PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2022 - 2
Profesores: M. Castro - R. Cuadrado - M. Favereau - M. Klapp - E. Salgado

Interrogación 2
Duración: 150 minutos.

Pregunta 1: (15 puntos)

Suponga que usted es el encargado de una pastelería que durante la mañana recibe pedidos *online* para despacho a domicilio en la tarde. Para ello, usted ha empleado a un motorista que trabaja entre las 12:00pm y las 8:00pm ejecutando despachos de ida y vuelta entre el restaurante y un domicilio, entregando un pedido a la vez.

Para estimar el trabajo del motorista en la tarde, usted recoge a mediodía toda la información de pedidos solicitados en la mañana y le consulta al chef pastelero cuándo tendrá preparado cada uno. Hoy hay n pedidos pendientes y cada pedido $i \in \{1, ..., n\}$ fue solicitado por un cliente en el minuto $a_i > 0$ del día. Además, se estima que el pedido $i \in \{1, ..., n\}$ estará preparado por el chef y listo para ser despachado en el minuto $r_i \geq a_i$ del día.

Suponga también que usted posee una campaña de marketing en la cual le ofrece al cliente un *click-to-door time* no mayor a D minutos, es decir, no pueden transcurrir más de $D > 0$ minutos desde que el pedido se gatilla *online* (el *click*) hasta que se toca el timbre con el pedido en la puerta de la casa del cliente (el *door*). Si usted se atrasa con el despacho del pedido i y no cumple con el *click-to-door time*, entonces será gratis para el cliente e incurrirá en una pérdida de $\$p_i$ pesos.

Finalmente, suponga que el motorista comienza a trabajar a mediodía (minuto 720), termina su jornada a las 8:00pm (minuto 1200), tarda $t_i > 0$ minutos en viajar entre restaurante y el domicilio del cliente que hizo el pedido i (en cualquier dirección), tarda 5 minutos en atender a cada cliente en su domicilio y toma un descanso de 10 minutos en el restaurante entre dos despachos consecutivos.

(a) (10 puntos) Formule un modelo lineal entero mixto que determine el orden en el cual se debe despachar toda la lista de pedidos $\{1, \ldots, n\}$ en la jornada del motorista para minimizar la pérdida total generada por entregarle atrasado a algunos clientes.

Solución: Variables:

(i) $x_{ij} \in \{0, 1\}$: si pedido i se despacha inmediatamente antes que $j \neq i$.

(ii) x_{0i}, $x_{i(n+1)} \in \{0, 1\}$: variables adicionales que indican si el pedido i es el primero/último en ser despachado, respectivamente.

(iii) $y_i \geq 0$: tiempo de despacho de pedido i.

(iv) $z_i \in \{0, 1\}$: si se atrasa pedido i.

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i & \\
\text{s.a.} & y_i + t_i - a_i - D \leq M \cdot z_i & \forall i \in \{1, ..., n\} \\
& y_j + M \cdot (1 - x_{ij}) \geq y_i + 2 \cdot t_i + 15 & \forall i, j \in \{1, ..., n\} : i \neq j \\
& \text{máx}(720, r_i) \leq y_i \leq 1200 & \forall i \in \{1, ..., n\} \\
& x_{i(n+1)} + \sum_{j=1:j\neq i}^{n} x_{ij} = x_{0i} + \sum_{j=1:j\neq i}^{n} x_{ji} = 1 & \forall i \in \{1, ..., n\} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in \{1, ..., n\} : i \neq j \\
& z_i \in \{0, 1\} & \forall i \in \{1, ..., n\}
\end{array}
$$

Nota de corrección: También se podría modelar con una variable que represente que un pedido se despacha antes que otro (no necesariamente inmediatamente antes)

Nota de corrección: 4 puntos por determinar correctamente las decisiones del modelo y 6 puntos por escribir un modelo correcto.

