PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2019 - 1
Profesores: : A. Cataldo - R. Cuadrado - J. González - M. Klapp - P. Guajardo

Examen

Duración: 3 horas.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 75 puntos. Sea estratégico, el orden de preguntas no tiene relación con su dificultad.*
- ◇ *Conteste cada pregunta en un solo cuadernillo. En cada uno coloque su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, deje cada cuadernillo en su puesto para que sean retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
- ◇ *Dos rondas de preguntas al profesor (una 15 minutos después de comenzar, otra cuando transcurra el 60 % del tiempo). Está prohibido hacer preguntas al ayudante. Deje anotado cualquier supuesto.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados (incluye teléfonos celulares).*

Pregunta 1 (15 puntos)

Una familia está compuesta por un número par n de hermanos, todos ellos con nombres diferentes. Suponga que el conjunto N contiene el nombre de todos sus integrantes, es decir, $|N| = n$.

En vacaciones de invierno, la familia tiene como tradición realizar $n-1$ días consecutivos de cenas entre los hermanos (puede considerar que el primer día de cenas es el 1 y el último es el $n-1$). En cada día $t \in \{1, \ldots, n-1\}$, los hermanos realizan $n/2$ cenas simultáneas de a dos, con uno de los hermanos como anfitrión y otro hermano como invitado.

Este año, la familia transformará su tradición en una competencia cuyas reglas son: en cada cena, el hermano invitado calificará a su anfitrión como bueno (entrega 2 puntos al anfitrión), regular (entrega 1 punto al anfitrión) o malo (entrega 0 puntos al anfitrión); el hermano invitado no recibe puntos; ningún hermano será anfitrión en más de $\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right)$ o menos de $\left(\frac{n-1}{2} - \frac{1}{2}\right)$ veces; no se podrá ser anfitrión ni invitado más de una vez en dos días consecutivos; cada pareja posible de hermanos cenará exactamente una vez juntos (sin importar quien es anfitrión y quien es invitado); y ganará la competencia el hermano que sume más puntos durante la celebración de la tradición de este año.

El mayor de estos hermanos es experto en investigación de operaciones y se ha ofrecido a confeccionar el calendario de cenas que determina qué día le toca ser a cada hermano anfitrión y quién invitará. Para diseñar el calendario, este hermano mayor ha estimado el resultado de cada posible cena construyendo el parámetro r_{ij}, que indica los puntos que conseguirá el hermano i si hace de anfitrión del hermano j (quien es la visita), donde $i, j \in N : i \neq j$.

En función de la información antes entregada, formule el modelo de programación lineal entera que permita al hermano mayor planificar el calendario de cenas de este año buscando maximizar la cantidad total de cenas atractivas. Esto, considerando que el hermano mayor ha definido que una cena es considerada atractiva cuando la diferencia entre los puntos que tienen el anfitrión y el visitante justo antes de empezar esa cena es menor o igual a δ.

Solución:

VARIABLES: (6 PUNTOS: 3 POR LAS VARIABLES DE ASIGNACIÓN Y 3 POR LAS VARIABLES NECESARIAS PARA MODELAR EL OBJETIVO)

x_{ij}^t : $\begin{cases} 1, \text{ si el hermano } i \text{ es anfitrión del hermano } j \text{ durante el día } t \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$

A_{ij}^t : $\begin{cases} 1, \text{ si la cena en que el hermano } i \text{ es anfitrión del hermano } j \text{ durante el día } t \text{ es atractiva} \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$

y_{ij}^t : $\begin{cases} 1, \text{ si la diferencia entre los puntos que tienen los hermanos } i \text{ y } j \text{ al comenzar la cena del día } t \text{ es menor o igual a } \delta \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$

P_i^t : cantidad de puntos que tiene el hermano i al comenzar la cena del día t

FUNCIÓN OBJETIVO: MINIMIZAR LA CANTIDAD TOTAL DE DÍAS EN QUE SE JUEGA (1 PUNTO)

$$\max \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: j \neq i} A_{ij}^t$$

