ICS1113 OPTIMIZACION, 2010/1.
EXAMEN. SOLUCION

Parte 1 (24 pts).

a) Responda brevemente las siguientes preguntas:

i) (4 pts) Comente respecto a cómo se compara la velocidad de convergencia del método del gradiente con la del método de Newton. Explique con precisión por qué las diferencias, si las hubiere.

Respuesta: El método de Newton es más rápido porque su convergencia es cuadrática, comparada con la del método del gradiente cuya convergencia es lineal. De ese modo, pese a que Newton es más caro por iteración, en el global ocupa en general menos tiempo en llegar a una solución

4 puntos por nombrar diferencias principales y decir que Newton es más rápida.
3 puntos por nombrar diferencias menos las de cuadrática v/s lineal.
2 puntos por nombrar características de ambos métodos pero no las suficientes para destacar diferencias de velocidad de convergencia.

ii) (4 pts) Considere un problema de minimización no restringido de la forma $\min\{f(x) : x \in R^n\}$. Si estamos en un punto x^0, entonces $d = -\nabla f(x^0)$ es la mejor dirección en la que podríamos movernos para encontrar la solución óptima lo más rápido posible. ¿Es verdad o no? Justifique adecuadamente.

Respuesta: No es así, en general. La dirección $d = -\nabla f(x^0)$ en términos marginales es la mejor pero si llegamos más rápido o no depende de cuánto podemos avanzar por la dirección. Puede haber otras con las cuales globalmente se llegue más rápido. Por ejemplo, una dirección de Newton.

4 puntos por decir que no es verdad ya que no siempre es la dirección más rápida.
2 puntos por decir que es la dirección de máximo decrecimiento pero no decir que no es la más rápida.

iii) (4 pts) Considere un problema de optimización con restricciones. Para que se pueda escribir el gradiente de la función objetivo en el óptimo como combinación lineal de los gradientes de las restricciones activas en ese punto, es necesario que se cumpla alguna condición de regularidad en el punto óptimo. ¿Es verdad o no? Justifique.

Respuesta: No necesariamente. El punto puede no ser regular, pero aún así podría escribirse como combinación lineal de los gradientes.

4 puntos por decir que tanto puntos regulares como no regulares se pueden escribir como combinación lineal de los gradientes.
2 puntos por decir que sólo los puntos regulares se pueden escribir como combinación lineal de los gradientes.

iv) (4 pts) Considere un problema de optimización con restricciones. Si una restricción es activa en la solución óptima entonces el correspondiente multiplicador de Lagrange indica la tasa marginal de cambio del valor óptimo cuando se perturba el lado derecho de la restricción. ¿Es verdad o no? Explique claramente por qué sí o por qué no.

Respuesta: Eso sólo es verdad si el multiplicador es distinto de 0 y está determinado en forma única.

4 puntos por decir que es verdad y que el multiplicador debe ser distinto de cero.
2 puntos por no decir que el multiplicador debe ser distinto de cero.

v) (4 pts) "Un problema con restricciones lineales asegura que toda solución factible es regular". Comente la veracidad de esta afirmación.

Respuesta: Efectivamente es verdad, en la medida que la región factible sea no vacía.

4 puntos por decir que es verdad.
2 puntos por decir que depende del rango del Jacobiano.

vi) (4 pts) "En un problema de Programación Lineal, todos los vértices o puntos extremos satisfacen las condiciones KKT" ¿Es verdad o no? Justifique con claridad.

Respuesta: Falso, eso sólo es verdad en aquellos vértices que corresponden a soluciones óptimas del problema.

4 puntos por decir que es sólo verdad para los óptimos.

