PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2018
Profesores: M. Klapp - R. Cuadrado
A. Cataldo - J. González

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: 5 de septiembre

La tarea tiene un total de 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día miércoles 5 de septiembre a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (13 puntos)

a) (10 puntos) Suponga que usted es el *Sheriff* de una región que ha sido recientemente devastada por los robos del famoso ladrón de bancos, "Harry, el optimizador". En el último robo, "Harry"ha dejado un papel en el que tenía escrito el modelo de optimización según el cual decide qué banco robar y en qué momento. Lamentablemente, se perdió gran parte del significado del modelo y lo único que se pudo rescatar como información de este papel es lo siguiente:

Parámetros:

$$Q^t_{pb} = \text{Recompensa que se obtiene por robar el banco } b \text{ del pueblo } p \text{ el día } t.$$

$$C\text{: Capacidad máxima que puede robar "Harry" en un mismo día.} > 0$$

$$r\text{: Costo por cada robo realizado} > 0$$

$$P\text{: Conjunto de todos los pueblos.}$$

$$T = \text{Total de días en los que "Harry"planificó sus futuros robos.}$$

$$B_p\text{: Conjunto de bancos del pueblo } p.$$

Variables de decisión:

$$x^t_{pb} = \begin{cases} 1 & \text{Si "Harry" roba el banco } b \text{ del pueblo } p \text{ el día } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Modelo:

$$P) \qquad \max \sum_{t=1}^{T} y_t - r\left(\sum_{t=1}^{T}\sum_{p\in P}\sum_{b\in B_p} x^t_{pb}\right)$$

$$\begin{aligned}
s.a. \qquad & \sum_{b\in B_p} x^t_{pb} \leq 1 && ,\forall p \in P, \forall t \in \{1,\ldots,T\} \\
& \sum_{t=t'+1}^{t'+3} x^t_{pb} \leq 3(1 - x^{t'}_{pb}) && ,\forall p \in P, \forall b \in B_p, \forall t' \in \{1,\ldots,T-3\} \\
& \sum_{p\in P}\sum_{b\in B_p} x^t_{pb} \leq 2 && ,\forall t \in \{1,\ldots,T\} \\
& x^t_{pb} = 0 && ,\forall p \in P, \forall b \in B_p, \forall t \in L_t \\
& y^t \leq \sum_{p\in P}\sum_{b\in B_p} x^t_{pb} Q^t_{pb} && ,\forall t \in \{1,\ldots,T\} \\
& y^t \leq C && ,\forall t \in \{1,\ldots,T\} \\
& x^t_{pb} \in \{0,1\} && \forall p \in P, \forall b \in B_p, \forall t \in \{1,\ldots,T\} \\
& y_t \geq 0 && ,\forall t \in \{1,\ldots,T\}
\end{aligned}$$

Para poder arrestar a "Harry", de una explicación coherente y consistente, en palabras, a: qué podría representar la función objetivo, la regla impuesta por cada restricción, el significado de la variable y_t y

el conjunto de días L_t. [3]
Nota: Las interpretaciones del modelo pueden ser muchas, pero deben ser consistentes con el enunciado y con las condiciones matemáticas.

b) (3 puntos) Encuentre un equivalente lineal del siquiente problema de optimización:

$$P) \qquad \min_{x \geq 0} -EXP\left(-\left(\max_{i=1,\ldots,N}\{\alpha_i x + \beta_i\}\right)^2\right)$$

Solución Problema 1.

a) El objetivo del modelo es maximizar las ganacias de Harry por robar bancos.

F.O. : Maximiza el beneficio por robo de bancos y le resta el costo por robar cada banco .

Parámetros:

L_t : Conjunto de días en los que está prohibido robar. Cualquier interpretación que considere esta característica es correcta.

