Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Profesores: Gustavo Angulo, Margarita Castro, Raimundo Cuadrado, Camila Balbontín, Gonzalo Pérez
Ayudante Coordinador de Tareas: Juan Enrique Hurtado

ICS1113 - Optimización
1er semestre del 2025

Tarea 2 ICS1113

Entrega 16/05/2025 a las 23:59 hrs

Reglas:

- El desarrollo y entrega de esta tarea es individual o en pareja (entre dos estudiantes de cualquier sección), por lo que cada individuo o pareja debe entregar sus propias soluciones. No se recomienda repartir la tarea entre los integrantes, pues perjudica el aprendizaje y preparación de la interrogación asociada a esta tarea. Sí está permitido discutir los problemas con profesores y ayudantes del curso. Cualquier actitud deshonesta será calificada con nota 1.0 en la tarea, 1.0 en el curso, más un aviso de dicha actitud a la Dirección de Pregrado de la Escuela de Ingeniería.
- Si se opta por entregar en pareja, se debe inscribir la pareja en Canvas y un solo estudiante (representando a su pareja) debe entregar la tarea en Canvas antes del día 16/05/2025 a las 23:59 horas. Tareas atrasadas serán calificadas con nota 1.0 y no serán corregidas.
- El formato de entrega es un reporte en archivo .pdf (digitalizado o escrito a mano con los nombres de los integrantes) más un archivo opcional. Si opta por una respuesta escrita a mano, entonces debe ser legible o habrá descuentos a criterio del corrector. En el archivo opcional puede adjuntar el .tex o .zip del proyecto Latex o código de GUROBI si corresponde. Se bonificará con 3 décimas a quienes utilicen Latex (y entreguen el .tex además del .pdf) las cuales no son transferibles a otras actividades del curso y no permiten tener nota mayor a 7. Es decir una persona con 6.8 y con bono, obtendrá un 7.
- Se habilitará un foro en Canvas donde se responderá dudas del enunciado.

Pregunta 1 [20 Puntos]

En la siguiente pregunta se le solicita usar el algoritmo simplex. Cuando se le pida graficar debe incluir imágenes muy claras que incluyan explícitamente todos los puntos de interés solicitados. Puede adjuntar imágenes de gráficos hechos a mano o graficados con software (no se descontará en el bonus por látex). Puede usar calculadoras de matrices como Mathematica u otras, pero debe explicitar los pasos que realiza en su desarrollo. Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
\text{P) max} \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.a.} \quad & R1) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& R2) \quad x_1 + 2x_2 \geq 2 \\
& R3) \quad x_1 + 5x_2 \leq 10 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Resuelva el problema de forma gráfica. Considere indicar todos los siguientes elementos en la gráfica y en su descripción:

1. Grafique el dominio del problema indicando cada restricción (incluidas las restricciones de no negatividad).
2. Coloque sobre el gráfico nombres VF_j a todos los vértices j del problema y tabule sus coordenadas en el formato (x_1, x_2) (para bono, la tabla debe ser en latex). Indique en la tabla qué restricciones se intersectan formando ese vértice.
3. Haga exactamente lo mismo que el punto 2 con todas las k intersecciones de restricciones que no pertenecen al dominio y llámelas VI_k. Agregue en la tabla qué restricción del problema no están cumpliendo esos puntos y qué los torna infactibles.
4. Grafique desde el origen el vector gradiente de la función objetivo.
5. Indique la solución y el valor óptimo del problema.
6. Indique qué restricción(es) se activa(n) en la solución óptima. Indique cuál(es) no se activa(n).

b) Escriba el problema en su forma estándar. Explicite cuáles son variables de holgura y cuáles son variables de exceso.

c) Resuelva la Fase 1 de Simplex aplicado a este problema. Durante cada iteración, las variables x_1 y x_2 toman determinados valores. Estos se deben mostrar como un punto en un nuevo gráfico del problema, similar al gráfico del inciso a) punto 1. Debe construirse un nuevo gráfico para cada iteración simplex.

d) Resuelva la Fase 2 de Simplex aplicado a este problema, partiendo desde la base factible encontrada en c). Continúe el procedimiento de graficar los valores de las variables x_1 y x_2 en un nuevo gráfico para cada iteración.

e) Por alguna razón, se generó cierta variación δ en el recurso de la restricción R1) (es decir, variación en $b_1 = 12$). Indique mediante un argumento gráfico entre qué valores puede estar δ para mantener la configuración de base óptima actual sin que haya degenerancia. Indique los valores que debe tomar δ para que haya degenerancia en la base óptima actual.

f) Por alguna razón, se generó cierta variación en el costo de la primera variable (es decir, $c_1 = 1$), quedando constante todo lo demás. Indique mediante un argumento gráfico entre qué valores puede estar c_1 para mantener la configuración de base óptima actual sin que haya soluciones múltiples. Indique los valores que debe tomar c_1 para que haya soluciones múltiples incluyendo la base óptima actual.

1. Solución

a)

[3 pts] Asignar 0.5 puntos por cada item cumplido. No asignar puntajes intermedios por item.

