PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-1
Profesores: G. Angulo, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

Solución Tarea 1

Fecha de entrega: Miércoles 31 de marzo - 23:59:00

Problema 1.

El municipio de una comuna rural de Chile ha decidido levantar campamentos de vacunación para llegar a la mayor cantidad de habitantes. La comuna se puede dividir en un conjunto I localidades, donde en cada una viven p_i personas con $i \in I$. Análisis preliminares realizandos en la comuna han establecido que los campamentos solo pueden ser ubicados en un conjunto J de sitios predeterminados dentro de la comuna. El municipio debe seleccionar los sitios en los cuales levantar los campamentos (en un sitio cabe a lo más un campamento) considerando que se debe asignar un campamento a cada localidad. Es decir, cada localidad de la comuna debe tener uno (y solo un) campamento de vacunación asociado, mientras que un campamento puede estar asociado a más de una localidad. Construir un campamento en el sitio $j \in J$ tiene un costo fijo asociado igual a c_j. Además, existe un costo variable que es linealmente proporcional (con pendiente f_j) a la cantidad total de personas que debe servir el campamento. Es decir, si se construye un campamento en el sitio $j \in J$, entonces el costo asociado es $c_j + f_j s_j$, donde s_j es la población total que debe servir el campamento ubicado en $j \in J$ (es la suma de las poblaciones de todas las localidades asociadas a ese campamento).

Formule un modelo de programación lineal que minimice presupuesto total destinado para el proyecto. Defina claramente sus variables de decisión, restricciones y función objetivo.

Solución Problema 1.

Variables

x_j: $\begin{cases} 1 & \text{si construyo un campamento en el sitio } j \in J \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

y_{ij}: $\begin{cases} 1 & \text{si se asocia la localidad } i \in I \text{ con el campamento ubicado en el sitio } j \in J \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

s_j: Cantidad de personas asignadas para vacunarse en el campamento construido en el sitio $j \in J$.

Función objetivo

$$\text{mín} \quad \sum_{j \in J} \{x_j c_j + s_j f_j\}$$

Restricciones

1) Si se asigna un campamento a una localidad, éste debe construirse

$$x_j \geq y_{ij} \qquad \forall i \in I, j \in J$$

2) Cada localidad debe tener un campamento asignado

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I$$

3) Gente asociada a un campamento

$$s_j \geq \sum_{i \in I} y_{ij} p_i \qquad \forall j \in J$$

4) Naturaleza de las variables

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I, j \in J$$

$$s_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

Problema 2.

Suponga que usted es el encargado de programar el despacho a domicilio de P ordenes sobre un horizonte de D días divididos en H horas cada uno. Para esto, usted cuenta con una flota de R repartidores que cobran c_v por hora de trabajo y un costo fijo diario c_f en el que se incurre solo si el repartidor tiene pedidos asignados ese día.

Los pedidos contenidos en el conjunto $P' \subseteq \{1, ..., P\}$ están asociados a clientes premium del servicio. Estos clientes deben recibir su pedido el primer día de la semana que tengan disponible. Finalmente, usted tiene la opción de enviar los pedidos utilizando un servicio externo que cobra un precio fijo $c >> c_f$.

Sean $t_p \in \mathbb{Z}^+$ el tiempo en horas necesario para completar el pedido $p \in \{1, ..., P\}$ y a_{phd} un parámetro binario que vale 1 si el cliente al cual se debe despachar el pedido $p \in \{1, ..., P\}$ está disponible en la hora $h \in \{1, ..., H\}$ del día $d \in \{1, ..., D\}$ y 0, en otro caso. Puede asumir que la hora a la que se inicia el despacho de un pedido más su duración siempre será menor o igual a H, vale decir, no es necesario considerar el caso de pedidos que empiecen en un día y terminen el siguiente. Formule un modelo de programación lineal entero que minimice el costo total de la operación asegurándose de que el cliente estará cuando repartidor realice el despacho. Defina claramente sus variables de decisión, restricciones y función objetivo.

Solución Problema 2.

Conjuntos Por simplicidad de notación redefinimos los conjuntos

$P = \{1, ..., P\}$

$D = \{1, ..., D\}$

$H = \{1, ..., H\}$

$R = \{1, ..., R\}$

H'_p : Conjunto de horas del primer día disponible del cliente $p \in P'$

Parámetros

b_p : Primer día disponible por el cliente premium $p \in P'$ para recibir su pedido

Variables

x_{phdr}: $\begin{cases} 1 & \text{si el pedido } p \in P \text{ comienza a ser atendido por el repartidor } r \in R \text{ en la hora } h \in H \text{ del día } d \in D \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

z_{phdr}: $\begin{cases} 1 & \text{si el pedido } p \in P \text{ esta siendo atendido por el repartidor } r \in R \text{ en la hora } h \in H \text{ del día } d \in D \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

w_{rd}: $\begin{cases} 1 & \text{si el repartidor } r \in R \text{ trabaja el día } d \in D \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

u_{pr}: $\begin{cases} 1 & \text{si el pedido } p \in P \text{ es despachado por el repartidor } r \in R \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

e_p: $\begin{cases} 1 & \text{si el pedido } p \in P \text{ es despachado por el servicio externo} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Función objetivo

$$\text{mín} \quad \sum_{p \in P} \sum_{r \in R} \sum_{h \in H} \sum_{d \in D} c_v z_{phdr} + \sum_{r \in R} \sum_{d \in D} c_f w_{rd} + \sum_{p \in P} c e_p$$

Restricciones

1) Todos los pedidos deben ser despachados

$$\sum_{r \in R} u_{pr} + e_p = 1 \qquad \forall p \in P$$

2) Un pedido no puede ser realizado por más de un repartidor

$$\sum_{r \in R} u_{pr} \leq 1 \qquad \forall p \in P$$

3) Si un repartidor atiende un pedido, entonces debe comenzar a despacharlo

$$\sum_{h \in H} \sum_{d \in D} x_{phdr} \geq u_{pr} \qquad \forall p \in P, r \in R$$

4) Si un repartidor comienza a atender un pedido, entonces debe completarlo

$$t_p x_{phdr} = \sum_{k=h}^{h+t_p-1} z_{pkdr} \qquad \forall p \in P, h \in h, d \in D, r \in R$$

5) Si un repartidor atiende un pedido, entonces trabaja ese día

$$w_{rd} \geq z_{rhd} \qquad \forall r \in R, h \in H, d \in D$$

6) El cliente debe estar disponible al momento del despacho

$$\sum_{r \in R} z_{phdr} \leq a_{phd} \qquad \forall p \in P, h \in h, d \in D$$

7) Pedidos premium deben repartirse el primer día que se pueda

$$\sum_{r \in R} \sum_{h \in H'_p} x_{p,h,b_p,r} = 1 \qquad \forall p \in P'$$

8) Un repartidor no puede realizar más de un pedido al mismo tiempo

$$\sum_{p \in P} z_{phdr} \leq 1 \qquad \forall h \in H, d \in D, r \in R$$

9) Naturaleza de las variables

$$x_{phdr} \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P, h \in H, d \in D, r \in R$$

$$z_{phdr} \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P, h \in H, d \in D, r \in R$$

$$w_{rd} \in \{0, 1\} \qquad \forall r \in R, d \in D$$

$$u_{pr} \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P, r \in R$$

$$e_p \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P$$