PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-1
Profesores: G. Angulo, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

Solución Tarea 6

Fecha de entrega: viernes 9 de julio - 23:59:00

Problema 1.

Responda las preguntas considerando el siguiente problema de minimización no lineal irrestricto:

$$\text{mín } f(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - 2)^2}{4} + (x_2 - 1)^2$$

a) **(0.5ptos.)** Calcule $\nabla f(x_1, x_2)$ y $\nabla^2 f(x_1, x_2)$.

b) **(0.5ptos.)** Encuentre los puntos críticos de $f(x_1, x_2)$.

c) **(0.5ptos.)** Verifique si se cumple la condición sufuciente de segundo orden.

d) **(2.5ptos.)** Realice dos iteraciones del Método del Gradiente utilizando como punto de partida el par $(0, 0)$. Verifique que las direcciones encontradas son direcciones de descenso y ortogonales entre sí.

e) **(1.5ptos.)** Realice dos iteraciones del Método de Newton utilizando como punto de partida el par $(0, 0)$. Verifique que las direcciones encontradas son direcciones de descenso y que no son ortogonales entre sí.

f) **(0.5ptos.)** ¿Cómo se comparan los resultados obtenidos en d) y e)?

Solución Problema 1.

a) El gradiente y hessiano de $f(x_1, x_2)$ son:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - 2}{2} \\ 2(x_2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Los puntos críticos de $f(x_1, x_2)$ deben cumplir con $\nabla f(x_1, x_2) = 0$, esto es:

$$\frac{x_1 - 2}{2} = 0$$
$$2(x_2 - 1) = 0$$

donde el único punto que cumple con el sistema de ecuaciones es el $(x_1, x_2) = (2, 1)$.

c) Para verificar que se cumple la condición suficiente de segundo order debemos mostrar que $f(x_1, x_2)$ es convexa. Sabemos que $f(x_1, x_2)$ es convexa si $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ es al menos semi definida positiva. Como los subdeterminantes $\Delta_1 = \frac{1}{2}$ y $\Delta_2 = 1$ son mayores que 0, la matriz $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ es definida positiva y por lo tanto $f(x_1, x_2)$ cumple con la condición suficiente de segundo orden.

d) ◇ Iteración 1: Sea $x^0 = (0,0)^T$. Como $\nabla f(0,0) = (-1,-2)^T \neq \vec{0}$, tenemos que movernos en la dirección $d^1 = -\nabla f(0,0) = (1,2)^T$. Para saber cuánto movernos en esta dirección debemos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\lambda} f(0+\lambda, 0, +2\lambda) = \frac{(\lambda-2)^2}{4} + (2\lambda-1)^2$$

Cuya solución óptima es $\lambda^1 = \frac{10}{17}$. Luego, el siguiente punto al que nos movemos es:

$$x^1 = x^0 + \lambda^1 d^1 = (0,0)^T + \frac{10}{17}(1,2)^T = (\frac{10}{17}, \frac{20}{17})^T$$

◇ Iteración 2: Como $\nabla f(\frac{10}{17}, \frac{20}{17}) = (-\frac{12}{17}, \frac{6}{17})^T \neq \vec{0}$, tenemos que movernos en la dirección $d^2 = -\nabla f(\frac{10}{17}, \frac{20}{17}) = (\frac{12}{17}, -\frac{6}{17})^T$. Para saber cuánto movernos en esta dirección debemos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\lambda} f(\frac{10}{17} + \lambda\frac{12}{17}, \frac{20}{17} - \frac{6}{17}\lambda) = \frac{((\frac{10+12\lambda}{17}) - 2)^2}{4} + (\frac{20-6\lambda}{17} - 1)^2$$

Cuya solución óptima es $\lambda^2 = \frac{5}{4}$. Luego, el siguiente punto al que nos movemos es:

$$x^2 = x^1 + \lambda^2 d^2 = (\frac{10}{17}, \frac{20}{17})^T + \frac{5}{4}(\frac{12}{17}, -\frac{6}{17})^T = (\frac{50}{34}, \frac{25}{34})^T$$

