PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2016
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - P. Carrillo - J.T. Marquinez
G. Angulo

Solución Tarea 2

Fecha de Entrega: 26 de septiembre.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día lunes 26 de septiembre a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (5 puntos) En el contexto de Simplex, dé ejemplos de problemas concretos donde ocurran las siguientes situaciones. La idea es que escriban un modelo P) por cada punto. Justifique cada ejemplo según criterios del algoritmo.

i) (1 puntos) El problema sea infactible.

ii) (1 puntos) El problema tiene solución y es única.

iii) (1 puntos) La solución óptima es degenerada.

iv) (1 puntos) El problema tiene una solución no acotada.

v) (1 puntos) El problema tiene infinitas soluciones.

b) (3 puntos) En un problema de minimización, imagine las siguientes decisiones para elegir qué variable ingresa a la base cuando hay más de una variable con costos reducidos negativo.

$$\begin{aligned} d_1 &:= \text{ Elegir la variable con el costo reducido más negativo.} \\ d_2 &:= \text{ Elegir la variable con el costo reducido menos negativo.} \end{aligned}$$

Por ejemplo, imagine que en un problema de minimización tiene las variables x_1, x_2 y x_3 con costos reducidos -3, -2 y-7 respectivamente. En esa situación, la decisión d_1 ingresaría la variable x_3 y la decisión d_2 ingresaría la variable x_2 al realizar el algoritmo de Simplex.

Con éstas decisiónes en mente, se le pide dar un ejemplos en donde:

i) (1 puntos) La decisión d_1 haga que el algoritmo Simplex termine antes que si elijo d_2.

ii) (1 puntos) La decisión d_2 haga que el algoritmo Simplex termine antes que si elijo d_1.

iii) (1 puntos) Ambas decisiones sean indiferentes.

Justifique que sus ejemplos cumplan con las situaciones planteadas, es decir, no basta con que solamente plantee un problema P).

c) (7 puntos) El algoritmo Simplex hace una cantidad de pasos excesiva en algunos escenarios. A continuación se le pedirá investigar un problema donde el algoritmo (bajo el criterio de entrada del menor costo reducido, en un problema de minimización) toma una cantidad exponencial de iteraciones:

i) (2 puntos) Investigue sobre el problema de Klee-Minty y escriba la forma generalizada del problema.

ii) (3 puntos) Resuelva el problema de optimización de Klee-Minty para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$ (por separado) utilizando el método Simplex. Indique en cada iteración cuál es la variable que entra y sale respectivamente. ¿Cuántas iteraciones se tendrán que hacer para $n = 5$?

iii) (2 puntos) Explique con sus palabras el por qué el criterio de entrada del menor costo reducido (para un problema de minimización) causa una cantidad de iteraciones tan grande en este problema particular. ¿Cómo solucionaría este problema?

Observación: Puede realizar el cálculo computacionalmente, explicando cómo lo hizo.

Solución Problema 1.

a) *i*)

$$z = \max_{x \in P} x$$

donde

$$P := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 10 \ , \ x \leq 9, \ x \geq 0\}$$

En este caso, el problema auxiliar de la Fase I es

$$z = \min \pi_1 + \pi_2$$

s.a

$$\begin{aligned} x - s_1 + \pi_1 &= 10 \\ x + s_2 + \pi_2 &= 9 \\ x, s_1, s_2.\pi_1, \pi_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde el óptimo es $x = 9$,$s_1 = 0$,$s_2 = 0$, $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 0$. Como las variables auxiliares no son 0, el problema es infactible

ii)

$$z = \max_{x_1, x_2} 3x_1 + 2x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_1 &\leq 20 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Al resolver este problema, se puede apreciar que los costos reducidos de las variables no básicas en el punto óptimo son todos negativos, por lo que se está en el máximo.

iii)

$$z = \max_{x_1, x_2} x_1 + 2x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En este ejemplo se puede apreciar una solución degenerada, ya que si bien para los valores de $(x_1, x_2 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ se está en el óptimo, existen variables básicas correspondientes a las holguras de las restricciones que, a pesar de ser variables básicas, tienen valor 0. Esto ocurre porque en el punto óptimo hay restricciones redundantes, lo que hace que existan múltiples bases posibles.

iv)

$$z = \max_{x_1, x_2} x_2 + x_1$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\leq 0 \\ 2x_2 - x_1 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si partimos en el punto $(0, 0)$ como primera solución factible, es equivalente a decir que las variables de holgura son las básicas. Luego, los costos reducidos tanto para x_1 como para x_2 son de 1 (pues las variables de holgura no están en la funcion objetivo), lo que hace posible que cualquiera entre a la base. Se dejará el problema de la forma estándar:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La matriz de variables básicas es la identidad. Luego, procedemos a calcular el u:

$$u = B^{-1}R_1$$
$$u = I \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, sale la variable x_4 y decidimos ingresar a x_1. COn esto se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede calcular rápidamente que $\overline{c_2} = 2$ y que

$$u = B^{-1}R_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \leq 0$$

Por lo que el problema es no acotado.

v)

$$z = \max_{x_1, x_2} x_2 - x_1$$

s.a.

$$x_2 - x_1 \leq 20$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Se puede apreciar que las curvas de nivel de la función objetivo son paralelas a una restricción, por lo que el óptimo se alcanza en todo el segmento factible. Esto se traduce en que existirá un costo reducido igual a 0 estando en el óptimo.

b) Nota: El alumno debe mostrar el modelo del ejemplo y tiene que mostrar como iterará Simplex con ambas decisiones o algún simil que haga ver que Simplex hace lo pedido.

