Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Ayudante: Ignacio Monardes (iamonardes@uc.cl)
Profesores: Gonzalo Mendez, Gustavo Angulo, Esteban Salgado, Gonzalo Perez, Raimundo Cuadrado

ICS1113 - Optimización
1er semestre del 2023

Tarea 1 ICS1113

Reglas de la tarea:

- La tarea se puede realizar de a pares o de forma individual (las parejas pueden ser de diferentes secciones). En caso de ser de a pares se debe inscribir con su pareja en los grupos de Canvas.
- La tarea debe ser subida **por solo uno de los integrantes** a Canvas.
- La tarea parte el día 21/03/2023 a las 00:00 horas y se entrega el día 28/03/2023 a las 23:59 horas.
- Existirá la opción de usar un cupón de atraso solamente una vez entre las tres tareas, dando la posibilidad de entregar hasta 24 horas después de finalizada la entrega. Para poder acceder a este cupón se deben inscribir con el nombre de los integrantes de la tarea en un Google Forms que será habilitado en su debido tiempo y que cierra junto a la fecha oficial de la entrega. En caso de ser de a pares ambos deben tener un cupón disponible y se usará uno por cada uno y tendrán 24 horas extra (no 48).
- Las tareas atrasadas no serán corregidas, así que recuerden entregarlas a tiempo.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo y preparación individual de la interrogación a la que está asociada la tarea. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos ser a sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.
- Por entregar en latex se darán 3 décimas para la tarea entregada, las décimas no son transferibles a otras actividades. Para subirlo tendrá que enviar un archivo .pdf y el archivo .tex correspondientes. En caso de no entregar en latex basta con subir un archivo .pdf que contenga las respuestas. En ambos casos los .pdf tienen que contener los nombres de los integrantes.
- Se abrirá un foro en Canvas donde se responderán las dudas que puedan surgir del enunciado.

Pregunta 1 **[15 Puntos]**

Determine para qué valores de λ y β se tiene que los siguientes vectores son linealmente independientes:

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix} \; u_2 = \begin{bmatrix}\beta\\7\\9\end{bmatrix} \; u_3 = \begin{bmatrix}0\\\lambda\\2\end{bmatrix}$$

Nota: Escriba los valores como conjuntos que cumplan ciertas ecuaciones o inecuaciones y explique cómo los obtuvo.

Solution: Para saber que unos vectores son linealmente independientes podemos ver si los coeficientes de la combinación lineal para hacer el vector 0 son 0, en caso de no ser 0 entonces no son linealmente independientes.

(5 puntos por plantear el problema)

Es decir:

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0$$

Esto es equivalente a

$$\begin{bmatrix}(u_1) & (u_2) & (u_3)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = 0$$

Creamos la matriz y empezamos a pivotear:

$$\begin{bmatrix}1 & \beta & 0\\3 & 7 & \lambda\\6 & 9 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & \beta & 0\\0 & 7-3\beta & \lambda\\0 & 9-6\beta & 2\end{bmatrix}$$

Ahora debemos ver dos casos:

- Asumiendo que $7 - 3\beta \neq 0$:

$$\begin{bmatrix}1 & \beta & 0\\0 & 7-3\beta & \lambda\\0 & 0 & 2-\frac{(9-6\beta)}{7-3\beta}\lambda\end{bmatrix}$$

  Luego se requiere que $2 - \frac{(9-6\beta)}{7-3\beta}\lambda \neq 0$ y esto pasa si y solo si $14 - 6\beta - 9\lambda + 6\beta\lambda \neq 0$.

$$\{\lambda, \beta \in \mathbb{R} : 7 - 3\beta \neq 0 \wedge 14 - 6\beta - 9\lambda + 6\beta\lambda \neq 0\}$$

  (5 puntos por llegar a este conjunto)

- Asumiendo que $7 - 3\beta = 0$, tendremos $\beta = \frac{7}{3}$

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{7}{3} & 0\\0 & 0 & \lambda\\0 & -5 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & \frac{7}{3} & 0\\0 & -5 & 2\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\{\lambda, \beta \in \mathbb{R} : 7 - 3\beta = 0 \wedge \lambda \neq 0\}$$