La tabla para los vértices factibles

Nombre vértice factible	Coordenadas	Restricciones activas
VF1	(0, 1)	R2 y NV x_1
VF2	(0, 2)	R3 y NV x_1
VF3	$\left(\frac{40}{13}, \frac{18}{13}\right)$	R1 y R3
VF4	(4, 0)	R1 y NV x_2
VF5	(2, 0)	R2 y NV x_2

La tabla para los vértices infactibles:

Nombre intersección	Coordenadas	R activas	R que genera infactibilidad
VI1	(5, -1.5)	R1 y R2	NV x_2
VI2	$\left(-\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$	R2 y R3	NV x_1
VI3	(0, 6)	R1 y NV x_1	R3
VI4	(10, 0)	R3 y NV x_2	R1
VI5	(0, 0)	NV x_1 y NV x_2	R2

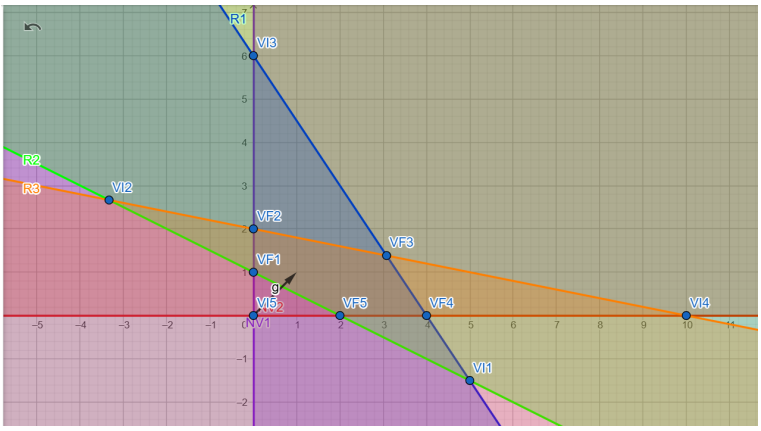


Figura 1: Grafico a)

La solución óptima del problema es (x_1, x_2)= $\left(\frac{40}{13}, \frac{18}{13}\right)$ y el valor óptimo es $\frac{58}{13}$ unidades. Las restricciones activas en el óptimo son R1 y R3. Por otro lado, las restricciones no activas son R2 y la NV de x_1 y la de x_2.

b) [1 pto] Debe estar perfectamente escrito, sin ningún error.

El problema en su forma estándar es:

$$
\begin{aligned}
\text{P) min} \quad & -x_1 - x_2 \\
\text{s.a.} \quad R1) \quad & 3x_1 + 2x_2 + h_1 = 12 \\
R2) \quad & x_1 + 2x_2 - e_2 = 2 \\
R3) \quad & x_1 + 5x_2 + h_3 = 10 \\
R4) \quad & x_1, x_2, h_1, e_2, h_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Las variables de holgura son: h_1, h_3
La variable de exceso es: e_2

c)

[3ptos] Por la correcta respuesta del inciso c) de esta pregunta.
Debe incluir los elementos calculados en la iteración, tales como la base a usar durante la iteración, $\bar{b}$ y los costos reducidos. Debe observarse explícitamente el criterio de salida y de entrada. Debe incluir el gráfico pedido.

Procedemos a aplicar simplex Fase I.

Existe un problema y es que no hay una base factible trivial para comenzar a iterar Fase II. Por eso se debe añadir una variable auxiliar que se intenta minimizar.

$$\begin{aligned} \text{P) } \min \quad & t \\ \text{s.a.} \quad & R1) \quad 3x_1 + 2x_2 + h_1 = 12 \\ & R2) \quad x_1 + 2x_2 - e_2 + t = 2 \\ & R3) \quad x_1 + 5x_2 + h_3 = 10 \\ & x_1, x_2, h_1, e_2, h_3, t \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Usaremos la siguiente notación: B los elementos de la base, N los elementos no básicos, A_B columnas de los elementos de la base, A_N columnas de los elementos no básicos y $\bar{b} = A_B^{-1} b$.

Iteración 1 Fase I

Los elementos de la base y los no básicos son:

$$B = \{h_1, t, h_3\} \quad N = \{x_1, x_2, e_2\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son:

$$c_R^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (-1, \ -2, \ 0)$$

Entra x_2 a la base. Aplicamos el criterio de salida:
$\frac{\bar{b}}{A_{N_{x_2}}} = min\left\{\frac{12}{2}, \frac{2}{2}, \frac{10}{5}\right\} = 1$
Sale t de la base por el criterio de salida. Con esto, la nueva base sería B= (x_2, h_1, h_3).

Durante la iteración, los valores que se calcularon fueron $(x_1, x_2) = (0,0)$ y se muestran con un punto verde en el siguiente gráfico.

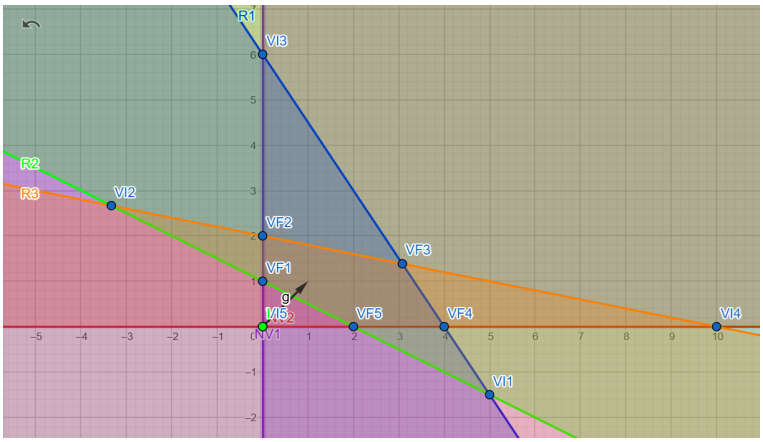


Figura 2: Gráfico iteración 1 Fase I

Ya se llegó a una base óptima puesto que t no está en la base (y por tanto es cero) y la función objetivo (de Fase 1) está acotada interiormente por cero.
Se llegó al óptimo de fase I y que una base factible para el problema der fase II es B= (x_2, h_1, h_3).
d)

[7 ptos] Por responder la totalidad de la pregunta.