Una forma sencilla de mostrar que uno termina antes que otro es mostrar optimalidad con una iteración para una decisión y que al hacer una iteración con la otra decisión, no se logra inmediatamente la optimalidad.

i) Consideremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \; & -\frac{1}{4}x - y \\ \text{s.a} \quad & y + 2x \leq 2 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Este problema en su forma estándar es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \; & -\frac{1}{4}x - y \\ \text{s.a} \quad & y + 2x + h = 2 \\ & x, y, h \geq 0. \end{aligned}$$

Si partimos en el $(0, 0)$, ya que es el punto trivial para partir, tenemos que la base es h con $h = 2$. Los costos reducidos son los de la función objetivo y podemos ver que no estamos en el óptimo.

Con d_1 entra y y con d_2 entra x. Podemos ver que tomar $y = 2$ es el óptimo, pero $x = 1$ no, con lo que Simplex haría otra iteración al usar d_2 ingresando y y sacando x. Al calcular los costos reducidos de la decisión d_1 quedan $(\frac{3}{4}, 1)$.

ii) Usando el problema de *c)ii)* para $n = 2$, podemos ver que el problema es equivalente (en su forma estándar) a:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -10x_1 - x_2 \\ \text{s.a. } & x_1 + h_1 = 1 \\ & 20x_1 + x_2 + h_2 = 100 \\ x, h \geq 0. & \end{aligned}$$

Con el desarrollo de más adelante, es fácil ver que si usamos d_1 corre en mas de una iteración, pero si usamos d_2 termina en una iteración.

iii) Al usar cualquier problema de minimización que tenga un costo reducido negativo y que al ingresar esa variable termine, me es indiferente cual decisión use, siempre ingresaré la misma variable.

c) *i)* La forma más general del problema de Klee-Minty sería de la siguiente forma:

$$z = \text{máx} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\epsilon}^{n-i} x_i$$

s.a.

$$\begin{aligned} 2\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\epsilon}^{i-j} x_j + x_i \leq \frac{1}{\epsilon}^{2(i-1)} & \qquad \forall 1 \leq i \leq n \\ x_i \geq 0 & \qquad \forall 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

ii) resolveremos el problema para $\epsilon = \frac{1}{10}$.

$$z = \text{máx} \sum_{i=1}^{n} 10^{n-i} x_i$$

s.a.

$$2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1} \qquad \forall 1 \leq i \leq n$$

Para $n = 2$, se hará de manera exhaustiva, luego, se darán los pivotes.

$$z = \text{máx}\, 10x_1 + x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 \\ 20x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Formulación estándar de las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + s_1 &= 1 \\ 20x_1 + x_2 + s_2 &= 100 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

se parte con $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 100$.

$$\begin{aligned} B &= I \\ \overline{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix} \\ R &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} \\ \overline{c} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se elije como entrante x_1.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}$$
$$\overline{\delta} = 1$$

La variable saliente es s_1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 80 \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se elije como entrante x_2.

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overline{\delta} = 80$$

Sale s_2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 80 \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overline{c} = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se elije como entrante s_1.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \end{pmatrix}$$
$$\overline{\delta} = 1$$

sale x_1

$$B = I$$
$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overline{c} = \begin{pmatrix} -19 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como todos los costos reducidos son negativos (en un problema de maximización), estamos en el óptimo. Luego $x_2 = 100$, $s_1 = 1$.
Para $n = 3$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\overline{b}$		
100	10	1	0	0	0	0	=	z
1	0	0	1	0	0	1	=	s_1
20	1	0	0	1	0	100	=	s_2
200	20	1	0	0	1	10000	=	s_3

Primer pivoteo: x_1 entra y s_1 sale

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\overline{b}$		
0	10	1	-100	0	0	100	=	z
1	0	0	1	0	0	1	=	x_1
0	1	0	-20	1	0	80	=	s_2
0	20	1	-200	0	1	9800	=	s_3

Segundo pivoteo: x_2 entra y s_2 sale.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\overline{b}$		
0	0	1	100	-10	0	900	=	z
1	0	0	1	0	0	1	=	x_1
0	1	0	-20	1	0	80	=	x_2
0	0	1	-200	-20	1	8200	=	s_3

Entra s_1, sale x_1

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\overline{b}$		
-100	0	1	0	10	0	1000	=	z
1	0	0	1	0	0	1	=	s_1
20	1	0	0	1	0	100	=	x_2
-200	0	1	0	-20	1	8000	=	s_3

Entra x_3, sale s_3

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\overline{b}$		
100	0	0	0	10	-1	9000	=	z
1	0	0	1	0	0	1	=	s_1
20	1	0	0	1	0	100	=	x_2
-200	0	1	0	-20	1	8000	=	x_3

Entra x_1 y sale s_1

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\overline{b}$		
0	0	0	-100	10	-1	9100	=	z
1	0	0	1	0	0	1	=	x_1
0	1	0	-20	1	0	80	=	x_2
0	0	1	200	-20	1	8200	=	x_3

Entra s_2, sale x_2

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\overline{b}$		
0	-10	0	100	0	-1	9900	=	z
1	0	0	1	0	0	1	=	x_1
0	1	0	-20	1	0	80	=	s_2
0	20	1	-200	0	1	9800	=	x_3

Entra s_1, sale x_1

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\overline{b}$		
-100	-10	0	0	0	-1	10000	=	z
1	0	0	1	0	0	1	=	s_1
0	1	0	-20	1	0	100	=	s_2
0	20	1	-200	0	1	10000	=	x_3

Como no hay costos reducidos positivos, la solución es óptima.
Para $n = 4$, se tiene que después de 15 pivoteos se llega a que el óptimo es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1000000$, $s_1 = 1$, $s_2 = 100$, $s_3 = 10000$, $s_4 = 0$. Se puede observar un movimiento en las variables básicas análogo a una torre de hanoi. partiendo del origen, se tiene que los pivoteos serán:

entra	sale
x_1	s_1
x_2	s_2
s_1	x_1
x_3	s_3
x_1	s_1
s_2	x_2
s_1	x_1
x_4	s_4
x_1	s_1
x_2	s_2
s_1	x_1
s_3	x_3
x_1	s_1
s_2	x_2
s_1	x_1

el número de pivoteos en para cada n es exactamente $2^n - 1$, lo cual sigue la lógica de las torres de hanoi.