  (5 puntos por llegar a este conjunto)

Finalmente el conjunto que cumple las condiciones es:

$$\{\lambda, \beta \in \mathbb{R} : 7 - 3\beta \neq 0 \wedge 14 - 6\beta - 9\lambda + 6\beta\lambda \neq 0\} \cup \{\lambda, \beta \in \mathbb{R} : 7 - 3\beta = 0 \wedge \lambda \neq 0\}$$

Alternativamente se puede llegar al siguiente conjunto: (10 puntos, 5 por cada lado)

$$\{\lambda, \beta \in \mathbb{R} : 9 - 6\beta \neq 0 \wedge 9\lambda - 6\beta\lambda - 14 + 6\beta \neq 0\} \cup \{\lambda, \beta \in \mathbb{R} : 9 - 6\beta = 0 \wedge 7 - 3\beta \neq 0\}$$

Pregunta 2 **[25 Puntos]**

Con el nuevo horario de cursos, la universidad quiere implementar una nueva forma para distribuir las salas. Sin embargo, se les es difícil definir una asignación de clases por salas manualmente por la gran cantidad que hay. Es por esto que te han encomendado la tarea de realizar un modelo que minimice la distancia total que recorren todos los alumnos para llegar a todas sus clases.

La universidad te da algunos datos que vas a necesitar tales como: la cantidad de salas que hay ns, la cantidad de alumnos na, la cantidad de clases nc, la cantidad de módulos t, el curso que tiene el alumno $j \in \{1, \ldots, na\}$ en el horario $h \in \{1, \ldots, t\}$ es $A_{j,h} \in \{1, \ldots, nc\}$, la distancia entre dos salas $d_{u,v}$, la capacidad de la sala como c_i para $i \in \{1, \ldots, ns\}$ y la cantidad de alumnos en la clase $i \in \{1, \ldots, nc\}$ en el modulo $h \in \{1, \ldots, t\}$ como $b_{i,h}$. Además, no puedes tener una clase que tenga más alumnos que puestos en la sala.

Puedes asumir que si un alumno está en su casa o en una ventana se establecerá que su curso es el 0 (es decir, $A_{j,h} = 0$) y que tiene costo 0 ir a desde cualquier cualquier sala a una ventana o de una ventana a una clase (en otras palabras $d_{u,0} = d_{0,u} = 0 \; \forall u \in \{0, \ldots, ns\}$).

Realice un modelo que cumpla lo deseado.

Solution: (3 puntos por cada variable) Las variables a usar son:

- $x_{i,k,h} := \begin{cases} 1 & \text{si la sala } i \text{ se usa para la clase } k \text{ en la hora } h \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$
- $y_{i_1,i_2,j,h} := \begin{cases} 1 & \text{si y solo si el alumno } j \text{ va de la sala } i_1 \text{ a la sala } i_2 \text{ del al terminar el modulo } h \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$
- $cost_{j,h}$:= El costo del alumno $j \in \{1, \ldots, na\}$ para ir de la clase del modulo h a la del módulo $h+1$

(2 puntos por restricción) Las restricciones son:

1. Una sala no puede ser ocupada por más de una clase en el mismo módulo.

$$\sum_{k=1}^{nc} x_{i,k,h} \leq 1 \; \forall i \in \{1, \ldots, ns\} \; \forall h \in \{1, \ldots, t\}$$

2. Al no tener clases se asigna la sala 0.

   Creamos el parámetro $B_{j,h} = \begin{cases} 1 & \text{si } A_{j,h} > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

   Luego:

$$x_{0,A_{j,h},h} = 1 - B_{j,h} \;\; \forall j \in \{1, \ldots, na\} \; \forall h \in \{1, \ldots, t\}$$

   Alternativamente:

$$x_{i,A_{j,h},h} \leq A_{j,h} \; \forall i \in \{1, \ldots, ns\} \; \forall j \in \{1, \ldots, na\} \; \forall h \in \{1, \ldots, t\}$$

