PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 1-2022
Profesores: G. Angulo, S. Vásquez
J. González, G. Méndez,
F. Verástegui, R. Cuadrado

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: Lunes 6 de junio - 23:59:00

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas podría generar una penalización en la nota de la tarea.

- La Tarea se desarrolla en **parejas** que **no necesariamente** deben pertencer a la misma sección o grupo de proyecto semestral. Cada pareja entrega una sola tarea.
- La entrega de la Tarea se hace online en formato PDF y .py (para la pregunta 1) a través del siguiente formulario: **FORMULARIO DE ENTREGA**. Es decisión del grupo escribirla en computador o a mano, cualquiera sea esta decisión la tarea debe **estar ordenada y legible**. Se recomienda utilizar la aplicación Cam Scanner para generar el archivo entregable en el caso de haberla escrito a mano. El formato de entrega de los archivos es **Apellido11_Apellido12_Apellido21_Apellido22**. Por ejemplo, si la tarea la realiza Pérez Abarca con González Soto, los archivos deben llamarse Perez_Abarca_Gonzalez_Soto. Este formato debe respetarse para la entrega de cada uno de sus archivos, o se aplicarán descuentos.

  Se bonificará con **3 décimas sobre la nota final de la tarea** si la Tarea está escrita en Latex. Se pondrá a disposición de los estudiantes una plantilla tipo y el código de fuente Latex de la Tarea para incentivar este formato. Por otro lado, quedará a criterio del ayudante corrector si aplicar un descuento de **3 décimas sobre la nota final de la tarea** en el caso de que el orden y legibilidad de esta dificulte su proceso de corrección.
- El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 6 de mayo a las 23:59:00 horas. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**. Es responsabilidad de cada grupo hacer entregas parciales.
- Esta tarea es grupal, y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[1].
- Cualquier duda sobre el enunciado, deben ser envíadas a través del foro dispuesto en Canvas para la Tarea. De esta forma, todos los alumnos se verán beneficiados de la aclaración que haga el ayudante y se evita responder preguntas duplicadas. Este foro centralizará las dudas de todas las secciones sobre el **enunciado de la tarea**.

  Se intentará responder las preguntas en el foro de la forma más rápida y completa posible. Sin embargo, **2 días antes la entrega se dejarán de responder consultas**.

  Finalmente, cualquier **duda administrativa** debe ser enviada al ayudante coordinador de las tareas José Tomás Grez al mail *jtgrez@uc.cl*.

[1] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1.

Suponga que usted quiere ser deportista profesional y, como tal, debe preocuparse de su alimentación. Por esto, ha decidido construir una dieta que le permita rendir al máximo en entrenamientos y competencias. Usted cuenta con un conjunto F de alimentos, los que puede consumir en distintas cantidades, asegurándose de cumplir restricciones para cada nutriente $c \in C$, donde C es el conjunto de nutrientes relevantes para su dieta. Sean v_{cf} el aporte en gramos de cada nutriente $c \in C$ por cada gramo de comida $f \in F$, l_c la cantidad mínima en gramos de cada nutriente c que se debe consumir y u_c la cantidad máxima en gramos de cada nutriente c. Usted ha construido el siguiente modelo para construir su dieta a costo mínimo:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{f \in F} c_f x_f & & & \\ s.a. \quad & \sum_{f \in F} v_{cf} x_f & \leq & u_c & \forall c \in C \\ & \sum_{f \in F} v_{cf} x_f & \geq & l_c & \forall c \in C \\ & x_f & \geq & 0 & \forall f \in F \end{aligned}$$

Nota: Dentro de los archivos entregados, se encuentra una instancia de este problema, la cual debe utilizar para responder las siguientes preguntas. Para cada una de ellas, debe mencionar los resultados en formatos de tabla e indicar cuáles son las líneas de su código que implementan la solución a cada ítem.

(a) Obtenga la solución óptima y el valor óptimo para la instancia del problema adjunta.

(b) Obtenga los costos reducidos de las variables en el óptimo. ¿Cumplen con el criterio de optimalidad? ¿Por qué?