iii) La mecánica del costo reducido más negativo es una forma de buscar dar el mejor "paso" con respecto a los otros pasos posibles que se tienen. Este enfoque es algo miope, porque no considera los pasos que ya se tomaron ni el largo plazo. Es debido a esta mecánica que el algoritmo puede ser "engañado" por situaciones especiales como el cubo de Klee-Minty, el cual hace que los pasos sean los "mejores" individualmente, pero que formen el camino más largo. Una forma de solucionar esto es aleatorizar la elección de la variable entrante (dentro de los que tienen costos reducidos válidos), lo cual haría que todos los pasos que se den sean "buenos"pero sin ninguna estructura. El largo esperado del camino entonces depende de la proporción de caminos largos vs los cortos. Esto hace que el valor esperado no sea mucho mejor que el peor camino en la práctica.

OBS: Puede que varíe el que haría, pero si es algo coherente con sacar lo "miope " del algoritmo, entonces esta bien.

Problema 2. (15 puntos)

a) (5 puntos) Considere el problema P) definido como,

$$\begin{aligned} P)\ \text{mín} \quad & \tanh(x+y) \\ \text{s.a.} \quad & 1 \leq x \leq 4 \\ & 1 \leq y \leq 3, \end{aligned}$$

y responda las siguientes preguntas.

i) (1 punto) Lleve el problema P) a su forma estándar, al que llamaremos *PFE*).

ii) (1 punto) Considere el punto factible $v = (\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ del problema P). Grafique el problema P) identificando el punto v. Luego, calcule los valores de las variables de *PFE*) e identifíquelas en el mismo gráfico.

Ahora considere el problema P') definido como

$$\begin{aligned} P')\ \text{mín} \quad & \text{cotanh}(x+y) \\ \text{s.a.} \quad & -2x + y \leq -1 \\ & -x + 3y \geq 2 \\ & -x - 2y \geq -8 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0, \end{aligned}$$

iii) (1 punto) Lleve el problema P') a su forma estándar y calcule los valores de holgura para el punto $u = (\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (2, 2)$.

iv) (2 punto) Grafique P') e identifique claramente en el gráfico las variables del problema en forma estándar para el punto u.

b) (5 puntos) Considere el problema P) en su forma canónica, dado por

$$\begin{aligned} P)\ \text{mín} \quad & -x_1 + x_2 + \delta x_3 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_2 + x_5 = \beta \\ & x_1 + 2x_2 + x_6 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0, \end{aligned}$$

donde δ y β son constantes.

i) (1 punto) ¿Cuál es la solución básica factible representada? ¿Cuáles son sus costos reducidos?

ii) (1 puntos) ¿Qué condiciones se deben cumplir para que la solución básica de *i*) sea óptima y no degenerada?

iii) (1 puntos) ¿Qué condiciones se deben cumplir para que la solución básica de *i*) degenerada?

iv) (2 puntos) ¿Cuánto debe valer δ para que el algoritmo Simplex termine en una iteración, si es que consideramos $\beta = 1$? (si es necesario, use la decisión d_1 del problema 1.*a*)).

c) (5 puntos) Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} P)\ \text{mín} \quad & 0 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq \delta \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

i) (1 punto) Escriba la formulación estándar del problema P).

ii) (2 puntos) Usando el método Simplex Fase I, determine si el punto $(\frac{40}{3}, 2, \frac{-5}{3})$ es factible para δ igual a -5 , -4 y 0.

iii) (2 puntos) Determine intervalos para δ en donde el poliedro sea factible o infactible.

Solución Problema 2.

a) *i*) Como x e y son ≥ 1, tenemos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Luego, asumiendo la función objetivo como 0 como sale en la Aclaración, la formulación se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} P)\ \text{mín} \quad & 0 \\ \text{s.a.} \quad & x \leq 4 \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 1 \\ & y \leq 3 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Con esto, la formulación estándar queda:

$$\begin{aligned} PFE) \quad \text{mín} \quad & 0 \\ \text{s.a.} \quad & x + h_1 = 4 \\ & x - h_2 = 1 \\ & y - h_3 = 1 \\ & y + h_4 = 3 \\ & x, y, h_1, h_2, h_3, h_4 \geq 0. \end{aligned}$$

ii) Las variables de holgura para el punto v valen $h_1 = 2,5$, $h_2 = 0,5$, $h_3 = 0,5$ y $h_4 = 1,5$. Como se ve en la figura 1, las variables de holgura, son justamente (como su nombre lo indica) lo que le falta al punto factible para llegar a la igualdad en cada restricción. Ese valor es la distancia menor, en ese sentido es un segmento que es ortogonal a la restricción y pasa por el punto factible. Luego veremos que esta noción es un caso particular, ya que en este caso el vector de cada restricción (que se definirá mas adelante) queda unitario y calza con los ejes.

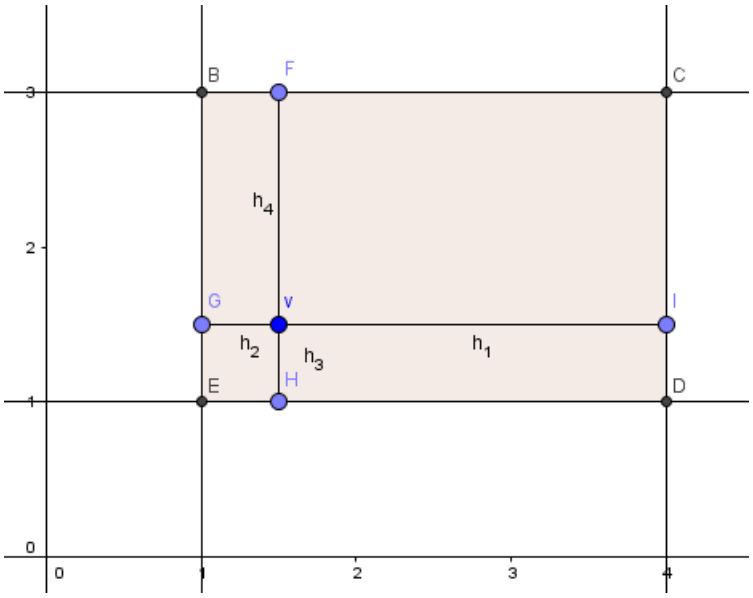


Figura 1: Gráfico del poliedro de P para el punto v con las variables de holguras