3. Todas las clases deben tener alguna sala.

$$\sum_{i=0}^{ns} x_{i,A_{j,h},h} = 1 \; \forall j \in \{1, \ldots, na\} \; \forall h \in \{1, \ldots, t\}$$

4. Relacion de variables entre x e y.

$$\begin{aligned} 2 \cdot y_{i_1,i_2,j,h} &\leq x_{i_1,A_{j,h},h} + x_{i_2,A_{j,h+1},h+1} \\ & \quad \forall i_1, i2 \in \{0,\ldots,ns\}\ \forall j \in \{1,\ldots,na\}\ \forall h \in \{1,\ldots,t-1\} \\ x_{i1,A_{j,h},h} + x_{i2,A_{j,h+1},h+1} - 1 &\leq y_{i_1,i_2,j,h}\ \forall i_1, i2 \in \{0,\ldots,ns\} \\ & \quad \forall i_1, i2 \in \{0,\ldots,ns\}\ \forall j \in \{1,\ldots,na\}\ \forall h \in \{1,\ldots,t-1\} \end{aligned}$$

Alternativamente se puede resolver como:

$$\begin{aligned} y_{i_1,i_2,j,h} &\leq x_{i_1,A_{j,h},h} \\ & \quad \forall i_1, i2 \in \{0,\ldots,ns\}\ \forall j \in \{1,\ldots,na\} \\ & \quad \forall h \in \{1,\ldots,t-1\} \\ y_{i_1,i_2,j,h} &\leq x_{i_2,A_{j,h+1},h+1} \\ & \quad \forall i_1, i2 \in \{0,\ldots,ns\}\ \forall j \in \{1,\ldots,na\} \\ & \quad \forall h \in \{1,\ldots,t-1\} \\ 1 - (1 - x_{i_1,A_{j,h},h}) - (1 - x_{i_2,A_{j,h+1},h+1}) &\leq y_{i_1,i_2,j,h} \\ & \quad \forall i_1, i2 \in \{0,\ldots,ns\}\ \forall j \in \{1,\ldots,na\} \\ & \quad \forall h \in \{1,\ldots,t-1\} \end{aligned}$$

5. El costo del alumno j de cambiarse de clase en el modulo h.

$$cost_{j,h} = \sum_{i_1=0}^{nc} \sum_{i_2=0}^{nc} y_{i_1,i_2,j,h} \cdot d_{i_1,i_2}\ \forall j \in \{1,\ldots,na\}\ \forall h \in \{1,\ldots,t\}$$

6. La sala puede tener a todos los alumnos del curso.

$$x_{i,k,h} \cdot b_{k,h} \leq c_i\ \forall i \in \{1,\ldots,ns\}\ \forall k \in \{1,\ldots,nc\}\ \forall h \in \{1,\ldots,t\}$$

7. Naturaleza de las variables.

$$\begin{aligned} x_{i,k,h} &\in \{0,1\}\ \forall i \in \{0,\ldots,ns\}\ \forall k \in \{1,\ldots,nc\}\ \forall h \in \{1,\ldots,t\} \\ y_{i_1,i_2,j,h} &\in \{0,1\}\ \forall i_1, i_2 \in \{0,\ldots,ns\}\ \forall j \in \{1,\ldots,na\}\ \forall h \in \{1,\ldots,t\} \\ cost_{j,h} &\in \mathbb{R}\ \forall j \in \{1,\ldots,na\}\ \forall h \in \{1,\ldots,h\} \end{aligned}$$

(2 puntos por FO) Finalmente, la función objetivo es:

$$\text{mín} \sum_{j=1}^{na} \sum_{h=1}^{t} cost_{j,h}$$

Pregunta 3 **[20 Puntos]**

Alice ha decidido abrir un restaurante y quiere producir n tipos de platos con m utensilios diferentes y na alimentos. Pero Alice se siente desordenada y te ha pedido optimizar la producción de los pedidos durante los siguientes D días y cada día tiene T unidades de tiempo.