(c) Obtenga el rango de valores en los que pueden estar las cantidades mínimas y máximas de cada nutriente $c \in C$ de la dieta de forma que la base encontrada en (a) siga siendo óptima.

(d) ¿En cúanto cambia el valor de la función objetivo si la cantidad mínima de calorías disminuye en 11 unidades? Utilice el valor de las variables duales para responder esta pregunta

(e) Usted está harto de comer platos de comida en cantidades tan extrañas, como por ejemplo, comer 1,31 hamburguesas (este no es el valor que toma la variable en el óptimo, es solo un ejemplo), por lo que decide cambiar su modelo para que solo pueda comer cantidades enteras. Cree un nuevo modelo, con los cambios necesarios para lograr su objetivo. Compare el valor objetivo de este problema con la encontrada en (a). ¿En qué porcentaje aumenta o disminuye el valor objetivo respecto al problema original?

IMPORTANTE: Recuerda entregar el archivo "*Apellido*11_*Apellido*12_*Apellido*$_2$1_*Apellido*22.*py*" (**cámbienle el nombre al archivo P1.py**) al momento de entregar la tarea, o esta pregunta no recibirá puntaje.

Solución

(a) El código utilizado es:

```python
#Modelo para pregunat a,b,c,d
m = Model()

x = m.addVars(foods, name="buy")
m.setObjective(sum(x[f] * foods[f] for f in foods), GRB.MINIMIZE)

for c in categories:
    m.addConstr(sum(nutritionValues[f, c] * x[f] for f in foods) <= categories[c][1], "max_{}".format(c))

    m.addConstr(sum(nutritionValues[f, c] * x[f] for f in foods) >= categories[c][0], "min_{}".format(c))

#Pregunta a
m.optimize()
print(f'el valor objetivo es: {m.objVal}')
m.printAttr("X")
```

Variable	Cantidad
hamburger	0.677265
milk	7.22146
ice cream	2.12174

El valor objetivo es 11.48706216931217

(b) El código utilizado es:

```python
#Pregunta b
print("Costos reducidos:")
for f in foods:
    print(f'{x[f].varName}: {x[f].RC}')
print(f"Cantidad de soluciones: {m.SolCount}")
```

Variable	Costo Reducido
hamburger	0
chicken	0.34227513227513207
hot dog	0.5450529100529091
fries	0.642037037037037
macaroni	1.3367989417989414
pizza	0.7855357142857136
salad	0.4397156084656091
milk	0
ice cream	0

La solución cumple con el criterio de optimalidad, ya que, todos sus costos reducidos son mayores o iguales a 0.

(c) El código utilizado es:

```python
#Pregunta c
print("Rango de valores de nutrientes para mantener base óptima:")
for c in categories:
    minimo = m.getConstrByName("min_{}".format(c))
    maximo = m.getConstrByName("max_{}".format(c))
    print(f"el rango del mínimo para {c} es: [{minimo.SARHSLow}, {minimo.SARHSUp}]")
    print(f"el rango del máximo para {c} es: [{maximo.SARHSLow}, {maximo.SARHSUp}]")
```

Nutriente	Rango del Mínimo	Rango del Máximo
calories	[1248.1584507042253, 2073.1755]	[1700.0, inf]
protein	[78.85160173160172, 108.6176]	[0.0, inf]
fat	[-inf, 56.87997685185184]	[56.8799, inf]
sodium	[-inf, 1779.0]	[1556.3858, 1957.9719]

(d) El código utilizado es:

```
#Pregunta d
min_calories = m.getConstrByName("min_calories")
print(f'El valor de la función objetivo cambiará en: {min_calories.pi * 11}')
```

El valor objetivo cambiará en 0.0375978835978836

(e) El código utilizado es:

```
#Modelo para pregunta e
m2 = Model()

x = m2.addVars(foods, name="buy", vtype = GRB.INTEGER, lb=0)
m2.setObjective(sum(x[f] * foods[f] for f in foods), GRB.MINIMIZE)

for c in categories:
    m2.addConstr(sum(nutritionValues[f, c] * x[f] for f in foods) <= categories[c][1], "max_{}".format(c))

    m2.addConstr(sum(nutritionValues[f, c] * x[f] for f in foods) >= categories[c][0], "min_{}".format(c))

m2.optimize()
print(f'el valor objetivo del problema entero es: {m2.objVal}')

print(f"El valor objetivo aumentó en un {(m2.objVal - m.objVal)/m.objVal * 100}%")
```