(b) (5 puntos) Edite el modelo anterior agregando variables y restricciones que estime conveniente para modelar la siguiente situación:

Todos los pedidos ordenados por clientes hasta las 10:00am (es decir, antes o igual que el minuto 600) deben despacharse a domicilio antes que todo pedido ordenado después de las 10:00am.

Ayuda: No necesita reescribir todo el modelo de nuevo. Sólo detalle los cambios que haría.

Solución: Defina $w \geq 0$ como una variable igual a la cota superior al tiempo de despacho de todas las órdenes que llega antes de las 10.

Luego, debe agregar las siguientes restricciones:

$$
\begin{array}{lll}
y_i & \leq w, & \forall i \in \{1, ..., n\} : a_i \leq 600 \\
y_i & \geq w, & \forall i \in \{1, ..., n\} : a_i > 600
\end{array}
$$

Pregunta 2: (25 puntos)

Parte 1 (14 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal continua:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & 3x_1 + x_2 & & \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 & \geq & 2 \\ & 4x_1 - 2x_2 & \geq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) (2 puntos) Conviértalo a un modelo equivalente en forma estándar.

Solución: Para estandarizar es necesario añadir variables de exceso no negativas en cada desigualdad:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ & 4x_1 - 2x_2 - x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(b) (2 puntos) Escriba un modelo de optimización auxiliar que al resolverlo le entregue una solución básica inicial factible para este modelo.

Solución: Se pide el modelo de Fase I. Es necesario agregar dos variables artificiales ($y_1, y_2 \geq 0$), una por cada igualdad.

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & y_1 + y_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 = 2 \\ & 4x_1 - 2x_2 - x_4 + y_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

(c) (6 puntos) Resuelva su modelo auxiliar aplicando el algoritmo simplex (la variante que usted desee) y encuentre una solución básica inicial factible para el modelo original.

Solución:

Iteración 1: $B = \{y_1, y_2\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución: $x_B = A_B^{-1} b = [2 \;\; 3]^\top$
Costos reducidos: $r_N^\top = c_N^\top - c_B^\top \bar{A}_N = [-5 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1]$

Entra a la base x_1, sale de la base y_2 ya que:

$$\min_{\bar{a}_{ij}>0, i\in B} \left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{4}$$

Iteración 2: $B = \{x_1, y_1\}$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_N = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 5/2 & -1 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Solución: $x_B = A_B^{-1} b = \bar{b} = [3/4 \;\; 5/4]^\top$
Costos reducidos: $r_N^\top = c_N^\top - c_B^\top \bar{A}_N = [-2.5 \;\; 1 \;\; -0.25 \;\; 1.25]$

Entra a la base x_2, sale de la base y_1 ya que:

$$\min_{\bar{a}_{ij}>0, i\in B} \left\{ \cdot, \frac{5/4}{5/2} \right\} = \frac{1}{2}$$

Iteración 2: $B = \{x_1, x_2\}$
Esta solución tiene valor 0, es decir, es óptima para el problema de Fase I. No es necesario hacer otra iteración. Hemos encontrado una base factible para la Fase II.

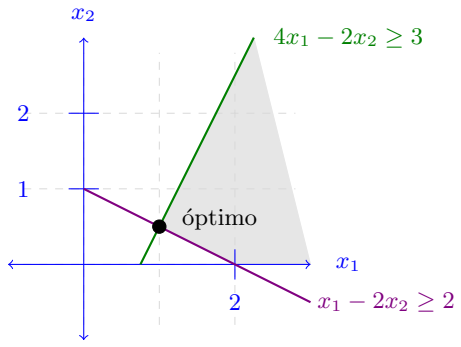
$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -1/10 \end{bmatrix}$$

La solución en esta iteración es: $x_B = A_B^{-1} b = \bar{b} = [3/4 \;\; 5/4]^\top$

Nota de corrección: No es válido aplicar solución gráfica en esta pregunta!