Parte 2. (20 pts)

a) (10 pts) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max \quad & x+2y \\ s.a. \quad & x^2-8x+y^2 \le 0 \\ & \frac{x}{2}-y \ge 2 \\ & x, y \ge 0 \end{aligned}$$

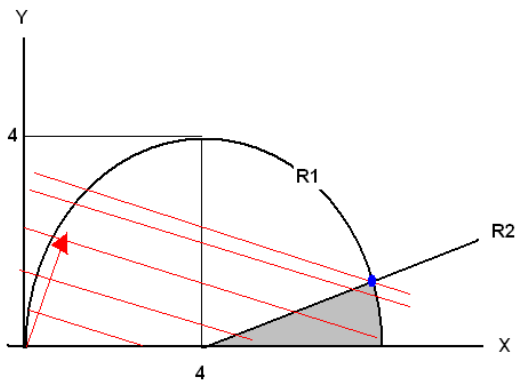
1) **(2 pts)** Resuélvalo en forma gráfica y encuentre la solución óptima. ¿Cuánto es el valor óptimo?
2) **(4 pts)** Verifique que se cumplan las condiciones necesarias de primer orden (KKT) en dicho punto. Indique con claridad si el punto es regular o no.
3) **(4 pts)** Calcule aproximadamente cuánto es el nuevo valor óptimo del problema si el lado derecho de la segunda restricción cambia de 2 a 2,2. Haga esto sin recurrir al gráfico.

Respuesta:

1) La figura de más abajo muestra el gráfico del problema. Nótese que la circunferencia corresponde a la definida por:

$$(x-4)^2+y^2 \le 16$$

y desarrollando queda $x^2-8x+16+y^2 \le 16$ y que corresponde a la primera restricción del problema.



El óptimo está en la intersección de ambas restricciones dado por: $\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}+4;\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)\approx(7.58,1.79)$

El valor óptimo es aproximadamente igual a 11,16.

Por encontrar la solución óptima: 1punto.
Por encontrar el valor óptimo: 1 punto

2) Aquí sólo hay que plantear las condiciones del siguiente lagrangeano:

$$L=-x-2y+\lambda\left(x^2-8x+y^2\right)+\mu\left(2-\frac{x}{2}+y\right)$$

De las condiciones, las asociada a los multiplicadores son cumplidas al estar las restricciones activas.
Considerando que ambas variables son distintas de cero, las asociadas a las variables quedan:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-1+2\lambda x-8\lambda-\frac{\mu}{2}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=-2+2\lambda y+\mu=0$$

Reemplazando el punto óptimo en las ecuaciones:

$$-1+2\lambda\left(8\frac{\sqrt{5}}{5}+4\right)-8\lambda-\frac{\mu}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad -1+16\frac{\sqrt{5}}{5}\lambda-\frac{\mu}{2}=0$$

$$-2+2\lambda 4\frac{\sqrt{5}}{5}+\mu=0 \quad\Rightarrow\quad -2+8\frac{\sqrt{5}}{5}\lambda-\mu=0$$

Dicho sistema tiene como solución:

$$\lambda=\frac{1}{2\sqrt{5}},\mu=\frac{6}{5}$$

Al ser no negativos, se cumple KKT.
Es fácil también ver que el punto es regular ya que los dos gradientes de las restricciones activas son linealmente independientes.

Por escribir las condiciones KKT evaluadas en el óptimo: 2 puntos.
Por encontrar los valores de los multiplicadores de Lagrange: 1 punto.
Por demostrar regularidad: 1 punto.

3) Para estimar el cambio en la función objetivo usamos el multiplicador de Lagrange de la segunda restricción, que es igual a 6/5. El cambio estimado es entonces aproximadamente igual a $0,2\times(6/5)=0,24$. Luego, el nuevo valor óptimo va a ser aproximadamente igual a 11,40 (disminuye, en este caso).

Por mencionar el cambio del valor óptimo como $\Delta v=\lambda^*0,2$: 2 puntos.
Por señalar una disminución del valor en 0,24: 1 punto
Por encontrar el nuevo valor óptimo: 1 punto

b) (10 pts) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
\min \quad & (x_1-5)^2+2(x_2-4)^2 & & \\
s.a. \quad & (x_1-3)^2+(x_2-4)^2 & \geq 4 & \quad (1)\\
& x_1 & \leq 3 & \quad (2)\\
& x_1 & \geq 1 & \quad (3)
\end{aligned}$$

i. **(4 pts)** Grafique la región factible, visualice adecuadamente la forma de la función objetivo e identifique la solución óptima del problema.
ii. **(2 pts)** Muestre que en la solución óptima del problema los gradientes de las restricciones activas en ese punto son linealmente dependientes y, sin embargo, en ese punto SI se cumple la condición de regularidad.
iii. **(4 pts)** Verifique que en la solución óptima se cumplen las condiciones necesarias de primer orden de KKT. Indique los valores de los multiplicadores de Lagrange. ¿Podemos estimar el cambio en el valor óptimo si se cambio el valor del lado derecho de una de las restricciones activas en el óptimo? ¿Cómo? Justifique con claridad su respuesta.