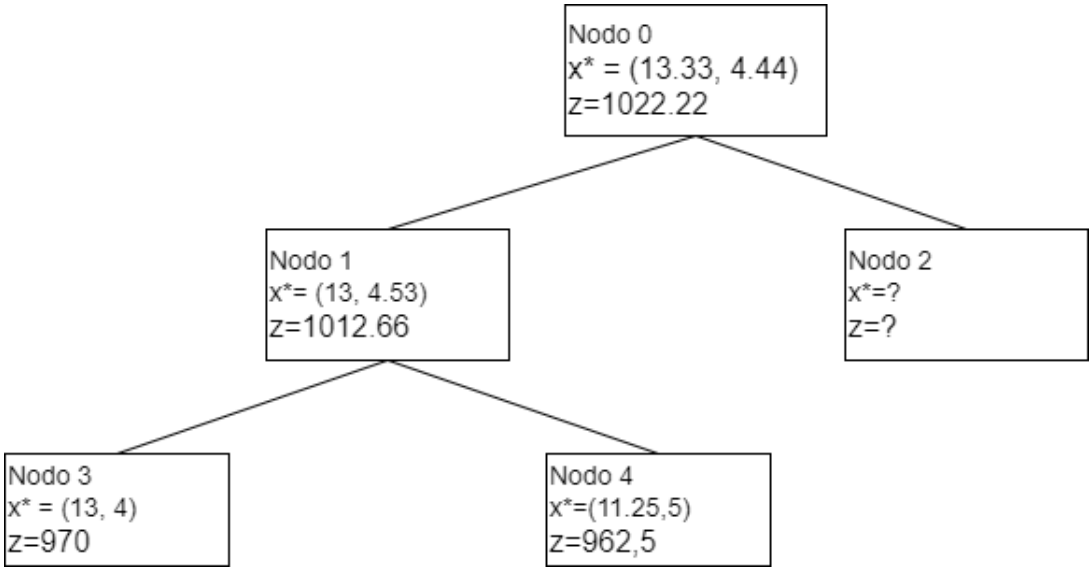
Problema	Valor Objetivo
Problema Continuo	11.48706216931217
Problema Entero	12.38

Por lo tanto, el valor objetivo aumenta, o sea que empeora, en un 7.77 %

Problema 2.

(a) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{llrcll} (P) & \text{máx} & 50x_1 + 80x_2 & & & \\ & s.a. & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 40 & (1) \\ & & 4x_1 + 15x_2 & \leq & 120 & (2) \\ & & x & \in & \mathbb{Z}_0^+ & \end{array}$$



(I) Indique la restricción que se agrega a cada sub-problema en cada ramificación del árbol

(II) ¿Cuáles son las mejores cotas determinadas hasta el momento para z^* del problema (P)?

(III) Utilizando dualidad, resuelva el problema del Nodo 2 relajado a partir de la solución obtenida en el Nodo 0. ¿Hay que ramificar? Si es así, ¿qué restricciones tiene cada rama? Si no es así, ¿por qué criterio se llega a la presente conclusión?

(b) Dado un vector $a \in \mathbb{Z}_+^n$ y un entero $b \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i > b$, sea:

$$X = \left\{ x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \right\}$$

Sin pérdida de generalidad, asumamos que $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Un cubrimiento es un conjunto $C \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $\sum_{i \in C} a_i > b$.

(I) Dado un cubrimiento C, muestre que la desigualdad de cubrimiento $\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$ es válida para todo $x \in X$.

(II) Dado un cubrimiento C, sea $k(C) = \text{máx}\{i : i \in C\}$, es decir, $k(C)$ es el último elemento del cubrimiento. Sea $E(C) = \{i : i > k(C)\}$ la extensión de C. Muestre

que la desigualdad de cubrimiento extendido $\sum_{i \in C \cup E(C)} x_i \leq |C| - 1$ es válida para todo $x \in X$.