[2 pts] por cada iteración y [1 pto] por conclusión del valor óptimo y solución óptima del problema original.

Debe incluir los elementos calculados en la iteración, tales como la base a usar durante la iteración, $\bar{b}$ y los costos reducidos. Debe observarse explícitamnte el criterio de salida y de entrada. Debe incluir el gráfico pedido. Al finalizar cada iteración debe concluir con la base que servirá para la próxima iteración.

Se procede a realizar las iteraciones simplex pedidas para fase II. Se parte desde la base encontrada en el inciso anterior B= (x_2, h_1, h_3). Además, se utiliza el problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{P) min} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.a.} \quad R1) \quad & 3x_1 + 2x_2 + h_1 = 12 \\ R2) \quad & x_1 + 2x_2 - e_2 = 2 \\ R3) \quad & x_1 + 5x_2 + h_3 = 10 \\ R4) \quad & x_1, x_2, h_1, e_2, h_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteración 1 Fase II

Los elementos de la base y los no básicos son:

$$B = \{x_2, h_1, h_3\} \quad N = \{x_1, e_2\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y el vector del lado derecho transformado es:

$$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son:

$$c_R^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (-0{,}5,\ -0{,}5)$$

Entra e_2 a la base. Aplicamos el criterio de salida:
$\frac{\bar{b}}{A_{Ne_1}} = min\left\{\frac{1}{-0{,}5}, \frac{10}{1}, \frac{5}{2{,}5}\right\} = 2$
Sale h_3 de la base por el criterio de salida. Con esto, la nueva base sería B= (x_2, h_1, e_2).

Durante la iteración, los valores que se calcularon fueron $(x_1, x_2) = (0{,}1)$ y se muestran con un punto verde en el siguiente gráfico.

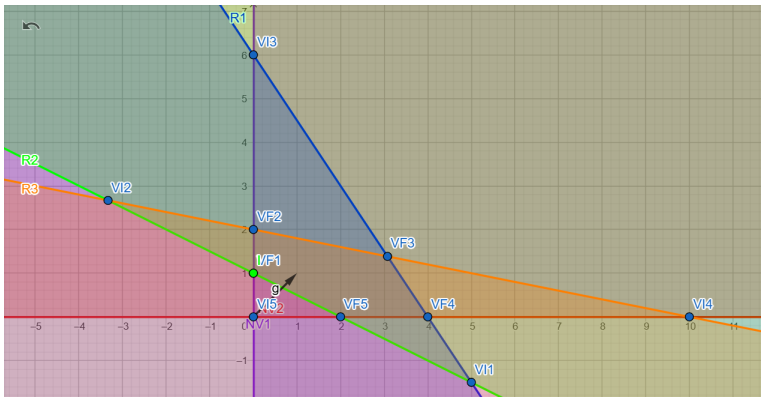


Figura 3: Gráfico iteración 1 Fase II

Iteración 2 Fase II

Los elementos de la base y los no básicos son:

$$B = \{x_2, h_1, e_2\} \quad N = \{x_1, h_3\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son:

$$c_R^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (\frac{-4}{5},\ \frac{1}{5})$$

Entra x_1 a la base porque su costo reducido es el único negativo. Aplicamos el criterio de salida:
$\frac{\bar{b}}{A_{Nx_1}} = min\left\{\frac{2}{0{,}2}, \frac{8}{2{,}6}, \frac{2}{-0{,}6}\right\} = \frac{8}{2{,}6}$
Sale h_1 de la base por el criterio de salida. Con esto, la nueva base sería B= (x_1, x_2, e_2).

Durante la iteración, los valores que se calcularon fueron $(x_1, x_2) = (0{,}2)$ y se muestran con un punto verde en el siguiente gráfico.

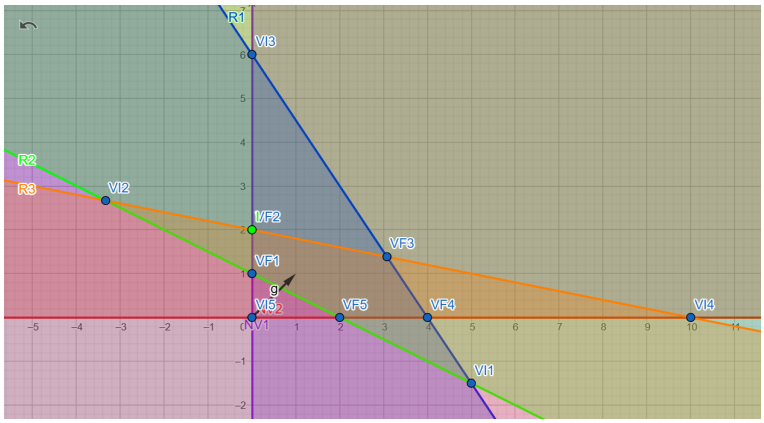


Figura 4: Gráfico iteración 2 Fase II

Iteración 3 Fase II

Los elementos de la base y los no básicos son:

$$B = \{x_1, x_2, e_2\} \quad N = \{h_1, h_3\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{40}{13} \\ \frac{18}{13} \\ \frac{50}{13} \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son:

$$c_R^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = (\frac{4}{13}, \frac{1}{13})$$

Se ha llegado al óptimo del probblema ya que todos los costos reducidos son no negativos.