(d) (4 puntos) Descubra (como usted prefiera) una solución óptima del modelo original y justifique que lo es mediante condiciones del optimalidad.

Solución: Graficando el problema se tiene que la solución óptima es $(x_1^*, x_2^*) = (1, 0.5)$ con valor óptimo $v^* = 3.5$.



Para verificar que esta solución es óptima, calculamos los costos reducidos para la Fase II de simplex.

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -1/10 \end{bmatrix} \quad A_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_N = \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 \\ -2/5 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$r_N^\top = c_N^\top - c_B^\top \bar{A}_N = [0 \;\; 0] - [3 \;\; 1] \cdot \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 \\ -2/5 & 1/10 \end{bmatrix} = [1 \;\; 1/2] \geq 0$$

Cómo los costos reducidos son positivos, se cumplen las condiciones de optimalidad y, por lo tanto, podemos garantizar que la solución es óptima.

Nota de corrección: Se puede ocupar solución gráfica o simplex para encontrar el óptimo, pero se debe justificar que es óptima calculando los costos reducidos de simplex.

Ayuda: Invertir una matriz de 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Parte 2 (11 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal continua en forma estándar

$$\begin{aligned} \text{mín } & 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a. } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = 4 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + x_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0, \end{aligned}$$

donde a excepción de las holguras se desconocen los coeficientes de la matriz de restricciones

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponga que usted ha ejecutado el método simplex hasta un vértice óptimo definido por la base $B = \{1, 3\}$. El problema de optimización equivalente despejado sobre B es:

$$\begin{aligned} \text{mín } & z + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 \\ \text{s.a. } & \beta_1 x_1 - x_2 + \beta_2 x_3 + \beta_3 x_4 - 4\beta_5 x_5 = 8 \\ & x_1 + \beta_4 x_2 + 3x_4 - \beta_3 x_5 = \beta_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Sabiendo que existe solución óptima múltiple, determine todos los valores faltantes, es decir: z, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, β_1, β_2, β_3, β_4 y β_5. Explique.

Solución:

Como x_1 y x_3 son básicas, se debe cumplir que $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ y sus costos reducidos deben ser cero ($\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0$).

Queda el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{máx } & z + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 \\ \text{s.a. } & x_3 - x_2 + \beta_3 x_4 - 4\beta_5 x_5 = 8 \\ & x_1 + \beta_4 x_2 + 3x_4 - \beta_3 x_5 = \beta_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Nota de corrección: 4 puntos hasta acá.

Las columnas de A asociadas a las holguras forman la identidad, por lo que

$$A_B^{-1} I = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_3 & -4\beta_5 \\ 3 & -\beta_3 \end{bmatrix}.$$

Luego, del cálculo de solución asociada a la base se obtiene

$$A_b^{-1} b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} \beta_3 & -4\beta_5 \\ 3 & -\beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ \beta_5 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo este último sistema obtenemos que $\beta_3 = 2$ y $\beta_5 = 0$.

El objetivo z se obtiene evaluando la solución básica en los costos, es decir

$$z = 8 \cdot -4 = -32$$

Queda el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -32 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 \\ \text{s.a.} \quad & x_3 - x_2 + 2x_4 + 0x_5 = 8 \\ & x_1 + \beta_4 x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Nota de corrección: 3 puntos más por β_3, β_5 y z.

Además, los costos reducidos de variables no básicas x_2, x_4, x_5 son

$$c_D{}^T - c_B{}^T A_B{}^{-1} A_D = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix}.$$

Reemplazando: $\bar{c_D}^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \beta_4 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix}$

$\bar{c_D}^T = \begin{bmatrix} (2 - 2\beta_4) & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix}$

Es decir, $\alpha_4 = 2$, $\alpha_5 = 4$.

Nota de corrección: 3 puntos más por α_4 y α_5.

Finalmente, se sabe que el problema admite múltiples soluciones, por lo que el costo reducido $2 - 2\beta_4$ debe ser cero. Es decir $\beta_4 = 1$ (1 punto).

