PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2020 - 2
Profesores: : G. Angulo - R. Cuadrado
J. González - P. Guajardo

Interrogación 1

Duración: 120 minutos.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 60 puntos.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (20 puntos)

(a) **(15 puntos)** Para cada una de las siguientes afirmaciones, determine si es verdadera o no. En caso de ser verdadera, justifique por qué lo es. En caso de no serlo, exhiba un contraejemplo.

(i) **(3 puntos)** Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es no vacío y (P_1) $\min\{f(x) : \ x \in D\}$ es tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in D$, entonces (P_2) $\min \left\{ \frac{1}{f(x)^2} : \ x \in D \right\}$ es equivalente a (P_1).

Solución: Tenemos que (P_1) es equivalente a $\max\{-f(x) : \ x \in D\}$. Como $-f(x) > 0$ para todo $x \in D$, este problema es equivalente a $\min \left\{ \frac{1}{-f(x)} : \ x \in D \right\}$. Como $\frac{1}{-f(x)} > 0$ para $x \in D$ y z^2 es creciente sobre $\mathbb{R}_+$, obtenemos la equivalencia con $\min \left\{ \left(\frac{1}{-f(x)} \right)^2 : \ x \in D \right\}$. Luego, la afirmación es verdadera.

(ii) **(3 puntos)** Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo no vacío y $f, g : D \to \mathbb{R}$ son convexas, entonces $h : D \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es convexa.

Solución: Tomando $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x$ y $g(x) = -x$, tenemos que D es convexo no vacío y f, g son convexas. Sin embargo, $h(x) = -x^2$ no es convexa. Luego, la afirmación es falsa.

(iii) **(3 puntos)** Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es no vacío y $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y coercitiva sobre D, entonces $\min\{f(x) : \ x \in D\}$ tiene solución óptima.

Solución: Tomando $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ y $f(x) = x$, tenemos que D es no vacío y f es continua y coercitiva sobre D. Sin embargo, $\min\{x : \ x > 0\}$ no tiene solución óptima. Luego, la afirmación es falsa.

(iv) **(3 puntos)** Si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un polítopo no vacío y $f : P \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\min\{f(x) : \ x \in P\}$ tiene solución óptima.

Solución: Tenemos que P es un poliedro acotado. En particular, al ser poliedro, es cerrado. Luego, P es compacto, pues es cerrado y acotado. Además, como P es no vacío y f es continua sobre P, por Bolzano-Weierstrass, $\min\{f(x) : \ x \in P\}$ tiene solución óptima. Luego, la afirmación es verdadera.

(v) **(3 puntos)** Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo no vacío y $f : D \to \mathbb{R}$ es tal que el conjunto $\{x \in D : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces f es convexa.

Solución: Tomando $D = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^3$, tenemos que D es convexo no vacío y $\{x \in D : x^3 \leq \alpha\} = (-\infty, \sqrt[3]{\alpha}]$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Sin embargo, f no es convexa. Luego, la afirmación es falsa.

(b) **(5 puntos)** Sea (P) $\min\{f(x) : x \in D\}$ un problema de optimización convexo. Demuestre que si $x_1, x_2 \in D$ son soluciones óptimas para (P), entonces toda combinación convexa de ellas también es solución óptima para (P).

Solución: Sea $v^* = f(x_1) = f(x_2)$ el valor óptimo de (P). Dado $\lambda \in [0,1]$, sea $z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Por la convexidad de D, tenemos que $z \in D$. Por lo tanto, z es solución factible para (P), y en particular, $v^* \leq f(z)$. Además, por la convexidad de f, tenemos

$$f(z) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \lambda v^* + (1-\lambda)v^* = v^*,$$

por lo que $f(z) \leq v^*$. Concluimos entonces que $f(z) = v^*$, y por lo tanto z es solución óptima de (P).