Cada día d tiene C_d pedidos, donde el parámetro $p_{i,d}$ especifica el tipo del $i-$ésimo pedido del día d, y el pedido se puede empezar a procesar desde la hora $h_{i,d}$. Cada tipo de plato $k \in \{1, \ldots, n\}$ necesita $t_{k,j}$ tiempo (de forma seguida) del utensilio $j \in \{1, \ldots, m\}$ y como cada utensilio es diferente no puedes producir más de un producto al mismo tiempo. Alice quiere dar un buen servicio, así que cada plato se puede demorar a lo más una cantidad α de tiempo.

También tienes que considerar que cada tipo de plato de comida $k \in \{1, \ldots, n\}$ requiere una cantidad $A_{k,a}$ de alimento $a \in \{1, \ldots, na\}$, donde comprar el alimento a tiene un costo c_a de compra. Pero salir a comprar tiene un costo constante de $Ccomp$, por lo que no es necesario comprar todos los días y tienes a tu disposición un inventario para guardar la comida necesaria con capacidad Cap con costo unitario f_a.

Formule un modelo que minimice los costos y cumpla con las condiciones que te pide Alice para tener un buen restaurante.

Nota: Puedes considerar que el horizonte de planificación D es suficientemente corto para que no se descomponga ningún alimento y puedes considerar que el tiempo que se demora en producir un plato es igual al tiempo que termina de usar el último utensilio.

(a) [5 Puntos] Modele las variables del problema.

Solution: (1 punto cada variable)

- $l_{i,j,d}$:= hora de inicio del pedido i en el utensilio j el día d.
- $z_{i_1,i_2,j,d} := \begin{cases} 1 & \text{si el utensilio } j \text{ se usa antes para el pedido } i_1 \text{ y después para } i_2 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$
- $I_{a,d}$:= Inventario del alimento a el día d.
- $x_{a,d}$:= Cantidad de alimento a que se compra el día d.
- $y_d := \begin{cases} 1 & \text{si se compra el día d} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

(b) [12 Puntos] Modele las restricciones del problema y la naturaleza de las variables.

Solution: (2 puntos por cada restriccion)

1. El $i-$ésimo pedido del día d no se puede demorar más de α y debe partir después de ser pedido:

$$\begin{aligned} h_{i,d} &\leq l_{i,j,d} \quad \forall d \in \{1, \ldots, D\}\ \forall i \in \{1, \ldots, C_d\}\ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \\ l_{i,j,d} + t_{p_{i,d},j} &\leq h_{i,d} + \alpha \quad \forall d \in \{1, \ldots, D\}\ \forall i \in \{1, \ldots, C_d\}\ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \\ l_{i,j,d} + t_{p_{i,d},j} &\leq T \quad \forall d \in \{1, \ldots, D\}\ \forall i \in \{1, \ldots, C_d\}\ \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

2. No se puede usar dos utensilios al mismo tiempo en dos pedidos (Asuma M un número

suficientemente grande):

$$\begin{aligned} z_{i_1,i_2,j,d} + z_{i_2,i_1,j,d} &= 1 \\ &\quad \forall d \in \{1,\dots,D\}\ \forall i_1, i_2 \in \{1,\dots,C_d\}\ \forall j \in \{1,\dots,m\} \\ l_{i_1,j,d} + t_{p_{i_1,d},j} &\leq l_{i_2,j,d} + M \cdot (1 - z_{i_1,i_2,j,d}) \\ &\quad \forall d \in \{1,\dots,D\}\ \forall i_1, i_2 \in \{1,\dots,C_d\}\ \forall j \in \{1,\dots,m\} \\ M \cdot z_{i_1,i_2,j,d} + l_{i_1,j,d} &\geq l_{i_2,j,d} + t_{p_{i_2,d},j} \\ &\quad \forall d \in \{1,\dots,D\}\ \forall i_1, i_2 \in \{1,\dots,C_d\}\ \forall j \in \{1,\dots,m\} \end{aligned}$$

3. Si no se compra en un día no se puede comprar ningún producto:

$$x_{a,d} \leq M \cdot y_d\ \forall a \in \{1,\dots,a\}\ \forall d \in \{1,\dots,D\}$$