Respuesta:
i) El gráfico de la región factible es el siguiente:

Se puede ver que la solución óptima del problema es el punto (3,2) o el punto (3,6). Cualquiera de los dos sirve para el análisis que sigue, vamos a tomar el punto (3,2).

Por graficar la región factible correctamente: 2 puntos.
Por ilustrar o mencionar a la F.O como elipses concéntricas con el eje mayor horizontal: 1 punto
Por encontrar las soluciones óptimas: 2 puntos (1 cada una)

iii) Las restricciones activas son la 1 y la 2. Llamemos g_1, g_2, g_3 a las restricciones. Tenemos:

$$g_1(x_1, x_2) = -(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 4)^2$$
$$g_2(x_1, x_2) = x_1$$

Así que los gradientes son:

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2(x_1 - 3) \\ -2(x_2 - 4) \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y evaluados:

$$\nabla g_1(3,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(3,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las condiciones KKT se verifican, en este caso, de la siguiente forma:

$$\nabla f(3,2) + \lambda_1 \nabla g_1(3,2) + \lambda_2 \nabla g_2(3,2) = 0$$

El gradiente de la función objetivo es:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 5) \\ 4(x_2 - 4) \end{bmatrix}, \quad \nabla f(3,2) = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Luego, el sistema es:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Y esto se resuelve con $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = 4$, con lo cual las condiciones KKT se cumplen en el óptimo. Ambos multiplicadores son únicos y positivos así que pueden usarse para estimare el cambio en el valor óptimo frente a cambios en el lado derecho de las restricciones.

Por escribir las condiciones KKT y evaluar en alguna solución óptima: 3 puntos.
Por encontrar los multiplicadores respectivos: 1 punto.
Por explicar la estimación al cambiar los b: 1 punto.

Parte 3 (16 pts).

a) (6 pts) Considere la siguiente función:

$$f(x,y) = ax^2 + 2y^2 - bxy + 4$$

¿Qué condiciones deben cumplir los parámetros *a* y *b* para que la función sea estrictamente convexa? Justifique.

Respuesta: Para que la función sea estrictamente convexa el Hessiano debe ser definido positivo. Tenemos, entonces:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax - by \\ 4y - bx \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = H(x,y) = \begin{bmatrix} 2a & -b \\ -b & 4 \end{bmatrix}$$ (3 puntos)

Para que el Hessiano sea definido positivo basta que los dos determinantes principales sean > 0. Esto lleva a las condiciones:

$\Delta_1 = 2a > 0$ (1,5 puntos)

$\Delta_2 = 8a - b^2 > 0$ (1,5 puntos)

b) (10 pts) Considere el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\min x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y$$

i. **(4 pts)** Muestre formalmente que este problema tiene solución óptima única.

ii. **(6 pts)** Partiendo del punto inicial $(x^0, y^0) = (0,0)$ haga una iteración del método del gradiente.

Respuesta:

i) Podemos argumentar de la siguiente forma:

Debemos mostrar por un lado que el problema tiene solución, y por otro, que ésta es óptima y única, considerando que estamos minimizando.

Es fácil ver que debido a los términos cuadráticos que tienen coeficientes > 0, la función tiende a $+\infty$ cuando $\|(x,y)\| \to +\infty$. Como f es continua, se concluye que el problema a resolver tiene solución (no se minimiza eternamente) (2 puntos).

Por otro lado el hessiano de la función es:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego, como es positiva definida ($\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$), es estrictamente convexa y por lo tanto tiene un único mínimo global (2 puntos).

Nota: también es posible mostrar que el problema tiene solución justamente encontrando la solución. Para ello resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 4y - 2x - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde x = y = 1. (2 puntos). Luego, como la función es estrictamente convexa, esta solución es óptima y única.