Función coercitiva: Cuando $|x| \to \infty$, entonces $f(x) \to \infty$

Pregunta 2 (20 puntos)

Asuma que usted está a cargo de optimizar el reparto de diarios que ocurre todos los días desde una planta de impresión hasta el hogar de cada cliente suscrito.

Los suscriptores se clasifican en una cuadra específica según la ubicación de su hogar. Para cada cuadra n, usted tiene la información de cuántos suscriptores hay, en el parámetro s_n, y cuánto tiempo toma en promedio repartir a cada suscriptor de la cuadra n, en el parámetro t_n expresado en minutos. Asuma que cada suscriptor recibe exactamente un diario y que todos los suscriptores dentro de una cuadra deben ser atendidos por el mismo repartidor. El conjunto N contiene a todas las cuadras que deben ser repartidas.

Cada repartidor r tiene una capacidad máxima c_r de diarios que puede llevar simultáneamente. El conjunto R contiene a los repartidores disponibles.

Todos los repartidores comienzan al mismo tiempo a las 3 am y cada suscripción debe ser entregada antes de las 7 am para estar dentro del plazo aceptable.

Al conjunto de cuadras que hace el mismo repartidor en una jornada se le denomina zona de reparto. Una zona de reparto eficiente es la que tiene la mayor cantidad de cuadras vecinas dentro de ella, para facilitar el traslado del repartidor. El parámetro v_{nm} toma valor 1 si la cuadra n es vecina de la cuadra m, y 0 en otro caso. Cada repartidor puede repartir a lo más una zona de reparto en el día, y cada zona debe ser repartida por exactamente un repartidor.

Por otro lado, usted computa la cantidad mínima de cuadras vecinas que debe recorrer para llegar desde una cuadra cualquiera a todo el resto, y almacena cada dato en el parámetro d_{nm} para la distancia entre n y m medida en cuadras. Así, d_{nm} será cero para cuadras vecinas, uno para cuadras a las que puedo acceder pasando por solo una cuadra intermedia como mínimo, dos para cuadras a las que puedo acceder pasando por solo dos cuadras intermedias como mínimo, y así sucesivamente. Para controlar el tamaño máximo de una zona de reparto, se propone que todas las cuadras dentro de una zona de reparto deben estar a un máximo de $b > 0$ vecinos.

Formule un modelo de optimización lineal entera mixto que determine qué repartidor debe repartir cada cuadra para construir las zonas de reparto lo más eficientemente posible, asegurando que ninguna suscripción sea entregada fuera de plazo.

Solución:

Las variables del modelo son las siguientes:

- $x_{nmr} \in \{0,1\}$ toma valor 1 si las cuadras n y m son repartidas por el mismo repartidor r, y 0 en otro caso.

- $y_{nr} \in \{0, 1\}$ toma valor 1 si la cuadra n es repartida por el repartidor r, y 0 en otro caso.

La función objetivo busca maximizar la cantidad de cuadras vecinas que son repartidas por el mismo repartidor:

$$\max_{x,y} \sum_{n \in N} \sum_{m \in N : m \neq n} \sum_{r \in R} x_{nmr} * v_{nm} \tag{1}$$

Las restricciones del problema son las siguientes:

- Relación entre las variables x_{nmr} e y_{nr}.

$$y_{nr} + y_{mr} \geq 2x_{nmr}, \qquad \forall n \in N, m \in N : m \neq n, r \in R \tag{2}$$

- Cada cuadra debe ser repartida por exactamente un repartidor.

$$\sum_{r \in R} y_{nr} = 1, \qquad \forall n \in N \tag{3}$$

- La distancia entre cuadras de un mismo repartidor deben estar a lo más a b vecinos.

$$x_{nmr} * d_{nm} \leq b, \qquad \forall n \in N, m \in N : m \neq n, r \in R \tag{4}$$

- Capacidad de diarios que puede llevar un repartidor.

$$\sum_{n \in N} y_{nr} * s_n \leq c_r, \qquad \forall r \in R \tag{5}$$

- Hora máxima de entrega de cada suscripción.

$$\sum_{n \in N} y_{nr} * s_n * t_n \leq 240, \qquad \forall r \in R \tag{6}$$

Pregunta 3 (20 puntos)

Sea S' el dominio de un problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + h_1 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - h_2 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 + h_3 &= 1 \\ x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(a) **(8 puntos)** Grafique el dominio factible del problema original, identificando cada una de las soluciones básicas factibles del problema con sus respectivas bases (variables que conforman la base). Considere que, en el problema original, todas las variables eran de naturaleza no negativa.

