PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2020 - 1
Profesores: : M. Arancibia - R. Cuadrado - J. González P. Guajardo - M. Klapp

Examen

Duración: 1:10 horas (10 min de escaneo).

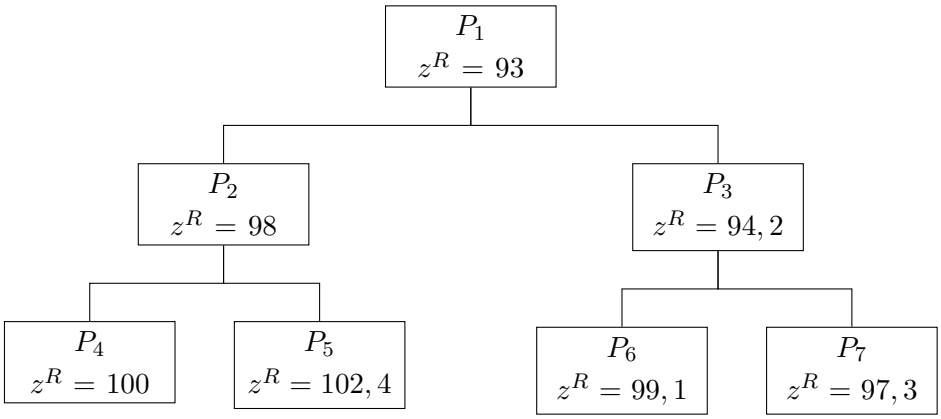
INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Segunda parte (28 puntos)

Pregunta 4 (5 puntos)

Un estudiante está resolviendo un problema de minimización con todas sus variables enteras mediante el algoritmo Branch & Bound y ha llegado a la siguiente iteración intermedia con estos nodos ya explorados:



En cada nodo, se detalla su identificador y el valor óptimo relajado, pero no se sabe si la solución fue entera. El valor actual del incumbente es 100. Además, se sabe que el vector de costos del problema posee todos sus coeficientes enteros.

Con la información disponible, determine en cuáles de los nodos no ramificados se sabe con certeza que deben ser **podados** o **ramificados** y en cuáles **no se entrega información suficiente** para decidir qué hacer. Justifique.

Solución:

Los nodos P_1, P_2 y P_3 están cerrados (ya fueron ramificados).

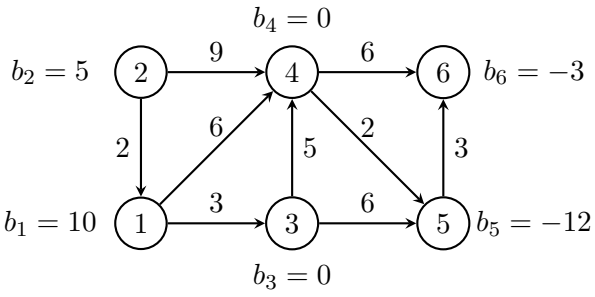
Los nodos P_4 y P_5 deben ser podados (valor óptimo relajado mayor o igual que incumbente).

El nodo P_6 debe ser podado: no existe una solución entera menor que 100 en el nodo.

El nodo P_7 debe ser ramificado (valor óptimo relajado menor que el incumbente y objetivo fraccionario que indica la existencia de solución óptima fraccionaria).

Pregunta 5 (13 puntos)

Considere el siguiente grafo (N, A), que representa una instancia de un problema de flujo en redes a mínimo costo. Los costos por unidad de flujo c_a se detallan sobre cada arco $a \in A$ del grafo y las ofertas netas b_i se declaran al lado de cada nodo $i \in N$.



(a) (8p) Resuelva el problema a optimalidad ejecutando el algoritmo simplex de redes desde el siguiente árbol-base inicial factible:

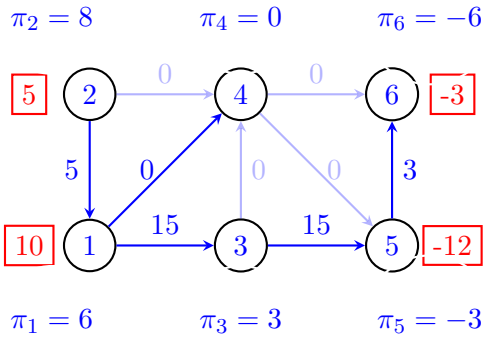
$$B = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,5), (5,6)\}$$

(b) (5p) Si se suma una constante h al costo de cada arco de la red. ¿En qué rango de valores puede estar h para que la(s) solucion(es) óptima(s) encontrada(s) en (a) se mantengan óptimas?

Solución:

(a) Parte A

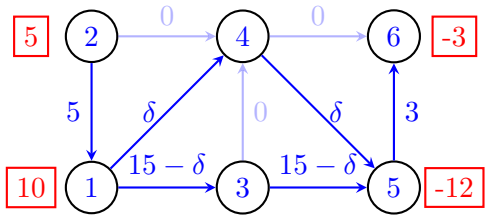
(i) **Iteracion 1** Los flujos se pueden ver en la siguiente grafo. Asignamos $\pi_4 = 0$, luego:



Los costos reducidos de los arcos no básicos son los siguientes:

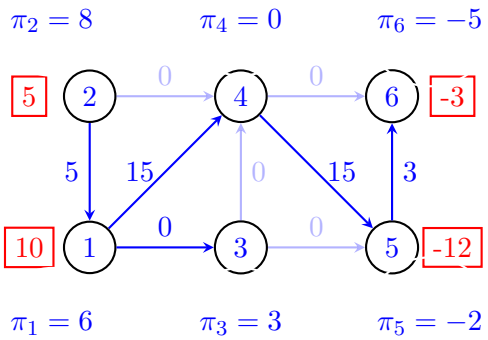
- $\bar{c}_{24} = c_{24} - \pi_2 + \pi_4 = 9 - 8 + 0 = 1$
- $\bar{c}_{34} = c_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 5 - 3 + 0 = 2$
- $\bar{c}_{45} = c_{45} - \pi_4 + \pi_5 = 2 - 0 + (-3) = -1$
- $\bar{c}_{46} = c_{46} - \pi_4 + \pi_6 = 6 - 0 + (-6) = 2$

Entra a la base el arco $(4, 5)$, se forma ciclo:



Notamos puede salir el arco $(1,3)$ o el $(3,5)$, elegimos el $(3,5)$ luego la base 3 es: $B_3 = \{(1,3),(1,4),(2,1),(4,5),(5,6)\}$

(ii) **Iteración 2** Los flujos se pueden ver en la siguiente grafo. Asignamos $\pi_4 = 0$, luego:



Los costos reducidos de los arcos no básicos son los siguientes:

- $\bar{c}_{24} = c_{24} - \pi_2 + \pi_4 = 9 - 8 + 0 = 1$
- $\bar{c}_{34} = c_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 5 - 3 + 0 = 2$
- $\bar{c}_{35} = c_{35} - \pi_3 + \pi_5 = 6 - 3 + (-2) = 1$
- $\bar{c}_{46} = c_{46} - \pi_4 + \pi_6 = 6 - 0 + (-5) = 1$

Como todos los costos reducidos son positivos estamos en el óptimo.

(b) Parte B: Si todos los costos aumentan en h, entonces las condiciones de optimalidad son:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{21} &= 2 + h - \pi_2 + \pi_1 = 0 \\
\bar{c}_{14} &= 6 + h - \pi_1 + \pi_4 = 0 \\
\bar{c}_{13} &= 3 + h - \pi_1 + \pi_3 = 0 \\
\bar{c}_{45} &= 2 + h - \pi_4 + \pi_5 = 0 \\
\bar{c}_{56} &= 3 + h - \pi_5 + \pi_6 = 0 \\
\bar{c}_{24} &= 9 + h - \pi_2 + \pi_4 \geq 0 \\
\bar{c}_{34} &= 5 + h - \pi_3 + \pi_4 \geq 0 \\
\bar{c}_{35} &= 6 + h - \pi_3 + \pi_5 \geq 0 \\
\bar{c}_{46} &= 6 + h - \pi_4 + \pi_6 \geq 0
\end{aligned}$$

Asignando $\pi_4 = 0$ obtenemos de las 5 ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= 8 + 2h \\
\pi_1 &= 6 + h \\
\pi_3 &= -3 \\
\pi_5 &= -(2 + h) \\
\pi_6 &= -(5 + 2h)
\end{aligned}$$

Reemplazando en costos reducidos no basicos:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{24} &= 9 + h - (8 + 2h) = 1 - h \geq 0\\ \bar{c}_{34} &= 5 + h - 3 = 2 + h \geq 0\\ \bar{c}_{35} &= 6 + h - 3 - (2 + h) = 1 \geq 0\\ \bar{c}_{46} &= 6 + h - (5 + 2h) = 1 - h \geq 0\end{aligned}$$

Luego $h \in [-2, 1]$

Pregunta 6 (10 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

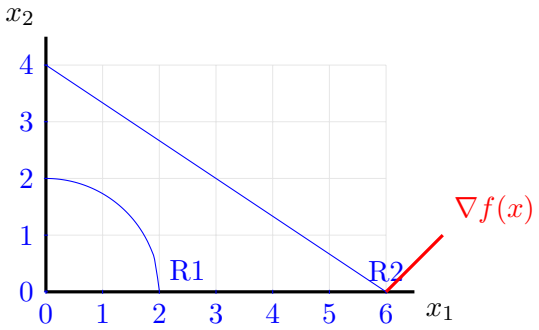
$$\begin{array}{ll}\text{máx} & x + y\\ s.a. & x^2 + y^2 \geq 4\\ & 2x + 3y \leq 12\\ & x, y \geq 0\end{array}$$

(a) (5p) Resuelva gráficamente el problema identificando la solución y valor óptimos. Explique su razonamiento.

(b) (5p) Verifique que se cumplan las condiciones KKT en la(s) solución(es) encontradas

Solución:

(a) El gráfico es:



El punto (6,0) es el óptimo.

(b) Consideremos el problema de minimización y todas las restricciones en menor o igual:

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & -x - y\\ s.a. & -x^2 - y^2 \leq -4\\ & 2x + 3y \leq 12\\ & -x \leq 0\\ & -y \leq 0\end{array}$$

Verifiquemos las condidiones KKT en el punto encontrado $(6, 0)$. Además de ser factible, se debe cumplir que existan $\mu_1 \geq 0, ..., \mu_4 \geq 0$ tales que:

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2x\\-2y\end{pmatrix}\mu_1 + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\mu_2 + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\mu_3 + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\mu_4 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mu_i(g_i(x^*) - b_i) = 0 \quad \forall i = 1, ..., 4$$

Las restricciones 1 y 3 no están activas, por lo que $\mu_1 = 0$ y $\mu_3 = 0$. Luego:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mu_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mu_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene $\mu_2 = \frac{1}{2} \geq 0, \mu_4 = \frac{1}{2} \geq 0$.

Por lo tanto, el punto cumple las condiciones de KKT.