Variables:

y_t : Recompensa que obtiene "Harry" por robo de un banco el día t, con $t = 1, \ldots, T$

Restricciones:

(1) : No se puede robar más de un banco del mismo pueblo el mismo día.
(2) : No se puede robar el mismo banco con menos de 4 días de diferencia.
(3) : No se puede robar más de 2 bancos en un mismo día
(4) : Implica que no se puede robar los días del conjunto L_t
(5)y(6) : La recompensa diaria por robar un banco es el mínimo entre la riqueza del banco robado y la capacidad diaria del robo C.
(7)y(8) : Naturaleza de las variables.

b) La función $-ln(\cdot)$ es estrictamente decreciente, por lo tanto, al aplicarla a la función objetivo de P) se transforma en el problema equivalente P'):

$$P') \qquad \min_{x \geq 0} -\left(\max_{i=1,\ldots,N}\{\alpha_i x + \beta_i\}\right)^2$$

Aplicando la transformación $\sqrt{-\cdot}$ a P'), se puede plantear el problema equivalente P'')

$$P'') \qquad \min_{x \geq 0} \max_{i=1,\ldots,N}\{\alpha_i x + \beta_i\}$$

Finalmente, es posible plantear el problema lineal P''') que es equivalente a P) y se encuentra lo pedido:

$$P''') \qquad \min \quad \mu$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcll} \alpha_i x + \beta_i & \leq & \mu & , i = 1, \ldots, N \\ x & \geq & 0 & \end{array}$$

[3]Puede ser de ayuda revisar: Ferrer, J.C.; Gazmuri, P. y Muñoz, J.C. "Modelación de Problemas de Optimización.". Ejercicio 3.3 (Director de Cine). Disponible en SIDING.

Problema 2. (16 puntos)

a) (7 puntos) Considere el ejercicio 3.27 (Sello Discográfico) del libro Ferrer, J.C.; Gazmuri, P. y Muñoz, J.C. "Modelación de Problemas de Optimización.", disponible en SIDING. Manteniendo el problema lineal, modifique (i.e., cambie, quite o agregue restricciones, agregue variable, etc.) el modelo para cada una de las siguientes condiciones:

i) Suponga que el sello estimó un nuevo parámetro D_{ij} que indica el beneficio obtenido si es que la canción i y la canción j están en el mismo disco. Incluya este parámetro en la modelación.

ii) Existe un subconjunto L de canciones de "trap", de las cuales el sello exige que no hayan más de 3 canciones en un mismo disco para mantener la calidad musical.

iii) Para proteger la uniformidad en la cantidad de canciones entre los discos, el sello obliga a que la diferencia en la cantidad de canciones entre el disco con más canciones y el con menos canciones no sea mayor a α.

Nota: Las condiciones son independiente estre sí, es decir, debe asumir que cada modificación es única para cada condición.

b) (3 puntos) Suponga que usted debe administrar el flujo de agua entrante a un estanque muy grande, mediante un conjunto M de mangueras que están conectadas a este estanque. La función de flujo de agua que genera una manguera se puede representar como $F(t) = C_m e^{-(t-T_m)\alpha_m}$, siendo C_m, α_m parámetros propios de la manguera m, y T_m el día en que se abre la manguera m. Considere que usted debe abrir exactamente una manguera al principio de cada día (sin cerrar las que ya están abiertas de días anteriores), de tal forma que el flujo entrante de agua al inicio de cada día sea al menos Q. Construya un modelo de optimización (no necesariamente lineal) para T días (asuma que $|M| > T$), de tal forma que se maximice el flujo al principio del período T.

c) (6 puntos) Para responder las siguientes preguntas, debe leer el paper "Scheduling Medical Residents to Rotations: Solving the Large-Scale Multiperiod Staff Assignment Problem" subido en la página del curso[4] : (2 ptos c/u)

i) Explique detalladamenente cuáles son y por qué pueden ocurrir infactibilidades en la confección del calendario de los residentes.

ii) Explique en qué consiste la heurística de redondeo propuesta por los autores para resolver el problema. ¿Cómo se garantiza a través de este procedimiento que se encontrará una solución factible?

iii) Explique las restricciones sobre vacaciones y "PMR" de los residentes. Para ello, describa que hace matemáticamente cada restricción.