Durante la iteración, los valores óptimos que se calcularon fueron $(x_1, x_2) = (\frac{40}{13}, \frac{18}{13})$ y se muestran con un punto verde en el siguiente gráfico. Además, el valor óptimo se calcula evaluando la solución óptima en la función objetivo del problema original (no en el de forma estándar que es equivalente), resultando $\frac{58}{13} \approx 4{,}46$.

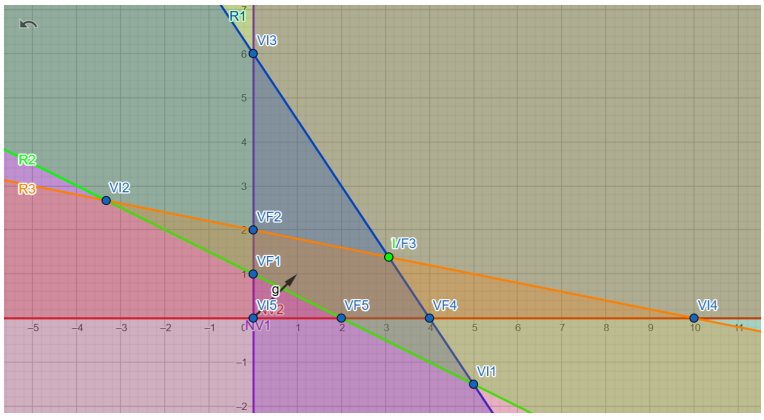


Figura 5: Gráfico iteración 3 Fase II

e)

[3 pts] En total.

[1pto] por mencionar los valores de δ para los cuales hay degenerancia. [2pts] por mencionar el rango de valores de δ para los cuales no hay degenerancia. No es necesario graficar, simplemente un argumento gráfico de traslación de restricción.

Análisis gráfico:

Es claro que al cambiar el recurso de la segunda restricción en δ unidades la restricción R1 se traslada. Si se observa el gráfico del inciso a), se puede observar que en esas traslaciones el vértice VF3 se deslizaría a través de la restrición R3 acercándose al VF2 o al VI4 cuando se cambia el recurso de R1. Lo anterior nos puede dar el razonamiento de las situaciones que deben pasar para que el vértice VF3 tenga una base degenerada. Si la R1 se traslada hasta pasar por el vértice VF2, se tendría una situación de degenerancia en la base óptima actual. Para eso el valor de δ = -8. Por otro lado, si R1 se traslada hasta pasar por VI4 se tendría denuevo una situación de degenerancia. Para que eso pase, el valor de $\delta = 18$. Se concluye por análisis gráfico que un intervalo para δ sin que se produzca degenerancia es (-8,18).

f) [3 pts] En total. [2 pts] Por mencionar el rengo para c_1 para que no haya soluciones múltiples. [1pto] Por mencionar los dos valores de c_1 que generan múltiples soluciones.

Para esto es necesario comparar el gradiente de la función objetivo con el gradiente (inclinación) de las restricciones R1 y R3 que definen el vértice óptimo.

La pendiente de las curvas de nivel de la función objetivo es $-\frac{c_1}{1} = -c_1$. La pendiente de R1 (al despejar x_2 en función de x_1) es $-\frac{3}{2}$, y la de R3 es $-1/5$.

Para que la base óptima actual se mantenga, el vector objetivo debe quedar entre los vectores normales a R1 y R3, es decir, entre sus pendientes (no llegando a ser igual nunca). Por lo tanto, se requiere:

$$\frac{1}{5} < c_1 < \frac{3}{2}$$

Para que haya soluciones múltiples, el vector objetivo debe ser paralelo a una de las restricciones activas:

$$c_1 = \frac{1}{5} \quad \text{o} \quad c_1 = \frac{3}{2}$$

Problema 2 [20 Puntos]

a) Considere el siguiente problema de programación lineal, cuyas variables son x_i para todo $i \in N = \{1, \ldots, n\}$. Considere n como un valor conocido:

$$\begin{aligned} (\text{P}) \quad \text{máx} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & & \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 & & \\ & 2x_i - x_j \geq 0 & & \forall i \in N,\ \forall j \in N \\ & x_i \geq 0 & & \forall i \in N \end{aligned}$$

(I) Si la solución factible $x = (a, a, a, \ldots, a)$ tiene un valor de 100 en la función objetivo y es óptima, entonces: ¿cuál es el valor de a y qué valores tiene el vector de costos $c \in \mathbb{R}^n$? Justifique su respuesta.

(II) En el caso en que $n = 3$ y $c = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$, ¿qué figura geométrica se forma en el conjunto de soluciones óptimas del problema?