Solución

(a) (I)
- ◇ De Del Nodo 0 al Nodo 2: $x_1 \geq 14$
- ◇ De Del Nodo 0 al Nodo 1: $x_1 \leq 13$
- ◇ De Del Nodo 1 al Nodo 3: $x_2 \leq 4$
- ◇ De Del Nodo 1 al Nodo 4: $x_2 \geq 5$

(II) El incumbente está dado por el Nodo 3, con 970, mientras que el mejor valor fraccionario está dado por el Nodo 0, con 1022.22. Así, $970 \leq z^* \leq 1022.22$.

(III) Al ramificar, al nodo 2 se le agrega una nueva variable a su problema dual, tal que el problema queda:

$$\begin{array}{lll} (D2) \quad \text{mín} & 40y_1 + 120y_2 + 14y_3 & \\ s.a. & 2y_1 + 4y_2 + y_3 & \geq \quad 50 \\ & 3y_1 + 15y_2 & \geq \quad 80 \\ & y_1, y_2 & \geq \quad 0 \\ & y_3 & \leq \quad 0 \end{array}$$

Como estamos agregando una variable, realizamos análisis de sensibilidad para ver si conviene ingresar la variable a la base óptima dual. Notar que y_3 es menor o igual que 0, por lo que, para este análisis, se cambian los signos que tiene en el problema. Tendremos que:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Su inversa:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Con esto, vemos la optimalidad:

$$\overline{c_3^T} = \begin{pmatrix} -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 & 120 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c_3^T} = -14 - \tfrac{-40}{3} = \tfrac{-2}{3} \not\geq 0$$

De esta manera, vamos a querer ingresar la nueva variable a la base. ¿Qué implicancia tiene esto? Significa que la restricción 3 del problema primal P2, por teorema de holguras complementarias, está activa (la nueva restricción que se agrega al problema $x_1 \geq 14$). Así, ya sabemos que $x_1 = 14$. Volviendo al primal:

$$\begin{array}{lllll} (P2) \quad \text{máx} & 50x_1 + 80x_2 & & & \\ s.a. & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 40 & (1) \\ & 4x_1 + 15x_2 & \leq & 120 & (2) \\ & x_1 & \geq & 14 & (3) \\ & x & \geq & 0 & \end{array}$$

reemplazando por $x_1 = 14$, vemos que la restricción 2 acotará antes a x_2, por lo que $x_2 = 4$ y (P2) toma un valor óptimo de 1020.
Con este resultado, esta rama no hay que seguir ramificándola, ya que, llegamos a una solución entera (criterio de poda) que, además, es el óptimo.

(b) (I) Si $x \in \{0,1\}^n$ es tal que $\sum_{i \in C} x_i \geq |C|$ entonces $x_i = 1$ para todo $i \in C$. Luego:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq \sum_{i \in C} a_i x_i = \sum_{iinC} a_i > b$$

y por lo tanto $x \notin X$

(II) Si $x \in \{0,1\}^n$ es tal que $\sum_{i \in C \cup E(C)} x_i \geq |C|$ entonces existe $S \subseteq (C \cup E(C))$ con $|S| = |C|$ y $x_i = 1$ para todo $i \in S$. Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq \sum_{i \in S} a_i x_i = \sum_{i \in S} a_i > b$$

y por lo tanto $x \notin X$

Problema 3.

(a) Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{llrcl} (P) & \text{máx} & 12x_1 + 2x_3 + 6x_4 & & \\ & s.a. & x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 7 \\ & & -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 & \geq & 6 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ & & x_4 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Determine si el problema está acotado o no.

(b) Sea el siguiente problema:

$$\begin{array}{llrcl} (P) & \text{mín} & c^T x & & \\ & s.a. & Ax & \geq & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$. Escriba el problema dual e indique qué condiciones deben cumplir tanto A como b y c, para que el problema dual sea equivalente al primal. Por último, dé un ejemplo en el que esto se cumpla.