Solución Problema 2.

a) *i*) Se crea una nueva variable:

$$z_{ij}^d = \begin{cases} 1 & \text{Si la canción } i \text{ y la canción } j \text{ están en el mismo disco } d \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Se agregan tres nuevas restricciones:

$$\begin{aligned} 2z_{ij}^d \leq (y_i^d + y_j^d) \qquad & ,\forall i,j \in N : i \neq j, \forall d \in D \\ z_{ij}^d \in \{0,1\} \qquad & \forall i,j \in N : i \neq j, \forall d \in D \end{aligned}$$

A la función objetivo se le suma el término:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N : i \neq j} D_{ij} \left(\sum_{d \in D} z_{ij}^d \right)$$

[4]Franz, Lori S. and Miller, Janis L. (1993). Scheduling Medical Residents to Rotations: Solving the Large-Scale Multiperiod Staff Assignment Problem. Operations Research, 41(2), 269–279. https://doi.org/10.1287/opre.41.2.269

ii) Se agrega una nueva restricción al problema:

$$\sum_{i \in L} y_i^d \leq 3 \qquad , \forall d \in D$$

iii) Se agrega una nueva restricción al problema:

$$\sum_{i \in N} y_i^d - \sum_{j \in N} y_j^{d'} \leq \alpha \qquad , \forall d, d' \in D : d \neq d'$$

b) Variables de decisión:

$$x_m^t = \begin{cases} 1 & \text{Si se abre la manguera } m \text{ el día } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Modelo:

$$P) \qquad \text{máx} \sum_{t=1}^{T} \sum_{m \in M} x_m^t C_m e^{-(T-t)\alpha_m}$$

$$\begin{aligned} s.a. \qquad & \sum_{m \in M} x_m^t = 1 && , \forall t \in \{1, \ldots, T\} \\ & \sum_{t=1}^{T} x_m^t \leq 1 && , \forall m \in M \\ & \sum_{t'=1}^{t} \sum_{m \in M} x_m^{t'} C_m e^{-(t-t')\alpha_m} \geq Q && , \forall t \in \{1, \ldots, T\} \\ & x_m^t \in \{0, 1\} && \forall m \in M, \forall t \in \{1, \ldots, T\} \end{aligned}$$

Problema 3. (16 puntos)

a) (4 puntos) Demuestre rigurosamente las siguientes afirmaciones:

i) (2 puntos) Sea $P = \{\text{mín}\, f(x, y)\}$ con $f(x, y)$ una función estrictamente convexa y simétrica, es decir, $f(x, y) = f(y, x)$. Si (x^*, y^*) es solución óptima de P), entonces $x^* = y^*$.

ii) (2 puntos) Si $f(\vec{x})$ es convexa, entonces:

$$\lambda f(\vec{x}) + \gamma f(\vec{y}) + (1 - \lambda - \gamma) f(\vec{z}) \geq f(\lambda \vec{x} + \gamma \vec{y} + (1 - \lambda - \gamma)\vec{z}) \qquad , \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in D; \lambda, \gamma \in [0, 1]; \lambda + \gamma \leq 1$$

b) (8 puntos) Demuestre rigurosamente la veracidad de las siguientes afirmaciones:

i) (2 puntos) Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos y $S_1, \ldots, S_n$ conjuntos no necesariamente convexos. Entonces, el conjunto $T = ((C_1 \cup C_2) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} S_i))$ es convexo.

ii) (2 puntos) Sean C_1 y C_2 dos conjuntos convexos y $S_1, \ldots, S_n$ conjuntos no necesariamente convexos. Entonces, el conjunto $T = ((C_1 \cap S_1) \cap (C_2 \cup \bigcup_{i=2}^{n} S_i))$ es convexo.

iii) (2 puntos) Si se tiene el problema de optimización $P = \{\text{mín } f(x) : x \in D\}$ donde D es un conjunto abierto, no es posible demostrar que P admite solución óptima.

iv) (2 puntos) Sean P) y P') problemas equivalentes de optimización. Si se pueden comprobar las condiciones del teorema de la Hipótesis H para P), entonces también se cumplen para P').

c) (4 puntos) Considere el siguiente problema de optmización:

$$P) \qquad \text{mín} \qquad \text{máx}\left\{\sqrt{x^2+y^2}, |2x+3|\right\}$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} -3x+4y & \leq & 12 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

i) (1 puntos) Encuentre un problema equivalente a P) que sea diferenciable.

ii) (3 puntos) Sin graficar ni resolver, demuestre que el problema equivalente de P) encontrado en *i*) es convexo y admite al menos una solución óptima.