(III) En el caso en que $n = 3$, encuentre un vector de costos $c \in \mathbb{R}^n$ tal que el problema tenga exactamente dos vértices óptimos pertenecientes a la figura de la parte (II). Describa y justifique su razonamiento, además de entregar una respuesta concreta.

b) Sea $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $c, d \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ un número real. Definimos el conjunto:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left\| \begin{bmatrix} Ax \\ Bx \end{bmatrix} \right\|_2 \leq r, \right\}.$$

(I) Demuestre que el conjunto $\{z \in \mathbb{R}^m : \|Gz\|_2 \leq r\}$ es un conjunto convexo.

(II) Sea $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$ y $l \in \mathbb{R}^k$. Demuestre que el conjunto $D \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Fx \leq l\}$ es un conjunto convexo.

c) Considere el siguiente teorema sobre funciones convexas. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(x + ty)$ es convexa (como función univariada) para todo x en el dominio de f y todo $y \in \mathbb{R}^n$. (El dominio de g aquí es el conjunto de todos los t para los cuales $x + ty$ pertenece al dominio de f). Demuestre dicho teorema usando la definición de convexidad vista en clases.

d) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \max \left\{ \log(a_1^\top x + b_1),\ \log(a_2^\top x + b_2),\ \ldots,\ \log(a_m^\top x + b_m) \right\} \\ \text{sujeto a} \quad & Cx = d, \\ & Fx \leq l, \\ & (|Gx|_i) \leq r_i \forall i \in \{1, ..., k\}, \end{aligned}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, y C, F, G, d, l, k, r son matrices y vectores de dimensiones compatibles. Además, $|Gx|_i$ representa el valor absoluto de la i-ésima fila del producto Gx. Proponga un modelo equivalente que sea lineal.

Solución

a) [7 pts]

I) [3pts]

Hay que identificar que esa solución x óptima no es un vértice porque no activa n restricciones l.i. Por teoría poliedral se sabe que las soluciones óptimas de un LP (Linear Programming), o són vértices, o son combinaciones convexas de vértices óptimos (hay múltiples soluciones). Es útil para la comprensión del dominio observar el caso $n = 2$ o $n = 3$.

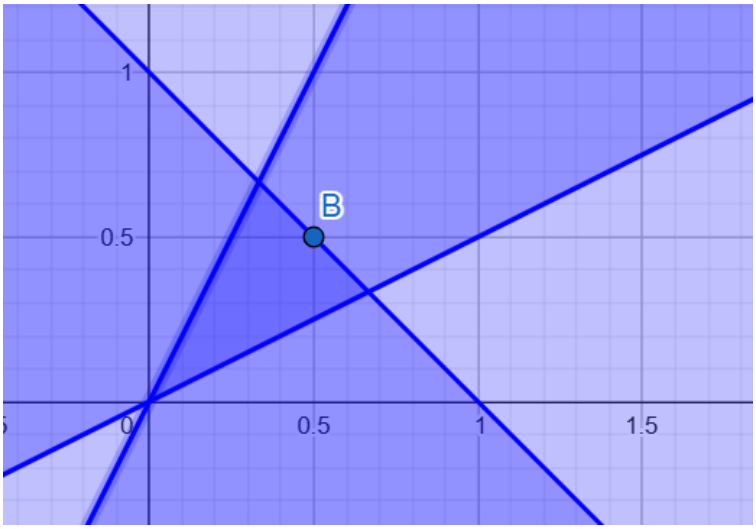


Figura 6: Dominio para n=2

Si $a = 0$, entonces no se podría obtener 100 como valor óptimo. El otro caso extremo es si $a = \frac{1}{n}$ (punto B). En ese caso, se activaría la restricción de la sumatoria únicamente pero ninguna otra. Cualquier otro caso factible de a es subóptimo por no extremarse en un dominio de LP.
Si un punto como B es óptimo, necesariamente hay múltiples soluciones y el vector de costos c tiene la misma dirección que el gradiente de la restricción, por lo tanto el vector de costos tiene todas sus componentes idénticas.
Por último, el valor de sus componentes debe ser $c = (100, 100, 100, ..., 100)$ para lograr el valor objetivo 100 en la solución óptima.

II) [1 pto]

Si $c = 1$, entonces se tendrá el mismo caso que el inciso I), en que la restricción de la sumatoria, incluye en su plano todo el conjunto de soluciones óptimas.
Se tienen 6 restricciones linealmente independientes que son capaces todas de intersectarse, en puntos factibles con la restricción de la sumatoria. Son 6 porque para cada variable, existe esa restricción combinado con las otras 2 variables.
Si se grafica el probelma se muestra cómo esas restricciones encierran un hexágono en la superficie de soluciones óptimas:

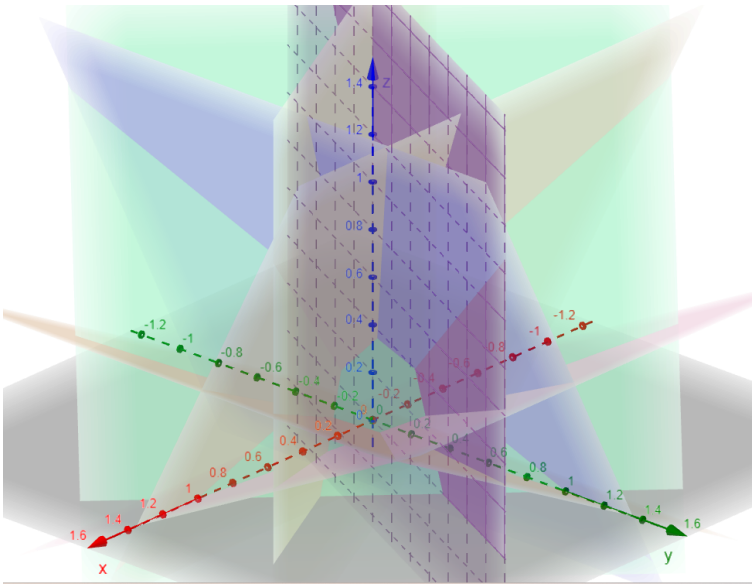


Figura 7: Dominio para n=3, Hexágono

III) [3pts]