(b) **(6 puntos)** Determine la(s) solución(es) óptima(s) para las siguientes funciones objetivos:

(i) mín $-x_1$

(ii) máx $x_1 - 2x_2$

(iii) máx $-4x_1 + 2x_2$

(c) **(3 puntos)** Determine el rango de valores para δ de modo que la dirección $\vec{d} = (\delta, 1)$ corresponda a un rayo de escape para el problema original

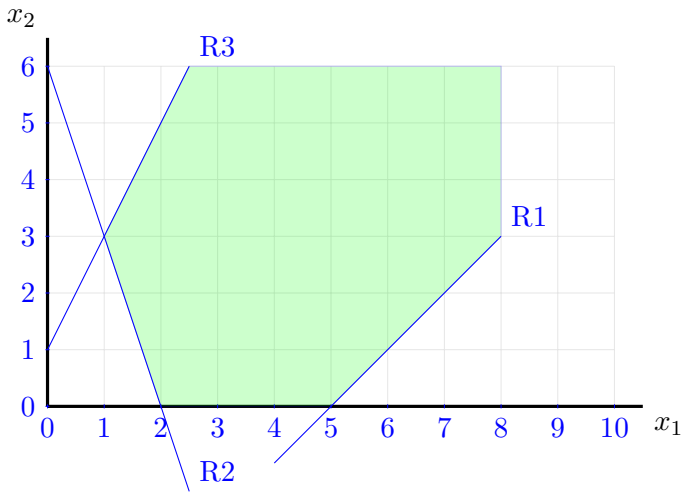
(d) **(3 puntos)** Demuestre que agregando la restricción $3x_1 + 2x_2 \leq 24$ al dominio del problema, este siempre poseerá solución óptima para toda función objetivo continua.

Solución:

(a) El dominio original es:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El gráfico correspondiente es:



Las bases serían:

- ◇ Vértice (2,0) correspondiente a la base $\{x_1, h_1, h_3\}$.
- ◇ Vértice (5,0) correspondiente a la base $\{x_1, h_2, h_3\}$.
- ◇ Vértice (1,3) correspondiente a la base $\{x_1, x_2, h_1\}$.

(b) FALTA GRÁFICO

(i) El problema es no acotado. No hay solución óptima.

(ii) El vertice óptimo es el (5,0).

(iii) El problema tiene múltiples soluciones. Corresponde al vértice (1,3) y todo el rayo extremo determinado por la restricción 3.

(c) Los rayos extremos del dominio son $r_1 = (1, 2)$ y $r_2 = (1, 1)$. Cualquier vector perteneciente al cono formado por r_1 y r_2 son rayos de escape del dominio.

Por lo tanto, para que $(\delta, 1)$ sea un rayo de escape, $0.5 <= \delta <= 1$.

(d) Al agregar esta restricción, el dominio es un polítopo no vacío, pues:

- ◇ Es cerrado, ya que son todas las restricciones con desigualdades no estrictas.
- ◇ Es acotado. Por la naturaleza de variables, tanto x_1 como x_2 están acotadas inferiormente. Por la última restricción agregada, ambas variables están acotadas superiormente.
- ◇ Es no vacío. Por ejemplo, el $(2, 0)$ pertenece al dominio.

Por lo tanto, si se tiene una función objetivo continua, por teorema de Bolzano-Weierstrass, el problema admite solución óptima.