PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2020 - 1
Profesores: : M. Arancibia - R. Cuadrado - J. González P. Guajardo - M. Klapp

Interrogación 2
Duración: 1 hora 15 minutos.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Segunda parte (35 puntos)

Pregunta 3 (15 puntos)

Considere el siguiente modelo de optimización.

$$\begin{array}{llllll} \text{mín} & \alpha x_1 & +\beta x_2 & +2x_3 & & \\ s.a. & 6x_1 & +3x_2 & & \geq 60 \\ & -x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Responda cada pregunta por separado:

(a) (10p) Se sabe que $(6, 8, 0)$ **no es una solución óptima.** Determine el conjunto que define a todos los posibles valores del vector (α, β).

Solución: Si agregamos variables de exceso e_1 y e_2, la solución entregada corresponde al vértice definido por la base $B = \{x_1, x_2\}$. Ya es factible. Para que si sea óptimo:

$$c_D^T - c_B^T A_B^{-1} A_D \geq 0,$$

es decir:

$$[2, 0, 0] - [\alpha, \beta] A_B^{-1} A_D \geq 0,$$

donde $A_B^{-1} A_D = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & -6 \end{bmatrix}$.

Para que si sea óptimo, se debe cumplir que:

$$[2, 0, 0] - \frac{1}{15}[-3\alpha + 6\beta, -2\alpha - \beta, 3\alpha - 6\beta] = \frac{1}{15}[30 + 3\alpha - 6\beta, 2\alpha + \beta, -3\alpha + 6\beta] \geq 0$$

Es decir, el conjunto de valores solicitado para que no sea óptimo:

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta) \notin \{0 \leq 6\beta - 3\alpha \leq 30, 2\alpha + \beta \geq 0\}\}$$

(b) (5p) Si $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, determine qué valores puede tomar el lado derecho de la primera restricción para que la solución óptima se encuentre en un vértice degenerado.

Solución: Bajo esos valores de α y β, la base $B = \{x_1, x_2\}$ determina el único vértice óptimo, pues sus costos reducidos son: $[1.8, 0.2, 0.2] > 0$ Para que sea degenerado, se debe cumplir que al menos uno de los elementos de $A_B^{-1}b$ es cero. Calculando:

$$\frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 2b_1 - 30 \\ b_1 + 60 \end{bmatrix}$$

Con ello, habrá degenerancia si $b_1 = 15$.

Ayuda:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Pregunta 4 (20 puntos)

Suponga que usted es el encargado de un centro de despachos a domicilio que en un día funciona durante T horas seguidas. Cada día usted debe despacharle una orden a domicilio a cada cliente en una lista $\{1, \ldots, n\}$. Suponga que la orden de cada cliente $i \in \{1, \ldots, n\}$ posee un volumen de q_i litros y está lista para ser despachada desde el tiempo $a_i < T$ (antes no se puede despachar). Toda orden debe ser despachada al cliente durante el día (antes de las T horas).

Para hacer la entrega a los cliente, usted cuenta con vehículos que pueden despachar múltiples órdenes a la vez y que poseen capacidad para transportar un volumen de V litros. Cada despacho realiza una ruta que comienza y termina en el centro de distribución y que visita a un subconjunto de clientes entre medio.

Suponga que usted puede o no despachar un solo vehículo desde el CD en K momentos del tiempo definidos por $0 \leq \tau_1 < \ldots < \tau_K \leq T$. Asuma que el costo de cada despacho es igual a un costo fijo $\$F_k$ para $k \in \{1, \ldots, K\}$ más un costo $\$c$ por kilómetro recorrido del vehículo (costo de transporte). La distancia entre el cliente i y el j es d_{ij} kilómetros, donde $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ (0 es el centro de distribución).

Plantee un modelo de optimización entera que ayude a decidir si despachar o no un vehículo en cada momento permitido para despacho, a qué despacho asignar cada orden, y que diseñe cada ruta de despacho de manera que se minimice el costo total de dicha operación.

Solución: Variables (7 puntos: 3 puntos por la variable x (o similar), 2 por la z (o similar) y 2 por la y)

- $x_{jik} = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo del despacho } k \text{ viaja a j inmediatamente después de i} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, para todo $i, j \in \{0, \ldots, n\} : i \neq j$ y $k \in \{1, \ldots, K\}$.
- $y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si la orden } i \text{ se asigna al despacho } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, para todo $k \in \{1, \ldots, K\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $z_k = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el despacho } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, para todo $k \in \{1, \ldots, K\}$.

Objetivo (2 puntos):

$$\min_{x,y,z} \quad \sum_{k=1}^{K} [f_k \cdot z_k + \sum_{i,j \in \{0,\ldots,n\}: i \neq j} c \cdot d_{ij} \cdot x_{ijk}]$$

Restricciones (Nota de corrección: 2p por c/u de la (1) a la (5) o similares; 1p por (7); bono extra

de 3p por restricción (6) correcta):

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k\in\{1,...,K\}:\tau_k\geq a_i} y_{ik} = 1, \qquad \forall i \in \{1,...,n\} \quad (1)$$

$$y_{ik} \leq z_k, \qquad \forall k \in \{1,...,K\},\ i \in \{1,...,n\} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \cdot y_{ik} \leq V, \qquad \forall k \in \{1,\dots,K\} \quad (3)$$

$$\sum_{j\in\{0,...,n\}:j\neq i} x_{jik} = \sum_{j\in\{0,...,n\}:j\neq i} x_{ijk} = y_{ik}, \qquad \forall i,j \in \{1,...,n\}, \forall k \in \{1,\dots,K\} \quad (4)$$

$$\sum_{j\in\{1,...,n\}} x_{j0k} = \sum_{j\in\{1,...,n\}} x_{0jk} = z_k, \qquad \forall k \in \{1,\dots,K\} \quad (5)$$

$$\sum_{i\in S, j\notin S} x_{ijk} \geq y_{mk}, \qquad \forall k \in \{1,\dots,K\}, \forall S \subset \{1,\dots,n\}, \forall m \in S \quad (6)$$

$$x, y, z \text{ binarias} \quad (7)$$

Nota: la restricción (6) también se puede escribir como eliminación de subtour:

$$\sum_{i,j\in S:i\neq j} x_{ijk} \leq \sum_{i\in S\setminus\{m\}} y_{ik}, \qquad \forall k \in \{1,\dots,K\}, \forall S \subset \{1,\dots,n\}, \forall m \in S$$