Lo pedido se logra con algún vector c que logre que una arista de ese hexágono sea el conjunto de soluciones óptimas. Puede ser cualquier arista, pero desarrollaremos, sin pérdida de generalidad la definida por la restricción $2x_1 - x_2 \geq 0$.

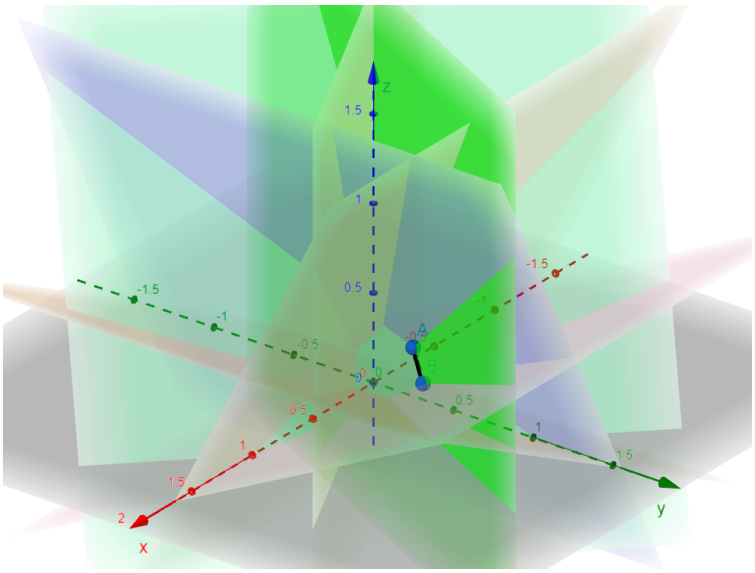


Figura 8: Conjunto de soluciones óptimas escogido

Se requiere que $c = (c_1, c_2, c_3)$ pertenezca al cono generado de los gradientes de las dos restricciones que generan la arista. Notar que para una arista de un poliedro en R^3 se requieren sólo 2 restricciones activas y no 3, como es el caso de los vértices. Como los vectores gradiente tienen sentido (hacia adentro o afuera de la restricción), se transforma la restricción $2x_1 - x_2 \geq 0$ en $-2x_1 + x_2 \leq 0$, para extraer su gradiente (ponderadores) para formar el cono generado

con el gradiente de $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$.

de esta forma se imponen condiciones sobre el vector de costos c, en que deben existir ponderadores estrictamente positivos* μ_1 y μ_2 tal que

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu_1 > 0, \ \mu_2 > 0.$$

Un vector que satisface eso es $c = (-1, 2, 1)$.

Notar que, por simetría, se podría haber escogido cualquier restricción de las que definen los bordes del hexágono. Eso se traduce en un cualquiera de los 6! re-ordenamientos de las componentes del vector gradiente que está multiplicado por μ_2. Cualquiera de esos desarrollos y sus correspondientes vectores de ejemplo se consideran válidos.

*Si se permitiera la igualdad ($= 0$), podríamos caer en soluciones múltiples combinando otros vértices, pero el enunciado indica que no puede ser así.

b) [4 pts]

I) [2 pts]

Sea el conjunto

$$C \ = \ \big\{ \, z \in \mathbb{R}^m : \|Gz\|_2 \leq r \big\}.$$

Sean $z_1, z_2 \in C$ y $\lambda \in [0, 1]$. Como G es una matriz y por lo tanto una transformación lineal,

$$G\big(\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2\big) = \lambda \, Gz_1 + (1 - \lambda) \, Gz_2.$$

Aplicando la desigualdad triangular de la norma Euclidiana,

$$\big\| G(\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2) \big\|_2 \leq \lambda \, \|Gz_1\|_2 + (1 - \lambda) \, \|Gz_2\|_2 \leq \lambda \, r + (1 - \lambda) \, r = r.$$

Por lo tanto, $\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 \in C$, lo que demuestra que C es convexo.