RESTRICCIONES (8 PUNTOS):

R1) Cada hermano es anfitrión a lo más $\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right)$ veces.

$$\sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^t \leq \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \quad \forall i \in N.$$

R2) Cada hermano es anfitrión a lo menos $\left(\frac{n-1}{2} - \frac{1}{2}\right)$ veces.

$$\sum_{t=1}^{n-1} \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^t \geq \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \quad \forall i \in N.$$

R3) Ningún hermano es anfitrión dos días consecutivos.

$$\sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^t + \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^{t+1} \leq 1 \quad \forall i \in N; t = 1, \ldots, n-2.$$

R4) Ningún hermano es invitado dos días consecutivos.

$$\sum_{j \in N: j \neq i} x_{ji}^t + \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ji}^{t+1} \leq 1 \quad \forall i \in N; t = 1, \ldots, n-2.$$

R5) Cada pareja de hermanos debe cenar junta exactamente una vez.

$$\sum_{t=1}^{n-1} \left(x_{ij}^t + x_{ji}^t\right) = 1 \quad \forall i, j \in N : i < j.$$

R6) Cada hermano debe cenar (de anfitrión o invitado) cada noche solo una vez.

$$\sum_{j \in N: j \neq i} \left(x_{ij}^t + x_{ji}^t\right) = 1 \quad \forall i \in N; t = 1, \ldots, n-1.$$

R7) Construcción del puntaje de cada hermano.

$$P_i^t = \sum_{j \in N: j \neq i} r_{ij} \left(\sum_{\theta=1}^{t-1} x_{ij}^{\theta} \right) \quad \forall i \in N; t = 1, \ldots, n-1.$$

que también se puede escribir como:

$$P_i^t = P_i^{t-1} + \sum_{j \in N: j \neq i} r_{ij} x_{ij}^{t-1} \quad \forall i \in N; t = 1, \ldots, n-1.$$

R8) Construcción de la variable y_{ij}^t.

$$P_i^t - P_j^t \leq \delta + M\left(1 - y_{ij}^t\right) \quad \forall i, j \in N : i \neq j; t = 1, \ldots, n-1.$$

$$P_j^t - P_i^t \leq \delta + M\left(1 - y_{ij}^t\right) \quad \forall i, j \in N : i \neq j; t = 1, \ldots, n-1.$$

con $M >>> 0$ (en este caso, basta con que $M = 2(n-1)$).

R9) Condición para que una cena sea atractiva.

$$2A_{ij}^t \leq x_{ij}^t + y_{ij}^t \quad \forall i, j \in N : i \neq j; t = 1, \ldots, n-1.$$

o equivalentemente:

$$A_{ij}^t \leq x_{ij}^t \quad \forall i, j \in N : i \neq j; t = 1, \ldots, n-1.$$

y

$$A_{ij}^t \leq y_{ij}^t \quad \forall i, j \in N : i \neq j; t = 1, \ldots, n-1.$$

R10) Naturaleza variables.

$$\begin{array}{lll} x_{ij}^t & \in \{0,1\} & \forall i, j \in N : i \neq j; t = 1, \ldots, n-1. \\ A_{ij}^t & \in \{0,1\} & \forall i, j \in N : i \neq j; t = 1, \ldots, n-1. \\ y_{ij}^t & \in \{0,1\} & \forall i, j \in N : i \neq j; t = 1, \ldots, n-1. \\ P_i^t & \in \mathbb{Z}_0^+ & \forall i \in N; t = 1, \ldots, n-1. \end{array}$$

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) **(5 puntos)** Considere un dominio lineal en $\mathbb{R}^n$ de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m_+$ y $n < m$. Considere que $\hat{x}$ es un vértice del dominio para el cual todas las restricciones del subconjunto $I \subset \{1, \dots m\}$ están activas. Diseñe una función objetivo lineal c que dependa de A, b e I y tal que x_0 sea la única solución óptima del problema mín $\{c^T x : Ax \leq b\}$.