Con ello llegamos a que:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -32 + 0x_2 + 2x_4 + 4x_5 \\ \text{s.a.} \quad & 0x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 0x_5 = 8 \\ & x_1 + x_2 - 0x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Pregunta 3: (20 puntos)

Parte 1 (5 puntos)

Se sabe que $x = (2, 2, 0, 0)$ es la única solución óptima del siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & -5x_1 - x_2 + 12x_3 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 16 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

¿Para qué rango de valores de α el siguiente problema tiene un valor óptimo menor que el del problema anterior?

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & -5x_1 - x_2 + 12x_3 - x_5 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + \alpha x_5 & = & 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 & = & 16 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Solución: Los problemas son iguales salvo por una nueva columna.

La solución óptima anterior aumentada con $x_5 = 0$ es factible para P_2. Es decir, la base $B = \{1, 2\}$ es una base factible con valor objetivo $= -12$. Por otro lado, los costos reducidos de x_3 y x_4 no cambiarán y se mantendrán cumpliendo condiciones de optimalidad.

Por lo tanto, lo único a chequear es si es que agregar x_5 a la base disminuye el valor de la función objetivo, es decir si su costo reducido es negativo. Formalmente:

$$r_5 = -1 - (-5, 1) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = -1 - (-5, -1) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = -10\alpha + 6 < 0.$$

Es decir, si $\alpha > 3/5$ es conveniente agregarla a la base y el valor objetivo bajará.

Parte 2 (5 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal continua

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{mín} & 145x_1 + 260x_2 + 190x_3 & & \\ \text{s.a.} & 5x_1 + 4x_2 + x_3 & \geq & 1 \\ & 2x_1 + 8x_2 + x_3 & \geq & 4 \\ & 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 & \geq & 2 \\ & x & \geq & 0 \end{array}\right\} \texttt{(P)}$$

y su problema dual

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{máx} & y_1 + 4y_2 + 2y_3 & & \\ \text{s.a.} & 5y_1 + 2y_2 + 2y_3 & \leq & 145 \\ & 4y_1 + 8y_2 - 8y_3 & \leq & 260 \\ & y_1 + y_2 + 4y_3 & \leq & 190 \\ & y & \geq & 0. \end{array}\right\} \texttt{(D)}$$

Un amigo le dice que $y^\star = (0, 105/2, 20)$ es solución óptima del problema dual. Verifique si su amigo está en lo correcto corroborando el **Teorema de holguras complementarias**. ¿Es efectivamente $y^\star$ la solución óptima del problema dual?, ¿cuál es una solución óptima del primal?

Solución:

Primero verificamos que $y^\star$ es dual factible

- $\diamond$ $5 \cdot 0 + 2 \cdot 105/2 + 2 \cdot 20 = 145$ ✓
- $\diamond$ $4 \cdot 0 + 8 \cdot 105/2 - 8 \cdot 20 = 260$ ✓
- $\diamond$ $0 + 105/2 + 4 \cdot 20 = 265/2 < 190$ ✓

Si existe $x^\star$ primal factible tal que

$$\begin{array}{lcll} x_1^\star(5y_1^\star + 2y_2^\star + 2y_3^\star - 145) & = & 0 & (1) \\ x_2^\star(4y_1^\star + 8y_2^\star - 8y_3^\star - 260) & = & 0 & (2) \\ x_3^\star(y_1^\star + y_2^\star + 4y_3^\star - 190) & = & 0 & (3) \\ y_1^\star(5x_1^\star + 4x_2^\star + x_3^\star - 1) & = & 0 & (4) \\ y_2^\star(2x_1^\star + 8x_2^\star + x_3^\star - 4) & = & 0 & (5) \\ y_3^\star(2x_1^\star - 8x_2^\star + 4x_3^\star - 2) & = & 0 & (6) \end{array}$$

entonces, por el teorema de holguras complementarias, $x^\star$ e $y^\star$ son soluciones óptimas para `(P)` y `(D)` respectivamente.