II) [2pts]

Considerando que

$$\begin{bmatrix} Ax \\ Bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cdot x = Hx \tag{1}$$

con

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = H \tag{2}$$

Se torna evidente que el conjunto D es un conjunto convexo por el resultado de el inciso I). Además, $\{x \in \mathbb{R}^n : Fx \leq l\}$ es convexo por ser un poliedro, como se vió en clases. Por último, $D \cap \{x \in \mathbb{R}^n : Fx \leq l\}$ es convexo por ser la intersección de conjuntos convexos.

c) [5 pts]

Se dan [2pts] ($\Rightarrow$) correcta

Se dan [2pts] ($\Leftarrow$) correcta

Se da [1pts] conclusión correcta

Este teorema, profundiza la comprensión de la convexidad de funciones, contenido importante del curso. Se debe demostrar en ambas direcciones. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos, para $x \in \operatorname{dom} f$ y $y \in \mathbb{R}^n$,

$$g(t) \ = \ f(x + ty), \qquad t \in \{t : \, x + ty \in \operatorname{dom} f\} \subseteq \mathbb{R}.$$

($\Rightarrow$) Suponga f convexa. Sean $t_1, t_2 \in \operatorname{dom} g$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces

$$g\big(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2\big) = f\big(x + (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)y\big) = f\big(\lambda(x + t_1 y) + (1-\lambda)(x + t_2 y)\big).$$

Por convexidad de f,

$$f\big(\lambda(x + t_1 y) + (1-\lambda)(x + t_2 y)\big) \leq \lambda f(x + t_1 y) + (1-\lambda) f(x + t_2 y) = \lambda g(t_1) + (1-\lambda) g(t_2),$$

Por lo tanto g es convexa.

($\Leftarrow$) Suponiendo ahora que g es convexa para todo x, y. Tomando cualquier $z_1, z_2 \in \operatorname{dom} f$ y $\lambda \in [0,1]$ (λque haga las veces de t, pero solo en ese rango de valores). Eligiendo convenientemente $x = z_2$ y $y = z_1 - z_2$; entonces

$$g(\lambda) = f\big(z_2 + \lambda(z_1 - z_2)\big) = f\big(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2\big), \qquad g(1) = f(z_1), \quad g(0) = f(z_2).$$

Por convexidad univariada de g,

$$f\big(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2\big) = g(\lambda) \leq \lambda g(1) + (1-\lambda) g(0) = \lambda f(z_1) + (1-\lambda) f(z_2),$$

que es precisamente la definición de convexidad de f.

Queda entonces demostrado el teorema por medio de una mutua implicación de los predicados.

d) [4 pts]

Se debe llegar al siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
\min_{x \in \mathbb{R}^n,\, t \in \mathbb{R}} \quad & t \\
\text{s.a. } & a_i^\top x + b_i \leq t, \qquad i = 1, \ldots, m, \\
& a_i^\top x + b_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \\
& Cx = d, \\
& Fx \leq l, \\
& -\, r_i \leq (Gx)_i, \quad i = 1, \ldots, k \\
& (Gx)_i \leq r_i, \qquad i = 1, \ldots, k.
\end{aligned}$$

No es necesaria la inclusión de $a_i^\top x + b_i \geq 0$, aunque es válida como restricción.

Problema 3 [20 Puntos]

(a) Analice la existencia de soluciones de los siguientes problemas apoyándose en los teoremas vistos en clases.

(I)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} \quad & -x^2 + 3x + 5 \\ \text{s.a.} \quad & x \geq -10 \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} \min \quad & w \\ \text{s.a.} \quad & 0 \leq x \\ & x \leq y \\ & y \leq z \\ & z \leq w \end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned} \max_{x,y \in \mathbb{R}} \quad & x^2 + y^2 \\ \text{s.a.} \quad & x + y \leq 2 \\ & x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Considere la parte a) del problema de la Pregunta 1 de la Interrogación 1 de este semestre (2025-1). Lo que se pide es la implementación computacional, usando la interfaz Python-Gurobi, del modelo del problema. Debe utilizar el modelo de la pauta que está disponible en Canvas. A continuación se indicarán los elementos técnicos a considerar en esta pregunta.

Base de datos:

La implementación computacional de este problema debe poder recibir cualquier instancia de parámetros, independiente de su tamaño y valores de los datos. No puede asumir valores ni cardinalidades de ningún parámetro o conjunto. Tanto los productos como los tipos de materiales serán trabajados de manera abstracta, sólo considerándolos por sus índices. Toda la información de las instancias de datos vendrá en 9 archivos con extensión .csv. Una instancia de estos archivos puede descargarse desde Canvas, junto al enunciado de la tarea. Es fuertemente recomendado testear la robustez del código con estas instancias, ya que para la evaluación se utilizarán otros de idéntico formato pero con diferentes valores y dimensiones. Cabe aclarar que los tamaños de los archivos CSV indicarán los tamaños de los conjuntos I y J de la pauta. Puede asumir que todos los valores dentro de los archivos son valores enteros. Se debe considerar que en la pauta todos esos conjuntos de índices parten en 1 y terminan en la cardinalidad del conjunto. A continuación se detalla el formato de cada uno de estos archivos.

productos_prohibidos.csv

Este archivo contiene $|I|$ filas, donde cada fila i corresponde al producto $i \in I$. Cada fila contiene la lista de productos prohibidos para el producto i, separados por comas. Si un producto i no prohíbe ningún otro producto, su fila correspondiente se deja vacía. Así, la primera fila almacena el conjunto P_1, la segunda fila el conjunto P_2, y así sucesivamente hasta $P_{|I|}$.

ingreso_por_unidad.csv

Este archivo contiene una matriz de $|I|$ filas y una columna. Cada fila i almacena el valor del parámetro r_i, correspondiente al ingreso por unidad producida del producto $i \in I$. La primera fila contiene el valor de r_1, la segunda fila el valor de r_2, y así sucesivamente hasta $r_{|I|}$.