Solución Problema 3.

a) *i*) Como la función f es estrictamente convexa, se sabe que (x^*, y^*) es solución óptima única de P). Ahora, supongamos que $x^* \neq y^*$. Sabemos que f es simétrica, es decir, $f(x^*, y^*) = f(y^*, x^*)$, lo que implica que (y^*, x^*) e (x^*, y^*) son soluciones óptimas distintas y se contradice el hecho de que f es estrictamente convexa. Con esto, se demuestra que necesariamente $x^* = y^*$.

ii) Usando la convexidad de f, se puede comprobar que:

$$\alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y}) \geq f(\vec{w})$$

con $w = \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}$ y $\alpha \in [0,1]$. Luego, usando la convexidad de f nuevamente:

$$\begin{aligned} f(\beta\vec{w} + (1-\beta)\vec{z}) \leq & \beta f(\vec{w}) + (1-\beta) f(\vec{z}) \\ & \beta(\alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y})) + (1-\beta) f(\vec{z}) \end{aligned}$$

con $\beta \in [0,1]$. Ahora, tomando $\lambda = \beta\alpha \in [0,1]$ y $\gamma = (1-\alpha)\beta \in [0,1]$ se demuestra lo pedido:

$$\lambda f(\vec{x}) + \gamma f(\vec{y}) + (1-\lambda-\gamma) f(\vec{z}) \geq f(\lambda\vec{x} + \gamma\vec{y} + (1-\lambda-\gamma)\vec{z})$$

b) *i*) La afirmación es falsa, pues T puede ser no convexo. Basta tomar $C_1 = S_1 = \{(x,y) : x, y \in [0,1]\}$ y $C_2 = S_2 = \cdots = S_n = \{(x,y) : x \in [0,1], y \in [-2,-1]\}$. Se puede comprobar que $C_1 y C_2$ son convexos, y que el punto $(0.5, -0.5)$ no pertenece a T y que es combinación convexa de los puntos $(0.5,-1)$ y $(0.5,0)$. Con lo que se demuestra que T no es convexo.

ii) La afirmación es falsa. Basta considerar $C_1 = C_2 = [0,1]$, $S_1 = \cdots = S_n = \{0,1\}$. En este caso $T = \{0,1\}$ y no es convexo, con lo que se demuestra lo pedido.

iii) Esta afirmación es falsa. Basta considerar $P = \{\text{máx} -x(x-1) : x \in]0,1[\}$, en que sí es posible demostrar que admite solución óptima con $x = 0.5$

iv) Esta afirmación es falsa. Basta considerar los problemas $P = \{\text{mín } x : x \in [0,10]\}$ y $P' = \{\text{mín } \sqrt{x} : x \in [0,10]\}$. Ambos problemas son equivalentes, pues la función $\sqrt{\cdot}$ es estrictamente creciente sobre los no negativos. En el problema P) sí se cumplen las condiciones del teorema de la hipótesis H en P), sin embargo, en P') no se cumplen, pues la función objetivo no es convexa. Con esto, se demuestra lo pedido.

c) *i*) Se pueden plantear las siguientes equivalencias:

$$\iff P') \qquad \text{mín} \qquad \mu$$

$$
\begin{aligned}
&s.a. \\
&\qquad \begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+y^2} & \leq & \mu \\ |2x+3| & \leq & \mu \\ -3x+4y & \leq & 12 \\ y & \geq & 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iff P'') \qquad & \text{mín} \qquad \mu \\
&s.a. \\
&\qquad \begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+y^2} & \leq & \mu \\ |2x+3| & \leq & \mu \\ -3x+4y & \leq & 12 \\ y & \geq & 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iff P''') \qquad & \text{mín} \qquad \mu \\
&s.a. \\
&\qquad \begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+y^2} & \leq & \mu \\ 2x+3 & \leq & \mu \\ 2x+3 & \geq & -\mu \\ -3x+4y & \leq & 12 \\ y & \geq & 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

Finalmente, $P''')$ es un problema diferenciable equivalente.

ii) Se puede comprobar que $P''')$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano-Weierstrass:

- ◇ No vacío: El punto $(0,0)$ pertenece al dominio.
- ◇ Cerrado: El dominio es cerrado, pues todas las desigualdades son no estrictas
- ◇ Convexidad: La función objetivo, y las restricciones 2,3,4,5 son lineales, por lo tanto, son convexas. Además, la restricción 1 corresponde al interior de un círculo de radio μ centrado en $(0,0)$, es decir, es convexa. Con esto, el dominio y la función objetivo son convexas, entonces $P)$ es convexo.
- ◇ Acotado: La restricción 1 impone que el dominio se encuentre dentro del círculo ya mencionado, es decir, es un domnio acotado.