(a) De (3), como $y_1^\star + y_2^\star + 4y_3^\star < 190$, se deduce que $x_3^\star = 0$.

(b) De (5), como $y_2^\star > 0$, se deduce que $2x_1^\star + 8x_2^\star + x_3^\star = 4$.

(c) De (6), como $y_3^\star > 0$, se deduce que $2x_1^\star - 8x_2^\star + 4x_3^\star = 2$.

Juntando (i), (ii) y (iii) se tiene que el vector $x^\star = (3/2, 1/8, 0)$ satisface las condiciones y es primal factible. Se concluye que $y^\star$ es óptimo para el problema dual y $x^\star$ es solución de `(P)`.

Parte 3 (10 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \max\limits_{x} & x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.a.} & -3x_1 + 4x_2 & \leq & 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq & 11 \\ & 2x_1 - x_2 & \leq & 5 \\ & xb & \in & \mathbb{Z}^2_+ \end{array}\right\} \texttt{(P)}$$

(a) (3 puntos) Grafique el dominio lineal relajado del problema. Encuentre una solución óptima y el valor óptimo de la relajación lineal $\texttt{(P}^{\texttt{R}}\texttt{)}$.

Solución:

El dominio de $\texttt{(P}^{\texttt{R}}\texttt{)}$ se ve en la figura 1.

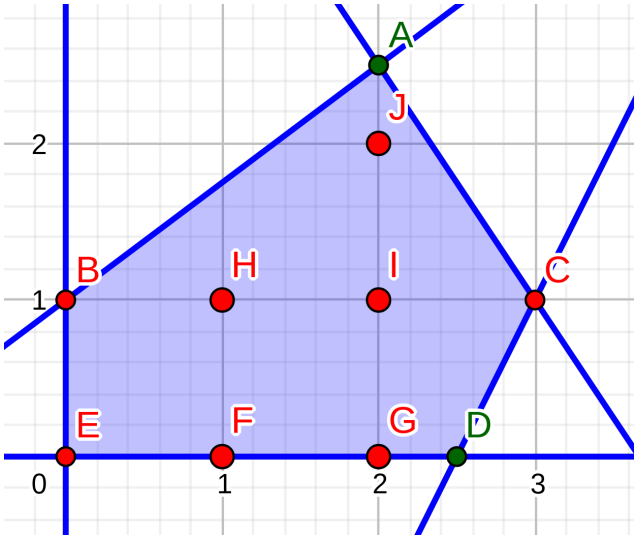


Figura 1: Dominio de $\texttt{(P}^{\texttt{R}}\texttt{)}$.

La evaluación de la función objetivo en los vértices es:

- $\text{v}(A) = \text{v}(2, \frac{5}{2}) = 7$
- $\text{v}(B) = \text{v}(0, 1) = 2$
- $\text{v}(C) = \text{v}(3, 1) = 5$
- $\text{v}(D) = \text{v}(\frac{5}{2}, 0) = \frac{5}{2}$
- $\text{v}(E) = \text{v}(0, 0) = 0$

Por lo que el vértice óptimo de $\texttt{(P}^{\texttt{R}}\texttt{)}$ es $(x_1, x_2) = (2, \frac{5}{2})$ con valor 7.

(b) (2 puntos) Determine, con la ayuda de su gráfico, las restricciones que determinan la envoltura convexa del conjunto de soluciones factibles de $\texttt{(P)}$.