iii) El modelo en su forma estándar, asumiendo la función objetivo como 0, queda como:

$$\begin{aligned} PFE') \quad \text{mín} \quad & \text{cotanh}(x + y) \\ \text{s.a.} \quad & -2x + y + h_1 = -1 \\ & -x + 3y - h_2 = 2 \\ & -x - 2y - h_3 = -8 \\ & x, y, h_1, h_2, h_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Al tomar el punto factible $u = (2, 2)$ las variables de holgura valen: $h_1 = 1$, $h_2 = 2$ y $h_3 = 2$.

iv) El gráfico que se ve en la figura 2 NO es correcto, ya que en un caso como éste, las variables de holgura no tienen una representación gráfica como en el caso anterior. ¿Por qué ocurre esto?

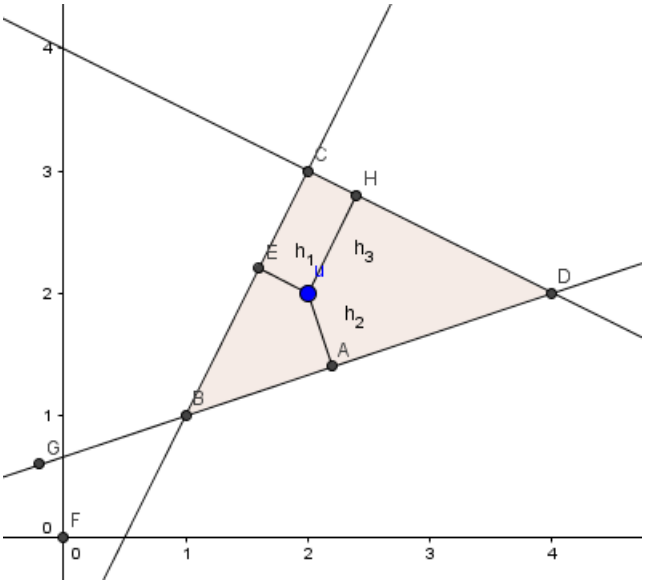


Figura 2: Representación Errónea

Veámoslo más en detalle, tenemos que una restricción es un hiperplano, por lo que se puede escribir como $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = b$, lo que en el caso de la restricción $-x - 2y \geq -8$ sería $(-1, -2) \cdot (x, y) \geq -8$. Podemos hacer algo de álgebra y descomponer b como el resultado de un producto punto del vector $\overrightarrow{a}$ con algún otro vector (podría ser cualquiera), pero para tener una intuición geométrica, podemos usar un vector en la dirección del vector $\overrightarrow{a}$. Lo que nos quedaría como $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = b = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||^2} b$ (siendo $||\overrightarrow{a}||$ la norma euclidiana). Lo anterior, se puede reescribir como $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} \cdot \frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||^2} b$ que a su vez es igual a $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} \cdot \frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||^2} b = 0$. Al definir $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||^2} b$ nos queda el hiperplano reescrito como $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}) = 0$. Pero las restricciones del problema no son de igualdad, por lo que al agregar las variables de holgura y llevarse a forma estándar, efectivamente quedan hiperplanos de la forma $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}) + h = 0$ si la restricción original era $\leq$ ó $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}) - h = 0$ si era $\geq$.

En el caso de la restricción antes mencionada, nos interesa la segunda forma, con lo que nos queda que la variable de holgura es $h_3 = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v})$. Gráficamente podemos ver que al tomar $\overrightarrow{x} = u = (2, 2)$ podemos ver $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{v}$ en la figura 3.

En la figura 3 se ve que el vector $\overrightarrow{a}$ está en azul, el vector $\overrightarrow{v}$ esta en rojo y el vector $\overrightarrow{w} = (2, 2) - \overrightarrow{v}$ está en verde.

Al final del cálculo realizado, podemos ver que $h_3 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{w} = 2$.