Finalmente, se demuestran todas las condiciones de B-W y se comprueba que $P)$ admite al menos una solución óptima.

Problema 4. (15 puntos)

El ejército de extraterrestres de la General Lyra ha invadido con éxito la sexta Región de nuestro país. La principal razón para invadir la Región de O'Higgins es su proximidad con la Región Metropolitana, a la que la General Lyra planea realizar su próximo ataque. En consecuencia, se ha instalado un gran número de familias de extraterrestres en el sector invadido y la General Lyra espera que se acostumbren rápido a su nuevo hogar para así planear la invasión.

La Generala Lyra está preocupada de que los extraterrestres adultos no puedan concentrarse en su misión si sus hijos no reciben una adecuada preparación militar, por lo que le ha encargado a su consejero Aliot que organice un sistema de centros de entrenamiento para los mini extraterrestres que llegaron a poblar la región junto a sus padres. Con este objetivo, el consejero Aliot ha decidido aprovechar los gimnasios ya existentes en el sector y junto con la creación de nuevos centros de entrenamiento, encontrar la localización óptima de estos centros para los niños alienígenas.

Se sabe que los extraterrestres están localizados en O comunas, y que el subconjunto $S \subseteq O$ contiene a aquellas comunas en las que se puede ubicar un centro de entrenamiento, considerando que en cada comuna podrá haber máximo uno de estos centros. Además, el subconjunto $G \subseteq O$ contiene a las comunas en las que ya existe un gimnasio adecuado para el entrenamiento, donde T_g representa la capacidad de extraterrestres que pueden asistir al centro situado en la comuna $g \in G$.

Sobre la distribución física, el parámetro r_{ij} representa la distancia en kilómetros entre las comunas i y j pertenecientes al conjunto O. Además, N_i representa el número de mini extraterrestres que habitan la comuna i (considere que **todos** los miniextraterrestres deben ser asignados a un centro de entrenamiento). Para este punto, la General Lyra ha dispuesto como condición que ningún niño extraterrestre puede recorrer más de D [km] para llegar a su centro de entrenamiento.
El consejero Aliot ha dispuesto que en cada comuna usted pueda escoger alguna de las 3 alternativas siguientes:

- ◇ Construir un nuevo centro de entrenamiento en comunas que no cuentan con gimnasio. Se pueden construir n tipos de centros, siendo W_n la capacidad de extraterrestres que pueden estudiar en un centro tipo n.
- ◇ Ampliar el gimnasio actual de la comuna, pasando de una capacidad de T_g a Q_0, con $T_g < Q_0$.
- ◇ Mantener las instalaciones actuales de la comuna a costo 0

El costo de construir un centro de entrenamiento de tipo n es de C_n [UMT] (Unidades Monetarias Terrícolas) y el costo de construir centros de entrenamiento que reemplacen a los gimnasios existentes es de C_e [UMT]. Además, la construcción de 2 centros de entrenamiento en comunas vecinas permite generar una economía de escala en la construcción de los centros en β unidades monetarias. Para ello, el parámetro binario V_{ij} tiene valor 1 si la comuna i es vecina de la comuna j, y 0 en otro caso.

La General Lyra ha dispuesto un presupuesto de P [UMT] para la operación de localización de los centros de entrenamiento militar para los mini extraterrestres.

En base a la información anterior se le pide:

a) (12 puntos) Plantear un problema de programación lineal que minimice el costo total de la localización de centros de entrenamiento, decidiendo en qué comunas construir, mantener y ampliar establecimientos y asignando a los mini extraterrestres a estos centros.

b) (3 puntos) ¿Cómo cambiaría el problema modelado en a) si en lugar de minimizar el costo se busca minimizar la distancia que recorren los mini extraterrestres?