4. Inventario:

$$I_{a,d} = I_{a,d-1} + x_{a,d} - \sum_{i=1}^{C_d} A_{p_{i,d},a}$$

5. Capacidad:

$$\sum_{a=1}^{na} I_{a,d} \leq Cap\ \forall d \in \{1,\dots,d\}$$

6. Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned} l_{i,j,d} &\geq 0\ \forall d \in \{1,\dots,D\}\ \forall i \in \{1,\dots,C_d\}\ \forall j \in \{1,\dots,m\} \\ z_{i_1,i_2,j,d} &\in \{0,1\}\ \forall d \in \{1,\dots,D\}\ \forall i_1, i_2 \in \{1,\dots,C_d\}\ \forall j \in \{1,\dots,m\} \\ I_{a,d}, x_{a,d} &\geq 0\ \forall a \in \{1,\dots,na\}\ \forall d \in \{1,\dots,D\} \\ y_d &\in \{0,1\}\ \forall d \in \{1,\dots,D\} \end{aligned}$$

(c) [3 Puntos] Modele la función objetivo.

Solution:

$$\text{mín} \sum_{d=1}^{D} \sum_{a=1}^{na} [I_{a,d} \cdot f_a + x_{a,d} \cdot c_a] + \sum_{d=1}^{D} y_d \cdot Ccomp$$

Solution: La solución alternativa asumiendo que no se producen múltiples platos al mismo tiempo. Para esto usaremos las siguientes restricciones:

- $l_{i,d}$:= hora de inicio del pedido i el día d.
- $z_{i_1,i_2,d} := \begin{cases} 1 & \text{si el pedido } i_1 \text{ se prepara antes que el pedido } i_2 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$
- $I_{a,d}$:= Inventario del alimento a el día d.
- $x_{a,d}$:= Cantidad de alimento a que se compra el día d.
- $y_d := \begin{cases} 1 & \text{si se compra el día d} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

Luego usamos las siguientes restricciones:

1. El $i-$ésimo pedido del día d no se puede demorar más de α y debe partir después de ser pedido:

$$\begin{aligned} h_{i,d} &\leq l_{i,d} \ \forall d \in \{1,\ldots,D\} \ \forall i \in \{1,\ldots,C_d\} \ \forall j \in \{1,\ldots,m\} \\ l_{i,d} + t_{p_{i,d},j} &\leq h_{i,d} + \alpha \ \forall d \in \{1,\ldots,D\} \ \forall i \in \{1,\ldots,C_d\} \ \forall j \in \{1,\ldots,m\} \\ l_{i,d} + t_{p_{i,d},j} &\leq T \ \forall d \in \{1,\ldots,D\} \ \forall i \in \{1,\ldots,C_d\} \ \forall j \in \{1,\ldots,m\} \end{aligned}$$

2. No se puede usar dos utensilios al mismo tiempo en dos pedidos (Asuma M un número suficientemente grande):

$$\begin{aligned} z_{i_1,i_2,d} + z_{i_2,i_1,d} &= 1 \\ &\quad \forall d \in \{1,\ldots,D\} \ \forall i_1, i_2 \in \{1,\ldots,C_d\} \ \forall j \in \{1,\ldots,m\} \\ l_{i_1,d} + t_{p_{i_1,d},j} &\leq l_{i_2,d} + M \cdot (1 - z_{i_1,i_2,d}) \\ &\quad \forall d \in \{1,\ldots,D\} \ \forall i_1, i_2 \in \{1,\ldots,C_d\} \ \forall j \in \{1,\ldots,m\} \\ M \cdot z_{i_1,i_2,d} + l_{i_1,d} &\geq l_{i_2,d} + t_{p_{i_2,d},j} \\ &\quad \forall d \in \{1,\ldots,D\} \ \forall i_1, i_2 \in \{1,\ldots,C_d\} \ \forall j \in \{1,\ldots,m\} \end{aligned}$$

El desarrollo de acá en adelante es idéntico al anterior.