik} toma el valor 1 si el artículo i requiere del material k para ser fabricado, con $i \in I$ y $k \in K$. Todos los artículos pueden ser producidos por todas las máquinas, sin embargo, hay artículos que no pueden ser producidos por la misma máquina, puesto que esto podría perjudicar su calidad. Así, el parámetro binario v_{in} tomará el valor 1 si el artículo i se puede producir en la misma máquina que el artículo n y 0 en otro caso, con $i, n \in I$. Dadas las características específicas de una pieza de joyería, el espacio que esta necesita para ser producida será diferente, lo que se puede atribuir a la estabilidad de sus materiales, su toxicidad, etc. De esta forma, se sabe que el artículo i requiere de un mínimo de r_i cuadrantes para ser producido, con $i \in I$, por lo que tendrá que ser fabricado por una máquina que ocupe al menos ese número de cuadrantes.

La calidad de las joyas producidas cambiará según el tiempo que se le dedique a la producción de cada una de ellas, ya que mientras más tiempo se tome en producir cada artículo, mayor será su nivel de detalle y se podrá cobrar un precio más alto por él. El tiempo mínimo y máximo (en minutos) de producción del artículo i corresponden a h_i y f_i, $i \in I$, respectivamente. La utilidad por minuto de producción del artículo i en la máquina j con el material k corresponde a u_{ijk}. Además, el costo por utilizar la máquina j por minuto corresponde a q_j.

Todas las máquinas pueden producir cualquiera de los artículos y todos los artículos de la línea deben ser producidos una vez en cada ciclo de producción.

Considere que se ha calculado un presupuesto de p para la compra de máquinas. $HINT$: El costo de compra de máquinas no se incluye en el costo de un ciclo de producción.

Formule un problema de programación **lineal** entera que permita ayudar a la joyería a obtener las mayores ganancias posibles en un ciclo de producción.

Solución Problema 5.

Conjuntos

I : artículos,

J : máquinas,

K : materiales,

G : cuadrantes,

Variables

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Si la máquina } j \text{ produce el artículo } i \text{ con el material } k,\ \forall j \in J, i \in I, k \in K, \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se compra la máquina } j,\ \forall j \in J, \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$w_{jg} = \begin{cases} 1 & \text{Si la máquina } j \text{ ocupa el cuadrante } g,\ \forall j \in J, g \in G, \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la máquina } j \text{ produce el artículo } i,\ \forall j \in J, g \in G, \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$t_i =$ tiempo (en minutos) de fabricación del artículo i, $\forall i \in I$

$\alpha_{ij} =$ tiempo (en minutos) de producción del artículo i en la máquina j con el material k, $\forall i, j = 1, ..., 12$

Función Objetivo

$$Max \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \alpha_{ijk}(u_{ijk} - q_j)$$

Restricciones

1) Máquina ocupa cuadrantes necesarios

$$\sum_{g \in G} w_{jg} = a_j b_j, \qquad \forall j \in J$$

2) Cada cuadrante puede ser ocupado máximo 1 vez

$$\sum_{j \in J} w_{jg} \leq 1, \qquad \forall g \in G$$

3) Máquina ocupa espacio mínimo para producir un artículo

$$y_{ij} r_j \leq a_j b_j, \qquad \forall i \in I, j \in J$$

4) Artículos se pueden fabricar en la misma máquina

$$y_{ij} + y_{nj} \leq v_{in} + 1, \qquad \forall i, n \in I, j \in J$$

5) Máquina solo ocupa cuadrantes vecinos

$$w_{jg} + w_{jm} \leq \ell_{gm} + 1, \qquad \forall j \in J, g, m \in G$$

6) Relación entre variables x_{ijk} e y_{ij}

$$x_{ijk} = y_{ij} d_{ik}, \qquad \forall j \in J, i \in I, k \in K$$

7) Definición variable α_{ijk}

$$\alpha_{ijk} \leq x_{ijk} f_i, \qquad \forall j \in J, i \in I, k \in K$$

$$t_i - (1 - x_{ijk}) f_i \leq \alpha_{ijk}, \qquad \forall j \in J, i \in I, k \in K$$

$$\alpha_{ijk} \leq t_i, \qquad \forall j \in J, i \in I, k \in K$$

8) Todos los artículos se producen 1 vez

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1, \qquad \forall i \in I$$

9) Tiempo mínimo y máximo de producción de un artículo

$$h_i \leq t_i \leq f_i, \qquad \forall i \in I$$

10) Respetar presupuesto de compra de máquinas

$$\sum_{j \in J} c_j b_j \leq p,$$

11) Naturaleza de las Variables

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in I, j \in J, k \in K$$

$$b_j \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in J$$

$$w_{jg} \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in J, g \in G$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in I, j \in J$$

$$\alpha_{ijk} \geq 0, \qquad \forall i \in I, j \in J, k \in K$$

$$t_i \geq 0, \qquad \forall i \in I$$