Solución Problema 4.

a) Conjuntos:

O : Conjunto de comunas

S : Subconjunto de comunas en las que pueden haber centros de entrenamiento

G : subconjunto de comunas en las que ya hay un centro de entrenamiento o gimnasio

N : Tipos de centros de entrenamiento

Parámetros:

r_{ij}: distancia en kilómetros entre la comuna i y la comuna j

N_i: Número de mini extraterrestres de la comuna i que debe ser asignado a un centro de entrenamiento

D: distancia máxima en kilómetros que puede recorrer un extraterrestre

T_g: capacidad máxima de extraterrestres que pueden asistir al establecimiento situado en g, con $g \in G$

C_n: gasto en el que se debe incurrir para construir un establecimiento tipo n, con $n \in N$

W_n: capacidad de extraterrestres que pueden estudiar en el centro tipo n

Q_0: capacidad de extraterrestres de un gimnasio ampliado

C_e: costo de ampliar un gimnasio existente

β: ingreso generado por la construcción de centros en comunas vecinas

$$V_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la comuna } i \text{ es vecina de la comuna } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

P: Presupuesto en UMT

Variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se amplía el gimnasio de la comuna } i,\ i \in G \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{in} = \begin{cases} 1 & \text{Si se construye el centro de entrenamiento tipo } n \text{ en la comuna } i,\ i \in S \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si asigno extraterrestres de la comuna } i \text{ al centro ubicado en la comuna } j,\ i \in O, j \in S \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se construyen centros en las comunas vecinas } i \text{ y } j, \text{ con } i, j \in S \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

w_{ij} = número de extraterrestres de la comuna i que se asignan al establecimiento ubicado en j, $i \in O, j \in S$

Función Objetivo:

$$Min \sum_{n \in N} \sum_{i \in S} C_n y_{in} + \sum_{i \in G} C_e x_i - \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \beta s_{ij}$$

Restricciones:

(1) Asigno mini extraterrestres a un centro solo si la distancia lo permite:

$$z_{ij} r_{ij} \leq D \qquad \forall i \in O, j \in S$$

(2) Relación entre variables de asignación:

$$w_{ij} \leq z_{ij} M \qquad \forall i \in O, j \in S, M >> 0$$

(3) Todos los mini extraterrestres son asignados:

$$\sum_{j \in S} w_{ij} = N_i \qquad \forall i \in O$$

(4) Para asignar extraterrestres a un gimnasio, este debe existir:

$$z_{ij} \leq \sum_{n \in N} y_{jn} \qquad \forall i \in O, j \in S \backslash G$$

$$\sum_{i \in O} z_{ij} \geq 1 \qquad \forall j \in G$$

(5) Capacidad de centros de entrenamiento:

$$\sum_{i \in O} w_{ij} \leq \sum_{n \in N} y_{jn} W_n \qquad \forall j \in S \backslash G$$

$$\sum_{i \in O} w_{ij} \leq Q_0 x_j + T_g (1 - x_j) \qquad \forall j \in G$$

(6) Solo puede haber un centro de entrenamiento por comuna:

$$\sum_{n \in N} y_{in} \leq 1 \qquad \forall i \in S$$

(7) No se pueden construir centros nuevos en comunas donde ya existía un gimnasio:

$$\sum_{n \in N} y_{in} = 0 \qquad \forall i \in G$$

(8) Presupuesto:

$$\sum_{n \in N} \sum_{i \in S} C_n y_{in} + \sum_{i \in G} C_e x_i \leq P$$

(9) Construcción de centros en comunas vecinas:

$$s_{ij} \geq (\sum_{n \in N} y_{in} + \sum_{n \in N} y_{jn} - 1) - M(1 - V_{ij}) \qquad \forall i, j \in S, i \neq j$$

$$s_{ij} \leq (\sum_{n \in N} y_{in} + \sum_{n \in N} y_{jn}) V_{ij} \qquad \forall i, j \in S, i \neq j$$

Naturaleza de las Variables:

$$\begin{aligned} x_i &\in \{0,1\} && \forall i \in G \\ y_{in} &\in \{0,1\} && \forall i \in S, n \in N \\ z_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i \in O, j \in S \\ s_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i, j \in S \\ w_{ij} &\in \mathbb{Z}_0^+ && \forall i \in O, j \in S \end{aligned}$$

b) El problema sigue igual, a excepción de la función objetivo, que cambia a:

$$Min \sum_{i \in O} \sum_{j \in S} w_{ij} r_{ij}$$