Para verificar que las direcciones encontradas son direcciones de descenso, debemos mostrar que $\nabla f(x^k)^T d^{k+1} < 0$. Esto es:

$$\nabla f(x^0)^T d^1 = (-1,-2)(1,2)^T = -1 - 4 = -5 < 0$$
$$\nabla f(x^1)^T d^2 = (-\frac{12}{17}, \frac{6}{17})(\frac{12}{17}, -\frac{6}{17})^T = -\frac{12}{17}\frac{12}{17} - \frac{6}{17}\frac{6}{17} = -\frac{144}{289} - \frac{36}{289} = -\frac{180}{289} < 0$$

Finalmente, para verificar que las direcciones encontradas son ortogonales, debemos mostrar que $(d^1)^T d^2 = 0$. Esto es:

$$(d^1)^T d^2 = (1,2)(\frac{12}{17}, -\frac{6}{17})^T = \frac{12}{17} - \frac{12}{17} = 0$$

Por lo tanto, las direcciones encontradas utilizando el Método del Gradiente son ortogonales.

e) ◇ Iteración 1: Sea $x^0 = (0,0)^T$. Como $\nabla f(0,0) = (-1,-2)^T \neq \vec{0}$, tenemos que movernos en la dirección $d^1 = -(\nabla^2 f(0,0))^{-1} \nabla f(0,0)^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} (1,2) = (2,1)$. Luego, el siguiente punto al que nos movemos es:

$$x^1 = x^0 + d^1 = (0,0)^T + (2,1)^T = (2,1)^T$$

◇ Iteración 2: Como $\nabla f(2,1) = \vec{0}$, estamos en el óptimo y no es necesario seguir iterando.

f) El Método de Newton converge más rápido al óptimo que el Método del Gradiente.

Problema 2.

a) Responda las preguntas considerando el siguiente problema de optimización no lineal con restricciones de igualdad:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (x_1 - \frac{13}{3})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 - x_3 \\ s.a. \quad & (x_2 - 2)^2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + \tfrac{5}{3}x_2 = 10 \end{aligned}$$

i. **(1pto.)** Encuentre los puntos que cumplan con la condición necesaria de primer orden.

ii. **(1pto.)** Analice la regularidad del dominio.

iii. **(1pto.)** ¿Es/Son el/los punto/s encontrado/s solución óptima del problema?

b) **(3ptos.)** Considere el siguiente problema de optimización no lineal con restricciones de igualdad:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ s.a. \quad & (x-1)^2 - 5y = 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo directamente la restricción en la función objetivo y eliminando la variable x obtenemos un problema de optimización no restringido. ¿Es la solución del problema no restringido la solución del problema original? Justifique su respuesta.

Solución Problema 2.

a) i. La función lagrageana del problema es:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = (x_1 - \frac{13}{3})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 - x_3 + \lambda_1((x_2-2)^2 + x_3 - 4) + \lambda_2(x_1 + \frac{5}{3}x_2 - 10)$$

Luego, los puntos que cumplen con la condición de primer orden son los que cumplen con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2(x_1 - \frac{13}{3}) + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2(x_2 - \frac{1}{2}) - +2(x_2-2)\lambda_1 + \frac{5}{3}\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} &= -1 + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= (x_2-2)^2 + x_3 - 4 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= x_1 + \frac{5}{3}x_2 - 10 = 0 \end{aligned}$$

donde la única solución es $(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = (\frac{35}{6}, \frac{5}{2}, \frac{15}{4}, 3, -1)$

ii. Para analizar la regularidad del dominio debemos primero obtener el jacobiano de las restricciones.

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 & 2(x_2-2) & 1 \\ 1 & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Como sus filas son linealmente independientes para cualquier valor de x_2, el dominio es regular (no hay puntos singulares).

iii. Como la función objetivo es convexa y el dominio es la intersección de restricción convexas, el problema es convexo. Luego, al no haber puntos singulares, podemos afirmar que el punto $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{35}{6}, \frac{5}{2}, \frac{15}{4})$ es solución óptima del problema.

b) De la restricción se tiene que $(x-1)^2 = 5y$. Reemplazando en la función objetivo queda el siguiente problema irrestricto:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 5y + (y-2)^2 \\ (x,y) \quad & \in \quad \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

cuya solución es $y = -\frac{1}{2}$. Sin embargo, esa solución no puede ser solución del problema original pues se tendría que $(x-1)^2 = -5$, lo que no es posible.