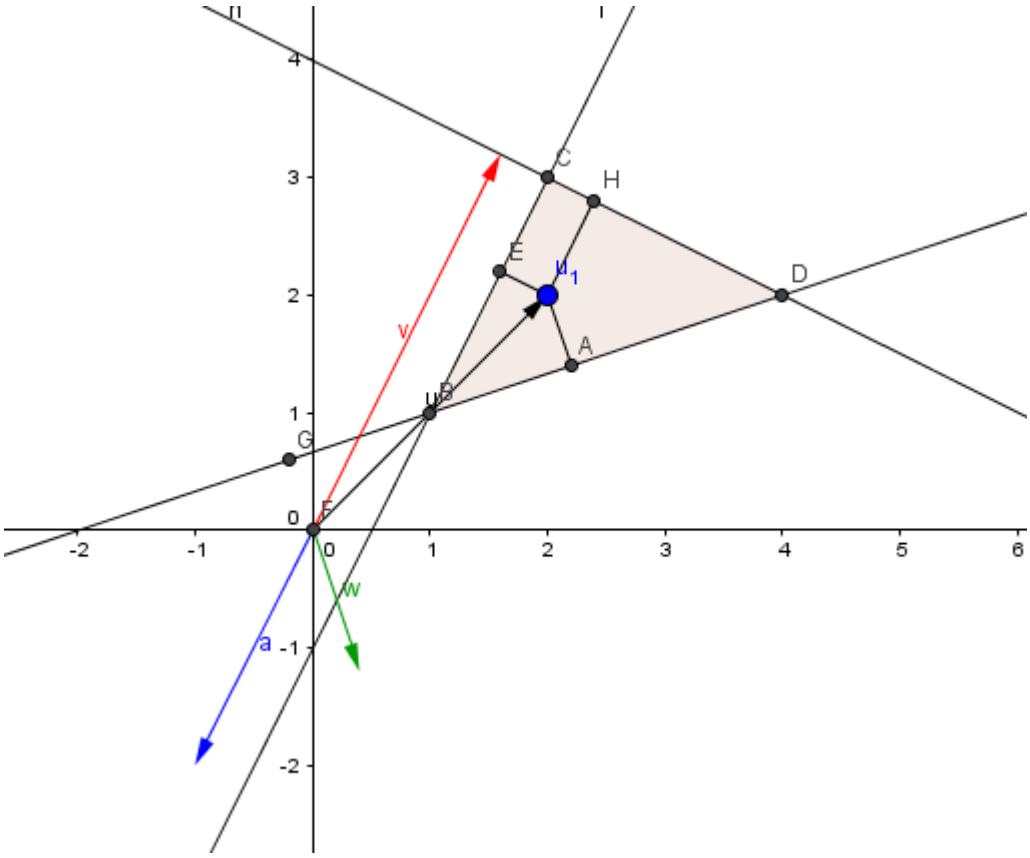


Figura 3: Intento de representación gráfica de h_3

OBS: En esta pregunta solo bastaba con que colocaran que no es graficable como lo es en la parte ii). Además, si es que hace un análisis mas fino (como el mencionado o algún símil que esté correcto) se le otorga 2 puntos extra a la pregunta.

b) *i*) El problema puede ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
P) \quad & \text{mín} \quad -x_1 + x_2 + \delta x_3 \\
& \text{s.a.} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Por lo que podemos ver que a priori, podríamos usar como base x_4, x_5 y x_6 ó x_3, x_5 y x_6. Pero recordando que en la función objetivo no deberían aparecer las variables de la base, si es que $\delta \neq 0$, solo nos quedaríamos con x_4, x_5 y x_6. Usando esa como base, los costos reducidos son -1, 1, δ, 0, 0 y 0 respectivamente.

ii) Para que sea no degenerada, se necesita que $\beta \neq 0$, pero en ningún caso sería óptima, ya que x_2 tiene un costo reducido negativo.

iv)

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -x_1 + x_2 + \delta x_3 \\ \text{s.a.} & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tenemos 2 casos, que entre x_1 o que entre x_3 (si es que $\delta < 0$, con d_1 con $\delta < -1$). Imaginemos que entre x_1, en éste caso, tenemos que encontrar qué variable sale. Para esto tomamos el cociente $\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{i1}}$ con i en $\{4, 5, 6\}$. Lo que nos da 1, 0 y 2 respectivamente. Luego, entra x_1 y sale x_4 con lo que los costos reducidos para x_2, x_3 y x_4 quedan 1, $\delta + 1$ y 1 respectivamente. Y para estar en este caso, es necesario que $-1 < \delta < 0$ entonces $\delta + 1 > 0$. Por lo tanto en este caso, simplex termina en una iteración.

Ocurre lo mismo que antes, si es que $\delta \geq 0$. Por lo que solo nos queda ver que pasa cuando entra x_3.

En ese caso, la variable que entra es x_4, que es la única con $\overline{a}_{i3} > 0$. Luego, los costos reducidos de x_1, x_2 y x_4 quedan $-1 - \delta$, 1 y $-\delta$ respectivamente. Además, para estar en este caso, tenemos que $\delta \leq -1$. Con esto, todos los costos reducidos quedan ≥ 0 por lo que Simplex también terminaría en una iteración.

Por lo tanto, con cualquier δ Simplex termina en una iteración si $\beta = 1$.

c) *i*) La formulación estandar queda:

$$\begin{array}{lll} \textit{PFE}) \text{ mín} & 0 & \\ \text{s.a.} & x_1 - x_2 + 5x_3 - h_1 & = 1 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 - h_2 & = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - h_3 & = \delta \\ & x_2 - h_4 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, h_3, h_4 \geq 0, & \end{array}$$

ii) Como el punto tiene un valor negativo, para ningún δ se hace factible. Por lo tanto, es infactible para los 3 valores.

iii) Ocurre lo mismo para esta, ese punto no es factible con ningún δ. Por lo tanto, es infactible para todo $\mathbb{R}$.

Problema 3. (15 puntos)

a) (6 puntos) Usted con un grupo de amigos se quieren independizar de su familia aprovechando que se ganaron un gran premio. Quieren incursionar en una empresa de inversiones, para así poder prolongar el dinero en el tiempo y no gastarlo todo junto. La cantidad que están dispuestos a invertir en la empresa son k millones de dólares, a lo largo de todo el próximo año (se pusieron de acuerdo de partir en enero).

Uno de sus amigos es más grande y ya tomó el curso de Finanzas, y les cuenta que existen distintos instrumentos de inversión que al final del mes entregan una cierta rentabilidad, pero lo difícil es decidir en cuáles instrumentos invertir en cada mes y qué cantidad de dinero.

Ustedes ponen dinero extra de su bolsillo y le pagan q a una empresa que trabaja en la bolsa para que les ofrezca m distintos instrumentos de inversión. Esta empresa les ofrece α_{it} de rentabilidad al final del mes t si es que se invirtió 1 peso al principio del mes en el instrumento i. Uno de sus amigos no entiende muy bien a qué se refiere con la rentabilidad y su contraparte de la empresa le da el siguiente ejemplo:

- ◇ Cuando $\alpha_{1,2} = 1,02$ significa, que si tu inviertes 100 el primero de febrero en el instrumento 1, nosotros te devolvemos 102 pesos el día 28 de febrero (puede verificar que el 2017 febrero tiene 28 días).