Nota: no basta con mostrar solamente que la eventual solución es óptima y única por medio del hessiano, pues el problema puede no tener solución.

ii) Procedemos de la siguiente manera:

Primero calculamos el gradiente para cualquier punto:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 4y - 2x - 2 \end{pmatrix}$$

Ahora, en el punto de partida $x_0 = (0,0)$:

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$ (2 puntos)

Por lo tanto, el siguiente punto según el método del gradiente es:

$$x_1 = x_0 - \alpha \nabla f(x_0) = (0,0) - \alpha(0,-2) = (0,2\alpha)$$

Así, para ver cuánto nos movemos en dirección opuesta al gradiente, es necesario resolver el problema unidimensional dado por:

$$min\, f(0,2\alpha) = 8\alpha^2 - 4\alpha \qquad \text{(2 puntos)}$$

Derivando con respecto a α e igualando a 0, se encuentra:

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto,

$$x_1 = (0,0) - \tfrac{1}{4}(0,-2) = (0,\tfrac{1}{2}) \qquad \text{(2 puntos)}$$

Que es el siguiente punto para iterar.

Parte 4 (20 pts).

a) (10 pts) Considere el siguiente problema de Programación Lineal, del cual se muestra también su dual, donde A es la matriz cuyas filas son los vectores $a_i, i = 1,...,m$:

$$P) \quad \begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ s.a. & a_i^T x = b_i & i = 1,...,m \\ & x_j \geq 0 & j = 1,...,n \end{array} \qquad D) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ s.a. & A^T y \leq c \end{array}$$

i. **(4 pts)** Escriba las condiciones KKT para el problema P).

ii. **(4 pts)** Muestre que si λ es el vector de los multipicadores de Lagrange del problema, entonces $-\lambda$ es una solución factible para el problema dual. Más aún, muestre que son solución óptima del problema dual.

iii. **(2 pts)** ¿A qué elemento de las condiciones KKT corresponden los costos reducidos del problema de programación lineal?

Respuesta:

i) El lagrangeano del problema es

$$L(x,\lambda) = c^T x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i^T x - b_i)$$

Como el problema tiene restricciones de no negatividad las condiciones de KKT establecen que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} L(x,\lambda) = c_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \geq 0$$

$$x_j \left(c_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right) = 0, \quad j = 1,...,n$$

Criterios de Corrección:

- 1 punto por el lagrangeano.
- 1,5 puntos por cada condición.
- Si no escribió el lagrangeano, 2 puntos por cada restricción.

ii) Definamos $y_i = -\lambda_i$. De las condiciones KKT podemos ver de inmediato que

$$c_j \geq \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad A^T y \leq c$$

Es decir, y es solución factible del dual. Por otro lado, a partir de las condiciones de holgura complementaria vemos de inmediato que

$$x_j c_j = \sum_{i=1}^{m} x_j(-\lambda_i)a_{ij}, \quad j = 1,...,n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j c_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j y_i a_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad c^T x = y^T A x = y^T b$$

Es decir, la función objetivo del dual, evaluada en *y*, es igual al valor óptimo del primal. Luego, el vector *y* es solución óptima del dual.

Criterios de Corrección:

- 2 puntos por demostrar que $-\lambda$ es una solución factible del problema dual.
- 2 puntos por demostrar que $-\lambda$ es solución óptima.

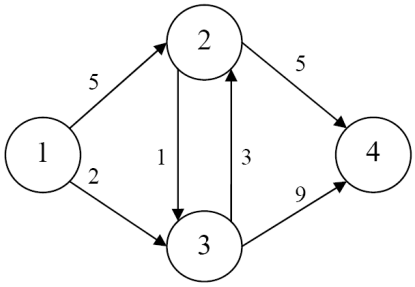
iii) Para esto observamos de inmediato que los costos reducidos se corresponde con

$$\overline{c}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} L(x,\lambda) = c_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = c_j - \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}$$

Criterios de Corrección:

- 2 puntos por tener buena la respuesta.

b) (10 pts) Considere la red que se muestra en la figura. Los números en los arcos representan tiempos de viaje entre cada nodo e interesa conocer el camino de menor tiempo de viaje entre el nodo 1 y el nodo 4. Para ello se aplicará flujo a costo mínimo poniendo una oferta de una unidad en el nodo 1, una demanda de 1 en el nodo 4 y demanda nula en los otros nodos. Suponga que le dan la siguiente solución inicial: viajar del nodo 1 al 3 y de ahí al 4.