Solución: El gradiente del objetivo con signo negativo debe estar en el cono generado por gradientes de restricciones activas, es decir $-c = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i^T x$, donde a_i es la fila i de A y $\lambda_i > 0$ (mayor estricto para que sea única). En particular se puede utilizar $\lambda_i = 1$, es decir: $c = \sum_{i \in I} -a_i^T x$.

Otra forma de responder (y entender lo de arriba): El vértice es el único punto del dominio en donde todas las restricciones en I están activas, por lo que minimiza las holguras de las mismas, es decir, es el único punto del dominio que cumple $\sum_{i \in I} h_i = 0$, equivalentemente $\sum_{i \in I}(b_i - a_i^T x) = 0$. Restando constantes, se concluye que minimiza $\sum_{i \in I} -a_i^T x$

(b) **(7 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización lineal continua:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \\ s.a. & 3x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 21 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \geq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq 15 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Responda cada pregunta a continuación. Justifique cada respuesta.

(i) **(2 puntos)** ¿Determina el punto $(0, 7, 0)$ una solución básica factible del problema?

(ii) **(2 puntos)** ¿Determina el punto $(6, 0, 3)$ una solución básica factible del problema?

(iii) **(3 puntos)** Considerando el problema dual, comente la veracidad de esta aseveración: "Existe una solución dual factible con valor objetivo igual a 12".

Solución:

(i) No, pues solamente hay dos restricciones l.i. activas (no negatividad de x_1 y x_3). Necesita ≥ 3 para ser vértice.

(ii) Sí. La primera, la tercera y la no negatividad de x_2 están activas. Es una solución base. La base es x_1, x_3 y el exceso de la segunda restricción.

(iii) No es posible. Por teorema débil de dualidad: El valor objetivo de $(0, 7, 0)$ es 14, por lo que toda solución dual factible y cumple que $b^T y \geq 14$.

(c) **(3 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización lineal continua:

$$\begin{array}{lllll} P: & \text{mín} & c^T x & & \\ s.a. & & Ax & \leq & b \\ & & x & \geq & 0, \end{array}$$

donde A es una matriz de m filas y n columnas, y $x \in \mathbb{R}^n$. Comente la veracidad de la siguiente afirmación: "Si se encuentra un punto $y_0 \in \mathbb{R}^m$, tal que $c^T x_0 \geq b^T y_0$ para algún x_0 factible en P, entonces P admite solución óptima". Justifique.

Solución: Falso, pues no se dice que y es dual factible, por lo que podría ser cualquier vector.

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) **(5 puntos)** Considere el siguiente dominio lineal con 2019 variables binarias dado por:

$$\Omega = \left\{x \in \{0,1\}^{2019} : x_i + x_j \leq 1; \qquad \forall i,j : 1 \leq i < j \leq 2019\right\}$$

(i) **(2 puntos)** Muestre que la relajación lineal de Ω posee al menos un vértice fraccionario.
Solución: Considere el vértice $v = \{\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\}$. Es un vértice, pues hay $n(n-1)/2$ restricciones activas (n l.i.).
Otra forma de responder:, es que no existe $h \neq 0$ tal que $v \pm h$ sea factible, pues las restricciones implican que todo h debe ser nulo.

(ii) **(1 puntos)** Considere la siguiente desigualdad: $\sum_{i=1}^{2019} x_i \leq 1$. Demuestre que es un corte válido para cualquier punto factible binario de Ω.
Solución: Ningún par de variables binarias x_i y x_j pueden ser 1 a la vez. Esto implica que la suma de variables binarias debe ser menor o igual a 1 para todo punto factible del dominio entero.