Además, la empresa tiene una política de venta muy estricta sobre sus inversionistas. De manera simple el vendedor les explica que existen d conjuntos distintos, es decir, $J_l \subset \{1, 2, ..., m\}$ es un conjunto l de instrumentos con l de 1 a d. Los d conjuntos cumplen con que son disjuntos, es decir, $J_{l_1} \cap J_{l_2} = \emptyset$. La condición que les pide el vendedor es que para un mes, solo se les permite invertir en uno de los conjuntos de instrumentos.

Luego de conversarlo entre ustedes deciden utilizar su conocimiento de optimización, para poder aprovechar al máximo esta oportunidad y tú te ofreces para escribir un modelo de optimización que permita determinar el plan óptimo de inversión, es decir, aquel que maximiza los retornos, cumpliendo las restricciones indicadas.

b) (6 puntos) Considere el problema P) dado por

$$\begin{aligned} P)\ \text{mín} \quad & \frac{1}{e^{-3x_1-7x_3-8x_8}} \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 4x_3 + 7x_7 = 2 \\ & -12x_5 + 8x_3 + 4x_4 = 28 \\ & x_2 + 3x_3 + 4x_5 + 5x_7 = 4 \\ & x_1 + x_6 - 6x_7 = 2 \\ & 14x_3 - 63x_8 = -28 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0, \end{aligned}$$

y responda las siguientes preguntas:

i) (2 puntos) ¿El problema tiene solución? Demuestre su respuesta (sin resolver el problema).

ii) (2 puntos) ¿El problema es linealizable? Si lo es, encuentre un problema lineal equivalente. Sino, muestre porqué no se puede.

iii) (2 puntos) Ahora resuelva el problema P) y entregue la solución óptima en caso de tener, sino explique porqué el problema es infactible.

c) (3 puntos) Considere el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$ y una solución básica factible no degenerada x^*. Al introducir la variable de holgura z, nos queda el poliedro $\{(x, z) | Ax + z = b, x \geq 0, z \geq 0\}$, que corresponde a la forma estándar de P. Muestre que $(x^*, b - Ax^*)$ es una solución básica factible no degenerada para la forma estandar.

Solución Problema 3.

a) Usted decide dejar el modelo en función de un parámetro T, ya que no se ha decidido un horizonte, pero el modelo debe correr, por lo que lo puede hacer correr para cualquier horizonte.

Definiremos las variables:

$$x_{i,t} := \text{ cantidad de dinero invertido en instrumento } i \text{ en el periodo } t.\ t = 1..T, \quad i = 1..m.$$

$$y_{j,t} := \begin{cases} 1 \text{ si se invierte en el conjunto } J_j \text{ en el periodo } t. \quad j = 1..d, \quad t = 1..T. \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

La idea es que el x es lo invertido el primer día del mes y también es el monto que me entrega el retorno el último día del mes. Luego, la función objetivo sería maximizar las ganancias, lo cual está definido por:

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,T} x_{i,T}$$

Aquí asumo que en un periodo t, me conviene invertir todo, tanto los k como las ganancias. Las restricciones serían las siguientes:

- Invierto todo los dolares en el periodo 1.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i1} = k$$

- Invierto todo los dolares (contando las ganancias) al final del periodo t en el periodo $t+1$.

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{it} x_{it} = \sum_{i=1}^{m} x_{it+1} \quad \forall t = 1..T-1$$

- Si invierto en instrumento del conjunto J_j en el periodo t, entonces activo la variable binaria y correspondiente.

$$\sum_{i \in J_j} x_{it} \leq N y_{jt} \quad \forall j = 1..d \quad \forall t = 1..T$$

- Solo invierto en un conjunto J_j por periodo t.

$$\sum_{j=1}^{d} y_{jt} = 1 \quad \forall t = 1..T$$

- Naturaleza de las variables.

$$y_{j,t} \in \{0,1\} \quad \forall j = 1..d \;\; \forall t = 1..T$$
$$x_{i,t} \geq 0 \quad \forall i = 1..m \;\; \forall t = 1..T$$

OBS: La restricción que solo se invierta en un conjunto J, puede ser reemplazada por restricciones de la forma $y_{j,t} y_{l,t} = 0 \quad \forall j, l = 1..d$ con $j \neq l$.

b) *i)* Podemos pasar el conjunto de restricciones a su forma matricial.

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & -63 & -28 \end{array}\right).$$

Primero que todo, podemos factorizar algunas restricciones para que se vea mejor la factibilidad. La matriz nos queda:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & -4 \end{array}\right).$$

Podemos ver que hay muchas columnas con solo un número, por lo que podemos intentar darle valores a las variables para buscar una solución factible.

Por ejemplo, podemos elegir $x_8 = \frac{4}{9}$ y $x_3 = 0$ para cumplir la ultima restricción. Luego, $x_1 = 2$ y $x_7 = 0$ para cumplir la segunda. Así, nos quedan 3 ecuaciones que se simplifican como:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Que sería usando las variables x_1, x_2, x_4, x_5, x_6 y x_8. Pero como $x_1 = 2$ y como x_8 no afecta el sistema, podemos simplificarlo en:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Lo que nos deja $x_6 = 0$. Luego, podemos elegir $x_5 = 0$, lo que nos deja $x_4 = 7$ y $x_2 = 4$ y se cumplen todas las igualdades con solo números ≥ 0. Por lo tanto el conjunto es factible.

ii) Podemos tomar logaritmo en la función objetivo, ya que es creciente. lo que nos deja el problema como:

$$\begin{aligned} P)\ \text{mín} \quad & 3x_1 + 7x_3 + 8x_8 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 4x_3 + 7x_7 = 2 \\ & -12x_5 + 8x_3 + 4x_4 = 28 \\ & x_2 + 3x_3 + 4x_5 + 5x_7 = 4 \\ & x_1 + x_6 - 6x_7 = 2 \\ & 14x_3 - 63x_8 = -28 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0, \end{aligned}$$

Lo que es un problema lineal equivalente.

iii) Resolvamoslo con Simplex. Se puede elegir una base arbitraria y resolverse de la manera que se quiera.