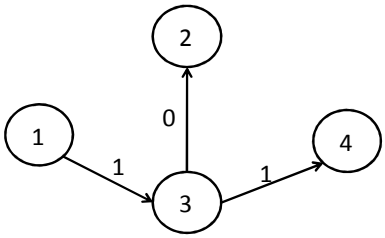


i. **(4 pts)** Basado en esa solución, defina una solución básica factible para el correspondiente problema de flujo a costo mínimo.

ii. **(6 pts)** Evalúe si acaso esa solución es óptima o no y en caso de no serlo, haga una iteración del algoritmo de flujo a costo mínimo para obtener una solución mejor ¿Es óptima esta nueva solución?

Respuesta:

Para i), una solución básica factible inicial es la siguiente:



Criterio de Corrección:

- 4 puntos por dibujar o explicar una solución básica factible.
- 2 puntos si es que la solución factible no se basaba en la solución inicial dada: viajar del nodo 1 al 3 y de ahí al 4.

ii) Ahora evaluamos los valores de las variables duales para esta solución. Recordemos que debe tenerse

$$c_{ij} = \pi_i - \pi_j, \quad \forall (i,j) \text{ básico}$$

Entonces:

$$c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$c_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 0$$
$$c_{32} - \pi_3 + \pi_2 = 0$$

Usando los valores de los costos (que corresponden a los tiempos de viaje), obtenemos la siguiente solución para las variables duales:

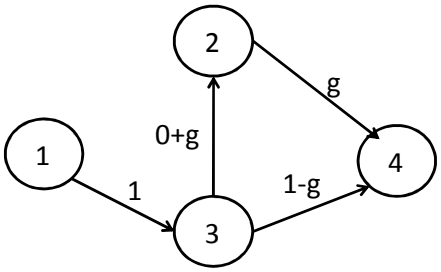
$$\pi_1 = 0, \pi_3 = -2, \pi_4 = -11, \pi_2 = -5$$

Ahora hay que calcular los costos de los arcos no básicos, (1,2) y (2,4):

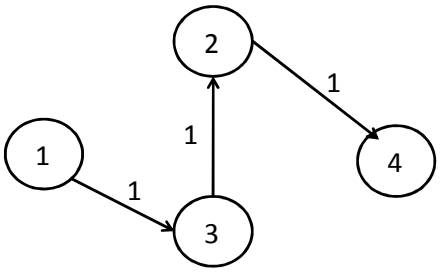
$$\overline{c}_{12} = c_{12} - \pi_1 + \pi_2 = 5 - 0 + (-5) = 0$$

$$\overline{c}_{24} = c_{24} - \pi_2 + \pi_4 = 5 - (-5) + (-11) = -1$$

Uno de los costos reducidos es negativo, así que la solución no es óptima. Con el arco (2,4) se forma el siguiente ciclo:



Como se ve claramente se puede enviar un flujo g=1 por (2,4) y el arco (3,4) se va de la base. La nueva solución básica factible es:



Para esta solución calculamos las variables duales a partir del sistema:

$c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 0$

$c_{24} - \pi_2 + \pi_4 = 0$

$c_{32} - \pi_3 + \pi_2 = 0$

Esto da la solución

$\pi_1 = 0, \pi_3 = -2, \pi_4 = -10, \pi_2 = -5$

Y los costos reducidos de los arcos no básicos son:

$\overline{c}_{12} = c_{12} - \pi_1 + \pi_2 = 5 - 0 + (-5) = 0$

$\overline{c}_{34} = c_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 9 - (-2) + (-10) = 1$

Ahora ambos costos reducidos cumplen con ser ≥ 0 y la solución es óptima. Incidentalmente, se ve también que hay múltiples soluciones.

Criterios de Corrección:

- 1 punto por el planteamiento de que los costos reducidos de las variables básicas son iguales a 0.
- 1 punto por el cálculo de los π_i
- 1 punto por el cálculo de los costos reducidos de las variables no básicas y su razonamiento de que es, o no, óptimo por tener todos, o algún, costo reducido mayor, o menor, a 0.
- Para la segunda iteración se repite la repartición de puntos anteriormente descrita y con eso completamos los 6 puntos.
- Si es que se partió de una solución óptima y se hace sólo una iteración, cada paso tiene el doble de puntos, sumando 6 puntos en total, pues ya se descontó 2 puntos en la parte i).