(iii) **(2 puntos)** Resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\text{mín}\{\sum_{i=1}^{2019} i \cdot x_i \text{ sujeto a: } x \in \Omega\}$$

¿Cuál es su valor óptimo? ¿Cuál es su solución óptima? Justifique su respuesta.
Solución: El óptimo es trivial. La solución óptima es 0 con valor objetivo 0. (Nota: El profesor puso un min en vez de un max y regaló la pregunta. ☹)

(b) **(6 puntos)** Comente la veracidad de las siguientes afirmaciones relacionadas con optimización lineal continua. Justifique cada respuesta:

(i) **(2 puntos)** En el método simplex: La solución asociada a una base factible puede ser óptima sin que en esta base se cumpla el criterio de optimalidad.

(ii) **(2 puntos)** Un problema con vértices degenerados posee al menos una restricción que es redundante para definir el dominio.

(iii) **(2 puntos)** Si una restricción está activa en un vértice, entonces la variable dual asociada será necesariamente distinta de cero.

Solución:

(i) Verdadero. Un vértice degenerado puede ser óptimo, pero solamente una de sus bases podría cumplir condiciones de optimaidad.

(ii) Falso, tome la punta de una pirámide 3D de base cuadrada. Hay 4 restricciones activas (vértice degenerado), pero no sobran restricciones. Cualquiera que saque agranda el dominio.

(iii) Falso. La implicancia es en el otro sentido. Es decir, si la restricción no está activa, entonces la variable dual es cero. Si está activa, la variable dual púede ser distinta de cero, pero no necesariamente lo es.

(c) **(4 puntos)** Considere que usted está resolviendo un problema de optimización lineal entero de maximización mediante el algoritmo de Branch & Bound (B&B). Asuma que usted se encuentra en una etapa intermedia y acaba de resolver la relajación lineal del $k-$ésimo nodo del árbol.

¿En cuál(es) de las siguientes cuatro situaciones puede asegurar que no es necesario explorar ramificaciones desde el nodo k hacia abajo en el árbol B&B? Justifique.

(i) **(1 puntos)** Si la solución relajada del nodo k es entera y su valor objetivo es mayor que el valor incumbente.

Solución: Puede detenerse. La solución relajada es entera. Independiente del valor objetivo esto detiende la búsqueda hacia abajo.

(ii) **(1 puntos)** Si la solución relajada del nodo k es entera y su valor objetivo es menor que el valor incumbente.

Solución: Puede detenerse. La solución relajada es entera. Independiente del valor objetivo esto detiende la búsqueda hacia abajo.

(iii) **(1 puntos)** Si la solución relajada del nodo k es fraccionaria y su valor objetivo es mayor que el valor incumbente.

Solución: Debe ramificar hacia abajo. Puede haber soluciones enteras mejores hacia abajo del árbol.

(iv) **(1 puntos)** Si la solución relajada del nodo k es fraccionaria y su valor objetivo es menor que el valor incumbente.

Solución: Puede detenerse. Si la relajación lineal (que sobreestima al valor óptimo entero) es peor que el incumbente, entonces no habrá solucines enteras mejores hacia abajo.

Pregunta 4 (15 puntos)

Parte A (5 puntos)

Considere una familia de 5 problemas de flujo en redes a costo mínimo sobre el mismo grafo $G = (N, A)$.

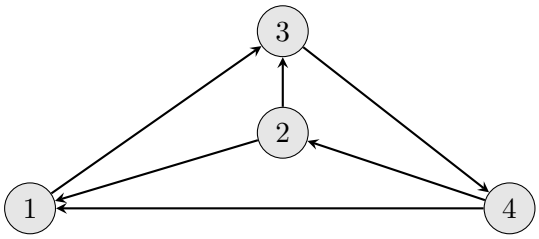


Figura 1: grafo $G = (N, A)$

Los datos de cada problema se detallan en la siguiente tabla:

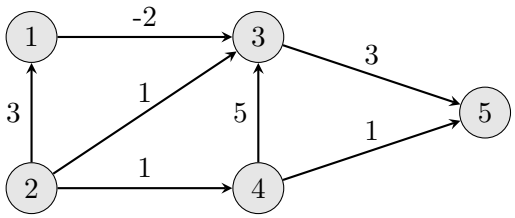
Problema	$c_{1,3}$	$c_{2,1}$	$c_{2,3}$	$c_{3,4}$	$c_{4,1}$	$c_{4,2}$	b_1	b_2	b_3	b_4
1	-1	1	1	1	1	-2	-1	1	-2	1
2	0	1	1	1	-2	1	1	-1	-1	1
3	-1	-1	2	1	1	1	1	-1	-1	1
4	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-2	1
5	-1	-2	1	1	1	1	1	1	-2	0

De los 5 problemas planteados, sólo uno admite solución óptima. ¿Cuál? Argumente.

Solución: Es 3. Los problemas 1 y 4 no están balanceados y por lo tanto son infactibles. El problema 2 tiene un ciclo de costo negativo dado por $1-3-4-1$ y por lo tanto no es acotado. El problema 5 también tiene un ciclo de costo negativo dado por $1-3-4-2-1$ y por lo tanto no es acotado.

Parte B (10 puntos)

En la Figura a continuación se detalla un problema de flujo en redes a costo mínimo sobre una red $G = (N, A)$ con costos por unidad de flujo sobre los arcos. Lamentablemente las ofertas netas en nodos se han perdido, pero se conoce una solución factible con $x_{13} = 10$, $x_{35} = 9$ y $x_{45} = 5$ y el resto de las variables de arco en cero.



(a) **(4 puntos)** Deduzca la oferta faltante en cada nodo.

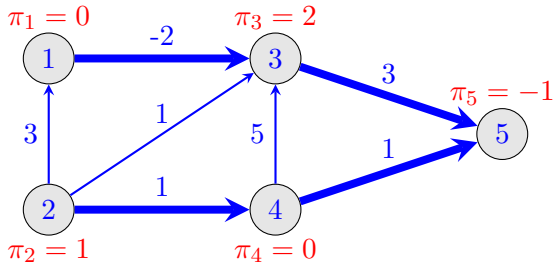
Solución: La solución factible implica las siguientes ofertas: $b_1 = 10$, $b_2 = 0$, $b_3 = -1$, $b_4 = 5$, $b_5 = -14$.

(b) **(4 puntos)** ¿Es la solución factible entregada óptima o no? Argumente su respuesta.

Solución: La solución factible entregada forma un bosque de 3 arcos con flujo positivo y falta un arco para formar un árbol. Se debe completar la base agregando una variable adicional con flujo cero (cuidando que forme un árbol). Tomemos (arbitrariamente) a $(2,4)$ de tal manera que nuestra base queda:

$$B = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,5)\}.$$

En el siguiente grafo se detallan los potenciales asociados a esta base:



El costo reducido de $(2,1)$ es $r_{21} = 3 - 1 + 0 = 2$, el de $(2,3)$ es $r_{23} = 1 - 1 + 2 = 2$ y el de $(4,3)$ es $r_{43} = 5 - 0 + 2 = 7$. Es óptima!

(c) **(2 puntos)** ¿En qué rango de valores puede estar c_{43} para mantener la solución en la condición detectada para la respuesta anterior (es decir, optima o sub-óptima)?

Solución: $c_{43} \geq -2$

Pregunta 5 (15 puntos)

Parte A (7 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización cuadrático con una restricción de igualdad:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} x^T A x - b^T x + c \text{ sujeto a: } d^T x = 0 \right\}$$

Asuma que $b, d \in \mathbb{R}^n$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ y que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica y positiva definida. Responda cada pregunta de forma independiente:

(a) **(1 puntos)** Argumente que el problema posee una única solución óptima.

Solución: El objetivo es cuadrático, estrictamente convexo y el dominio es lineal. Además, existe una solución factible (origen). Luego, por teoremas de existencia y unicidad, el problema admite solución óptima y debe ser única.