Solución:

En la figura 2 se observa que la envoltura convexa del dominio de $\texttt{(P}^{\texttt{R}}\texttt{)}$ se puede describir con los semiespacios definidos por los vértices:

- $(J, C) : \ x_1 + x_2 \leq 4.$
- $(J, B) : \ -x_1 + 2x_2 \leq 2.$
- $(G, C) : \ x_1 - x_2 \leq 2.$
- $(B, E) : \ x_1 \geq 0$

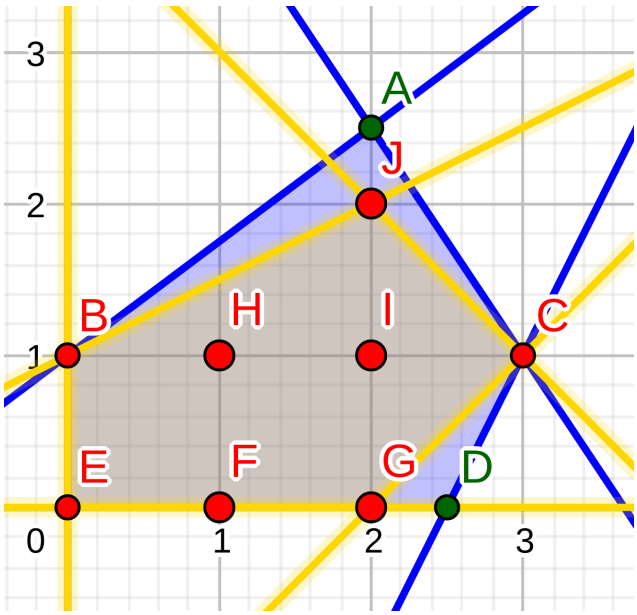


Figura 2: Envoltura convexa del dominio de (P).

◇ $(E, G) : x_2 \geq 0$

(c) (5 puntos) Resuelva el problema de minimización equivalente a (P) aplicando el algoritmo de B&B. En cada problema relajado que resuelva, indique la lista de problemas pendientes por resolver, el valor de la mejor cota inferior $\mathbf{v}^{\mathrm{LB}}$ al valor óptimo y su valor incumbente $\mathbf{v}^{\mathrm{I}}$.

Ayuda: Puede resolver gráficamente los problemas lineales que aparezcan.

Solución:

Considerando (P') el problema de minimización equivalente a (P), el árbol de B&B es el que se observa en la figura 3

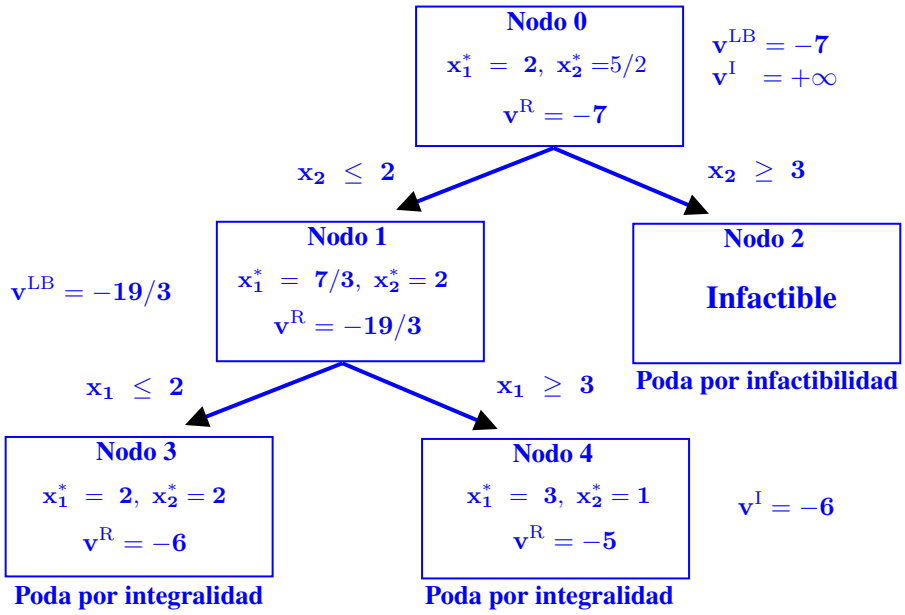


Figura 3: Árbol de B&B