Parte 5. (20 pts)

Una compañía del sector eléctrico tiene p centrales generadoras y existen m ciudades que deben ser abastecidas. Cada central tiene una capacidad de generación de C_i [Mw] , i=1,..,p y en cada ciudad hay una demanda igual a d_j [Mw], j =1,…,m. Suponga que la distancia entre la central i y la ciudad j es d_{ij} [km]. Cuando se transmite energía eléctrica entre dos puntos hay una perdida que depende de la distancia y también de otras características de la línea de transmisión. Suponga (en forma simplificada) que si se transmite un flujo de electricidad de f [Mw] entre la central i y la ciudad j, entonces la pérdida por transmisión es igual a $\alpha_{ij} f^{b_{ij}}$ por cada kilómetro recorrido entre i y j. En esta relación α_{ij} y b_{ij} son constantes conocidas y positivas.

a) **(6 pts)** Escriba un modelo de optimización que permita determinar cuánta energía enviar entre las centrales y las ciudades de modo que se minimice la pérdida total de energía, se satisfaga la demanda y no se exceda la capacidad de generación.

b) **(4 pts)** ¿Qué rango de valores deben tener las constantes b_{ij} para que el problema sea convexo? Justifique.

c) **(4 pts)** Suponga ahora que se le dice que por restricciones medioambientales no todas las centrales pueden ser usadas. Específicamente, suponga que para cada central i existe un conjunto de centrales $K_i \subset \{1,...,p\}$ tales que si la central i se usa, ninguna de las centrales del conjunto K_i puede ser usada. Agregue a su modelo de a) las restricciones y elementos necesarios para representar esta nueva situación.

d) **(6 pts)** Suponga que está codificando su modelo usando AMPL y ha definido los conjuntos CENTRALES y CIUDADES. Escriba los códigos de AMPL con los cuales definiría:
   i. los parámetros del problema,
   ii. las variables del problema,
   iii. la función objetivo.

Respuesta:

1

a) Para el modelo definimos las variables f_{ij} correspondientes al flujo de energía entre la central i y la ciudad j. Observemos también que la pérdida total que se produce en la conexión (i, j) es igual a $d_{ij}\alpha_{ij}(f_{ij})^{b_{ij}}$

El modelo es:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\alpha_{ij}(f_{ij})^{b_{ij}} \qquad 2$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \le C_i \qquad i = 1,...,m \qquad 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \ge d_i \qquad j = 1,...,n \qquad 1$$

$$f_{ij} \ge 0 \qquad i = 1,...,m;\ j = 1,...,n \qquad 1$$

b) para esto necesitamos que las funciones $d_{ij}\alpha_{ij}(f_{ij})^{b_{ij}}$ sean convexas. Como se forma de potencias, eso se obtiene si $b_{ij} \ge 1$. 4

1

c) Para modelar esto necesitamos introducir variables binarias z_i que valen 1 si se usa la central i y 0 en caso contrario. Estas deben, a su vez, ser "ligadas" a las variables de flujo. La extensión necesaria al modelo es una restricción de tipo "exclusión", como se muestra:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\alpha_{ij}(f_{ij})^{b_{ij}}$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \le C_i \qquad i = 1,...,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \ge d_i \qquad j = 1,...,n$$

$$z_i + z_j \le 1 \qquad \forall j \in K_i; i = 1,...,m \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \le M z_i \qquad i = 1,...,m \quad (1)$$

$$f_{ij} \ge 0; z_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,...,m; j = 1,...,n \quad (1)$$

Observemos que la cuarta restricción podría ser combinada con la primera.

d) Una posible forma de escribir lo pedido en AMPL es la siguiente:

```
PARAM alpha{CENTRALES,CIUDADES};
PARAM beta{CENTRALES,CIUDADES};
PARAM demanda{CIUDADES};
PARAM capacidad{CENTRALES};
PARAM distancia{CENTRALES,CIUDADES};

VAR flujo{CENTRALES,CIUDADES}

MINIMIZE perdida: SUM{i in CENTRALES,j in CIUDADES} distancia[i,j]*alpha[i,j]*(flujo[i,j])**beta[i,j];
```

(2) (2) (2)