(b) **(2 puntos)** Si $d = 0$ y y $b \neq 0$: Identifique la solución óptima del problema ed función de los parámetros A, b y c. Justifique.

Solución: En este caso el problema es irrestricto. Por convexidad, basta encontrar un punto tal que $\nabla f(x) = 0$. El gradiente de $f(x)$ es igual a $\nabla f(x) = Ax - b = 0$. Es decir $x^* = A^{-1}b$.

(c) **(2 puntos)** Si $b = 0$ y $d \neq 0$: Identifique la solución óptima del problema como función de los parámetros A, c y d. Justifique.

Solución: En este caso el problema es restricto, pero el óptimo irrestricto se da en el origen (que es factible). Es decir $x^* = 0$.

(d) **(2 puntos)** Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$: Identifique la solución óptima del problema como función de los parámetros A, b, c y d. Justifique.

Solución: En este caso el problema es restricto y de debe utilizar la condición de Lagrange. En el óptimo, se debe cumplir que: $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$. En este caso equivale a: $Ax - b = \lambda d$, por lo cual se deduce que: $x^* = A^{-1}(\lambda d + b)$.

Como la solución óptima debe ser factible y cumplir $d^T x = 0$, se deduce que: $d^T A^{-1}(\lambda d + b) = 0$. Lo anterior permite despejar $\lambda^* = -\frac{d^T A^{-1} b}{d^T A^{-1} d}$.

Luego: $x^* = A^{-1}b - \frac{d^T A^{-1} b}{d^T A^{-1} d} \cdot A^{-1} d$.

Ayuda: Trabaje de forma matricial. Recuerde que $x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$.

Parte B (8 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización no lineal con restricciones de desigualdad:

$$\min_{(x_1, x_2)} \left\{ (x_1 - 1)^4/4 + x_2^2 \text{ sujeto a: } x_1 - x_2^2 \geq 2, \quad x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0 \right\}$$

(a) **(2 puntos)** Demuestre que el problema admite solución óptima.

Solución: Es un objetivo cuadrático (continuo) y convexo. El problema irrestricto posee un mínimo en $(1, 0)$, por lo que la F.O. está acotada. El dominio es factible, e.g., $(3, 1)$ es solución factible.

(b) **(3 puntos)** Identifique la solución óptima del problema y su valor óptimo. Justifique.

Solución: La segunda restricción es redundante, pues de la primera restricción, se deduce que $x_1 \geq 2$.

El problema es convexo y posee solución óptima única, pues la F.O. es estrictamente convexa y la primera restricción es una curva de subnivel de una función convexa. Luego, basta encontrar un punto KKT y será el óptimo.

La primera restricción debe estar activa. De lo contrario, la condición de optimalidad arroja el punto óptimo irrestricto $(1, 0)$ que es infactible.

Si $x_2 > 0$: Se debe cumplir $[(x_1 - 1)^3, 2x_2] + \lambda[-1, 2x_2] = 0$ para $\lambda > 0$, pero este sistema fuerza a $\lambda = -1 < 0$.

Si $x_2 = 0$. Se debe cumplir $(x_1 - 1)^3 - \lambda = 0$, $x_1 = 2$, $2x_2 + \lambda 2x_2 + \mu \geq 0$. Es decir $\lambda = 1$. Luego $x = (2, 0)$ con $\lambda = 1$ es un punto KKT válido y la solución óptima del problema. El valor óptimo es $0,25$

Nota de corrección: También se acepta la solución gráfica o tomar el punto $(2, 0)$ y verificar que cumple KKT, pero en este caso tendrá que encontrar λ de alguna forma para la siguiente pregunta.

(c) **(3 puntos)** Estime el cambio en el valor óptimo si se reemplaza la primera restricción por $x_1 - x_2^2 \geq 2,001$. **Solución:** Aumentaría en $\lambda \cdot 0,001 = 0,001$. El nuevo valor óptimo sería aproximadamente $0,251$