(c) Sea A una matriz simétrica cuadrada. Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{llrcl} (P) & \text{mín} & c^T x & & \\ & s.a. & Ax & \geq & c \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Muestre que si x^* satisface $Ax^* = c$ y $x^* \geq 0$, entonces x^* es solución óptima de (P).

Solución

(a) Escribiendo el dual del problema:

$$\begin{array}{llrcll} (D) & \text{mín} & 7y_1 + 6y_2 & & & \\ & s.a. & & & & \\ & & y_1 - 2y_2 & \geq & 12 & (1) \\ & & 3y_1 - 5y_2 & \geq & 0 & (2) \\ & & y_1 + 4y_2 & \geq & 2 & (3) \\ & & y_1 & = & 6 & (4) \\ & & y_1 & \in & \mathbb{R} & \\ & & y_2 & \leq & 0 & \end{array}$$

Como $y_1 = 6$, vemos qué valores puede tomar y_2 para que haya un punto factible en el dual. Las restricciones que interesan para esto quedan:

$$\begin{array}{rcrl} -2y_2 & \geq & 6 & (1) \\ -5y_2 & \geq & -18 & (2) \\ 4y_2 & \geq & -4 & (3) \\ y_2 & \leq & 0 & \end{array}$$

Acá nos damos cuenta que, si $-3 < y_2 \leq 0$, entonces (R1) no se cumpliría. Además, si $y_2 \leq 3$, (R3) no se cumplirá, por lo que el problema dual es infactible.
Como es infactible, hay dos opciones, o el problema primal es no acotado, o es infactible. Buscamos un punto que demuestre factibilidad: el punto $(0, 1, 4, 0)$ es un punto factible, por lo que no queda otra opción a que el problema original es no acotado.

(b) El problema dual es:

$$\begin{array}{lllll} (D) & \text{máx} & \lambda^T b & & \\ & s.a. & A^T\lambda & \leq & c \\ & & \lambda & \geq & 0 \end{array}$$

Este problema es equivalente a:

$$\begin{array}{lllll} (D') & \text{mín} & -\lambda^T b & & \\ & s.a. & A^T\lambda & \leq & c \\ & & \lambda & \geq & 0 \end{array}$$

Para que (D') sea exactamente igual a (P), se deben cumplir las siguientes condiciones:

(I) $c = -b$

(II) A es una matriz cuadrada en la que se cumple que $A = -A^T$, o sea que es una matriz con ceros en su diagonal y con $a_{ij} = -a_{ji},\ \forall (i,j) \in N \times N : i \neq j$.

Un ejemplo en el que esto ocurre:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Así, el problema primal queda:

$$\begin{array}{lllll} (P) & \text{mín} & x_1 + x_2 + x_3 & & \\ & s.a. & x_2 + 2x_3 & \geq & -1 \\ & & -x_1 - 3x_3 & \geq & -1 \\ & & -2x_1 + 3x_2 & \geq & -1 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Mientras que (D') queda:

$$\begin{array}{lllll} (D') & \text{mín} & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & & \\ & s.a. & -\lambda_2 - 2\lambda_3 & \leq & 1 \\ & & \lambda_1 + 3\lambda_3 & \leq & 1 \\ & & 2\lambda_1 - 3\lambda_2 & \leq & 1 \\ & & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Con lo que $(P) \equiv (D')$.

(c) Escribiendo el dual (como A es simétrica, $A = A^T$):

$$\begin{array}{lllll} (P) & \text{máx} & c^T y & & \\ & s.a. & Ay & \leq & c \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

Si x^* satisface que $Ax^* = c$ y $x^* \geq 0$, entonces x^* es un punto factible del primal. Notemos que, como $A = A^T$, este punto también es factible para el dual, ya que, cumple con todas las restricciones del problema, por lo que $y^* = x^*$ es punto factible del dual. Ahora, analizando el teorema de dualidad débil, sabemos que toda solución factible del problema que minimiza acota por arriba al que maximiza. En este caso:

$$c^T y^* \leq c^T x^*$$

Como $y^* = x^*$, entonces:

$$c^T y^* = c^T x^*$$

lo cual solo ocurre en el óptimo. De esta manera, no queda otra opción más que x^* es óptimo.