Partamos con la base x_2, x_4, x_6, x_7 y x_8. Lo que nos da:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -63 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que, podemos calcular que:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ \frac{13}{7} & \frac{24}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{9} & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} \frac{18}{7} \\ 7 \\ \frac{26}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Además, tenemos que

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad c_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Con lo que podemos calcular que:

$$\overline{c}_R = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{16}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que nos da que todos los costos reducidos son positivos, por lo que estamos en el óptimo y es:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{18}{7} \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ \frac{26}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

c) Notemos primero que $p := (x^*, b - Ax^*)$ está en el poliedro nuevo, ya que $x^* \geq 0$ y $b - Ax^* \geq 0$. Consideremos, sin perder generalidad, que las restricciones activas en x^* son las primeras k desigualdades de $Ax \leq b$ y $x_i \geq 0$ para $i = 1, ..., l$, para algunas constantes $k, l \geq 0$. Con esto, las restricciones activas en p son $Ax + z = b, x_i \geq 0$ para $i = 1, ..., l$ y $z_j \geq 0$ para $j = 1, ..., k$. Ahora, si (x, z) satisface $Ax + z = b, x_i \geq 0 \; \forall i = 1, ..., l, z_j \geq \; \forall j = 1, ..., k$, tendremos que x satisface las primeras k desigualdades de $Ax \leq b$ con igualdad puesto que $z_j = 0$ para $j = 1, ..., k$. Con esto, x es solución de $a_i^T x = b_i$ (a_i es la fila i de A) para cada $i = 1, ..., k$ y $x_1 = ... = x_l = 0$, de manera que $x = x^*$, porque x^* es la solución única al sistema. Con esto tendremos que $z = b - Ax^*$, y por lo tanto p es solución básica factible. Notemos acá que el número de restricciones activas es $m+l+k$, y si p fuera degenerado entonces $m + l + k > n + m$, osea que $l + k > n$, lo que contradice la no degenerancia de x^*.

Problema 4. (15 puntos)

a) (8 puntos) Chile quiere hacerse verde. Para demostrar su compromiso al mundo, ha firmado un acuerdo en el que se compromete que para el 2030 reducirá sus emisiones de carbono en un 30 % con respecto a lo que emitió el 2015, el cual fue de b. En caso de no poder cumplir la promesa, se tendrán que comprar bonos de carbono sobre el exceso emitido a un precio de β dolares por tonelada de CO_2. Para cumplir con su promesa, se busca cambiar las fuentes de generación de energía (puede asumir que toda la emisión de Chile es por energía). Actualmente existe un conjunto J de plantas termoeléctricas, las cuales tienen un costo de generación de energía $g_{j,t}\left[\frac{GWatt}{USD}\right]$ para cada año t, una tasa de emisión $f_j\left[\frac{TonCO_2}{Gwatt}\right]$ y una emisión fija $e_{j,t}$ debido a la naturaleza de las plantas termoeléctricas, es decir, emitirán esa cantidad aunque la planta esté apagada.

Además, se tiene una serie de proyectos eco-sustentables I, los cuales no emiten CO_2, que tienen un costo de construcción c_i y un tiempo de construcción s_i. La tasa de producción energética es de $h_{i,t}\left[\frac{GWatt}{USD}\right]$, pero la capacidad máxima de producción en cada periodo es de $m_{i,t}$.
Para contrarrestar la contaminación de las plantas termoeléctricas que no se quieren ocupar más, se puede hacer una limpieza del lugar, la cual requiere de filtros de aire y uso de elementos que hacen inviable el volver a usar la planta, pero que permite cerrarla sin que genere más contaminación. Esta limpieza tiene un costo de $k_{t,j}$.
Otro factor importante es la aprobación popular de las medidas, la cual otorga estabilidad al gobierno. Los expertos asesores del ministro de medio ambiente determinaron que si se emite más de a toneladas de CO_2, la gente estará descontenta y eso se traduce para su partido político como un costo extra de α por tonelada de CO_2 emitido sobre este límite. También se sabe que si no se cumple la demanda d_t el gobierno se desestabilizará a tal punto que habrá una revolución, por lo que no es una opción el generar menos energía que eso.
Los expertos asesores del ministro casualmente son amigos suyo, por lo que le piden ayuda sobre cómo manejar la implementación de plantas eco-sustentables con el menor costo posible. Le piden generar un modelo de optimización lineal entero mixto que le permita al ministro decidir qué hacer para el futuro de Chile, teniendo en cuenta que al final del día, al ministro le interesa minimizar costos, pero cumpliendo con todas las exigencias.

b) (3 puntos) Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$. Suponga que en una solución básica factible se tienen k restricciones activas, con $k > n$. ¿Es cierto que existen exactamente $\binom{k}{n}$ bases que llevan a esta solución básica factible? Justifique su respuesta de manera formal.

c) (3 puntos) Considere el problema de minimizar $c^T x$ en el poliedro P. Demuestre lo siguiente:

i) (2 puntos) Una solución factible x es óptima ssi $c^T d \geq 0$, para toda dirección factible d en x

ii) (1 puntos) Una solución factible x es la única solución óptima ssi $c^T d > 0$, para toda dirección factible d en x

Solución Problema 4.

a) Se tienen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} T :=& \{ \text{ Conjunto de años} \} \\ J :=& \{ \text{ Conjunto de termoeléctricas} \} \\ I :=& \{ \text{ Conjunto de plantas alternativas} \} \end{aligned}$$