material_requerido.csv

Este archivo contiene una matriz de $|I|$ filas y $|J|$ columnas. Cada fila i representa un producto $i \in I$, y cada columna j representa un material $j \in J$. La celda ubicada en la fila i y la columna j contiene el valor del parámetro a_{ij}, correspondiente a la cantidad del material j requerida para confeccionar una unidad del producto i. Los datos están ordenados por filas según los índices de los productos y por columnas según los índices de los materiales.

material_disponible.csv

Este archivo csv contiene una matriz de $|J|$ filas y una columna. Cada fila j almacena el valor del parámetro b_j, correspondiente a la cantidad inicial disponible del material $j \in J$. La primera fila contiene el valor de b_1, la segunda fila el de b_2, y así sucesivamente hasta $b_{|J|}$.

costo_material.csv

Este archivo contiene una matriz de $|J|$ filas y una columna. Cada fila j almacena el valor del parámetro c_j, correspondiente al costo por unidad del material $j \in J$, sin considerar descuentos. La primera fila contiene el valor de c_1, la segunda fila el de c_2, y así sucesivamente hasta $c_{|J|}$.

costo_variable.csv

Este archivo contiene una matriz de $|I|$ filas y una columna. Cada fila i almacena el valor del parámetro ρ_i, correspondiente al costo variable de producción por unidad del producto $i \in I$. La primera fila contiene el valor de ρ_1, la segunda fila el de ρ_2, y así sucesivamente hasta $\rho_{|I|}$.

costo_fijo.csv

Este archivo contiene una matriz de $|I|$ filas y una columna. Cada fila i almacena el valor del parámetro F_i, correspondiente al costo fijo por producir el producto $i \in I$. La primera fila contiene el valor de F_1, la segunda fila el de F_2, y así sucesivamente hasta $F_{|I|}$.

presupuesto_materiales.csv

Este archivo contiene una única celda con el valor del parámetro W, correspondiente al presupuesto total disponible para la compra de materiales. Este archivo no tiene encabezado ni más de una fila.

maximo_productos.csv

Este archivo contiene una única celda con el valor del parámetro N, correspondiente al número máximo de productos diferentes que pueden ser producidos por restricciones de capacidad. Este archivo no tiene encabezado ni más de una fila.

1.1. Código main.py

Se entrega un archivo `mainXXX.py` con una estructura base de funciones vacías. La tarea consiste en completar únicamente las siguientes funciones, sin modificar el resto del código:

a) `cargar_datos()`: Lee los 9 archivos `.csv` especificados en el enunciado y retorna un diccionario con todos los parámetros del modelo. Puedes asumir que los archivos están en la misma carpeta que el código y tienen el formato correcto. Se espera que el código no contenga rutas absolutas de tal forma que pueda ser ejecutado en cualquier computador.

b) `construir_modelo(data)`: Construye el modelo de optimización en Gurobi, utilizando las variables, restricciones (R1–R5) y función objetivo según la pauta. Debes utilizar los datos cargados desde el diccionario `data`.

c) `imprimir_resultados(model):` Recibe el modelo optimizado y muestra por consola el valor óptimo (con unidad) y las cantidades producidas por cada tipo de producto.

No modificar la estructura general del código base. Se asume que siempre existe una solución óptima. Incluye comentarios breves en cada parte del código para facilitar su comprensión y corrección.

Solución

a) [5 pts]

I) [1pto]

No existe solución óptima debido a que si $x \to +\infty$ la función objetivo $\to -\infty$.

II) [2 pts]

El dominio $D = \{(x, y, z, w) \in R^4; 0 \leq x, x \leq y, y \leq z, z \leq w$ es no vacío ($(1, 1, 1, 1) \in D$), es cerrado (todas las restricciones son $\geq, \leq$, ó=, y no son $>, <$), la función es continua en el dominio al ser función lineal y la función es coercitiva en el dominio. La función es coercitiva ya que por la estructura del dominio no pueden haber variables negativas y cada vez que una variable tiende a infinito, entonces al función objetivo tiende a infinito. Por las 4 hipótesis verificadas del teorema de Bolzano-Weierstrass Extendido, se afirma que el problema tiene solución óptima.

III) [2 pts]

El dominio $D = \{(x, y) \in R^2; 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 2\}$ es no vacío ($(1, 1, 1, 1) \in D$), es cerrado (todas las restricciones son $\geq, \leq$, ó=, y no son $>, <$), es acotado (ninguna de las 2 variables pueden ser negativas ni su suma mayor a 2) y, por último, la función es continua en el dominio al ser función cuadrática. Por las 4 hipótesis verificadas del teorema de Bolzano-Weierstrass, se afirma que el problema tiene solución óptima.

b) [15 pts]

El valor óptimo es 668.14 unidades monetarias. El octavo producto se produce en 8 unidades (también se consideraría válido se se indica que es el producto 7 contando desde index 0).

[4 pts] Construir la función `cargar_modelo():`.

Deben estar en formato diccionario. Si usan otro formato para los datos se descuentan 2 puntos.

[6 pts] Construir la función `construir_modelo(data):`

[2 pts] por variables. Deben ser continuas y binaria, no enteras y binaria[-1 pto].

[3 pts] por restricciones

[1 pto] por f.o.

[5 pts] Construir la función `imprimir_resultados(model):`
[5 pts] por imprimir valor objetivo y solución

[-2 pts] por valor incorrecto.

[-2 pts] por resultados de variables incorrectos.