Definiremos las variables:

$$\begin{aligned} x_{i,t} :=& \text{ producción energética de la planta } i \in I \text{ en el tiempo } t \in T \\ y_{j,t} :=& \text{ producción energética de la planta } j \in J \text{ en el tiempo } t \in T \\ x_a :=& \text{ exceso de contaminación sobre } a \\ x_b :=& \text{ exceso de contaminación sobre } 0{,}7b * 15 \\ z_{j,t} :=& \begin{cases} 1 \text{ si la planta } j \text{ se cierra en } t \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \\ p_{i,t} :=& \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq s_i \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \\ w_i :=& \begin{cases} 1 \text{ si la planta } i \text{ se decide abrir} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Luego, la función objetivo sería minimizar el costo total, el cual está definido por:

$$\text{mín} \sum_{t \in T} \left[\sum_{j \in J} \frac{y_{jt}}{g_{jt}} + \sum_{i \in I} \frac{x_{it}}{h_{it}} \right] + \sum_{i \in I} w_i c_i + \sum_{t \in T, j \in J} k_{jt} z_{jt} + x_a \alpha + x_b \beta$$

Las restricciones serían las siguientes:

- satisfacer la demanda.

$$\sum_i x_{it} + \sum_j y_{jt} \leq d_t \quad \forall t \in T$$

- No producir en una termoeléctrica cerrada.

$$y_{jt} \leq M(1 - \sum_{t' \leq t} z_{jt'}) \quad \forall (j,t) \in J \times T$$

- Se puede cerrar una sola vez la planta.

$$\sum_t z_{jt} \leq 1 \quad \forall (j,t) \in J \times T$$

- No producir en una planta que no fue abierta.

$$\sum_t x_{it} \leq w_{it} M \quad \forall i \in I$$

- Caracterización apropiada de p_i

$$(s_i - t) p_{it} \leq (1 - p_{i,t}) M \quad \forall (i,t) \in I \times T$$

- No producir energía en una planta en construcción.

$$x_{it} \leq p_{i,t} M \quad \forall (i,t) \in I \times T$$

- No se puede producir más de la capacidad de la planta

$$x_{it} \leq m_i \quad \forall (i,t) \in I \times T$$

- Caracterización de las variables de exceso

$$\begin{aligned}
x_a &\geq \sum_{j \in J, t \in T} y_{jt} f_{jt} + \sum_{j \in J, t \in T} e_{jt}(1 - \sum_{t' \leq t} z_{jt}) - a \\
x_b &\geq \sum_{j \in J, t \in T} y_{jt} f_{jt} + \sum_{j \in J, t \in T} e_{jt}(1 - \sum_{t' \leq t} z_{jt}) - 15b * 0,7 \\
x_a &\geq 0 \\
x_b &\geq 0
\end{aligned}$$

- Naturaleza de las variables.

$$\begin{aligned}
x_{it} &\in \{0,1\} \quad \forall (i,t) \in I \times T \\
z_{jt}\ n\{0,1\}i &\quad \forall (j,t) \in J \times T \\
p_{it} &\in \{0,1\} \quad \forall (i,t) \in I \times T \\
y_{jt} &\geq 0 \quad \forall (j,t) \in J \times T \\
x_{it} &\geq 0 \quad \forall (i,t) \in I \times T
\end{aligned}$$

b) No es siempre cierto, de hecho la base que define a una solución degenerada puede ser única. Vemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

donde $m = 2$, luego hay solo tres posibles bases: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$. La tercera la descartamos porque su matriz base B no es invertible. Para cada base, tendremos que $x_1 = 0$ (resolver ecuaciones lineales en cada caso), y los vértices $(0,1,0), (0,0,1)$ respectivamente. Notar que ambos son degenerados, y ambos tienen una única base que los define. El enunciado propone que este número debería ser $\binom{k}{n} = \binom{4}{3} > 1$.

c) *i*) $\Rightarrow$ por contradicción. Sea x solución óptima. Esto implica que:

$$c^T x \leq c^T y \quad \forall y \in P$$

Ahora, supongamos que existe una dirección de descenso factible ($\exists\ d : c^T d < 0$). ahora definimos $y := x + \theta d$ con $\theta > 0$. A partir de un valor de θ se cumple que $y \in P$, ya que es una dirección factible. Con x óptimo se cumple que.

$$\begin{aligned}
c^T x &\leq c^T y \\
c^T x &\leq c^T (x + \theta d) \\
0 &\leq \theta c^T d \\
0 &\leq c^T d \\
&\rightarrow \leftarrow
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Se tiene que $c^T d \geq 0$ para toda dirección factible d. Sea $y \in P$, Como P es un poliedro, se tiene que que $d = y - x$ es una dirección válida para x. Luego:

$$\begin{aligned}
c^T d &\geq 0 \\
c^T (y - x) &\geq 0 \\
c^T y &\geq c^T x
\end{aligned}$$

Por lo que x es óptimo.

ii) $\Rightarrow$ Contradicción. Sea x único óptimo del problema de minimización ($c^T x < c^T y \quad \forall y \in P$). Supongamos $\exists\ \overline{d}$ dirección factible de desplazamiento tal que $c^T \overline{d} \leq 0$. Como es una dirección factible en x, se puede escribir como $\overline{d} = y - x$ para algún $y \in P$. Luego.

$$\begin{aligned} c^T \overline{d} &\leq 0 \\ c^T (y - x) &\leq 0 \\ c^T y &\leq c^T x \\ &\rightarrow \leftarrow \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Supongamos que $c^T d > 0$ para toda dirección factible en x, pero que x no es el único óptimo. Esto quiere decir que existe un $y \in P$ tal que:

$$c^T x \geq c^T y$$

Luego, como y está en el poliedro, se tiene que $d = y - x$ es una dirección de desplazamiento factible en x (usando que el poliedro es convexo, simplemente es avanzar en a y desde x). Luego

$$\begin{aligned} 0 &\geq c^T (y - x) \\ 0 &\geq c^T d \\ &\rightarrow \leftarrow \end{aligned}$$