PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 02-2018
Profesores: Cataldo, Cuadrado, González y Klapp

Examen

Duración: 2 horas 50 minutos.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *Esta prueba posee 60 puntos (+ 5 de bono extra). Sea estratégico, el orden de preguntas no tiene relación con su dificultad.*
- ◇ *Conteste cada pregunta en un cuadernillo. En cada uno coloque su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
- ◇ *Dos rondas de preguntas al profesor (una 15 minutos después de comenzar, otra cuando transcurra el 60 % del tiempo). Está prohibido hacer preguntas al ayudante. Deje anotado cualquier supuesto.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (13 puntos)

Considere que los administradores de una viña le han pedido ayuda para planificar la cosecha de uvas durante los T días de la temporada 2019. La viña trabaja un conjunto C de diferentes cepas (tipos de uva) y su terreno está dividido en un conjunto J de cuarteles a cosechar. Cada cuartel $j \in J$ tiene uvas de una sola cepa $c \in C$ y dispone de d_j kg de uva. El parámetro binario e_{jc} indica con valor 1 si el cuartel j posee el tipo de cepa c. De acuerdo a sus enólogos, si usted cosecha uva del cuartel $j \in J$ en el día $t \in \{1, \ldots, T\}$ genera un valor de $\$f_{jt}$ por kilo cosechado.

Al final de cada día de cosecha, debe almacenar los kilos de la cepa c cosechada en bodegas de la viña (definidas en el conjunto K) para iniciar su proceso de fermentación. Asuma que cada bodega $k \in K$ tiene una capacidad de q_k kg y que la cepa $c \in C$ demora τ_c días en fermentar. Considere además que en un día específico cada bodega puede albergar un único tipo de cepa y que debe respetar los tiempos de fermentación. Asuma que la cosecha de un cuartel puede ser dividida en días diferentes y fermentada en varias bodegas.

Finalmente, usted debe también planificar el trabajo de las personas que cosechan. Suponga que cada persona es capaz de cosechar un máximo de γ kg diarios, que existe un costo diario $\$\alpha$ por cada trabajador contratado, y que existe un costo $\$\beta$ a pagar cada vez que despide un trabajador. Asuma que es posible tener más trabajadores contratados que los requeridos y que inicia la temporada sin contrataciones previas.

Formule un modelo de programación lineal entera mixta que le ayuda a planificar cuándo y en qué cantidades cosechar cada cuartel y cuántos trabajadores tener contratados en cada día con el objetivo de maximizar los beneficios del viñedo en la temporada.

Solución: VARIABLES:

$x_{j,t,k}$: Kilos cosechados del cuartel $j \in J$ en el día $t \in \{1, \ldots, T\}$ y enviados a la bodega k (al final del día).

u_t: Cantidad de trabajadores contratados al comienzo del día t.

w_t: Cantidad de trabajadores despedidos al final del día t.

h_t: Cantidad de trabajadores disponibles para trabajo en el día t.

$z_{j,t}$: Cantidad de trabajadores asignados al cuartel j durante el día t.

$I_{c,k,t}$: Inventario (en kilos) de cepa de tipo c en fermentación en la bodega k al comienzo del día t.

$y_{c,k,t}$: Variable binaria, vale 1 si hay cepas de tipo c en fermentación en bodega k al inicio del día t, 0 e.o.c.

Función objetivo:

$$\text{máx} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \alpha H_t + \beta W_t + \sum_{j \in J, k \in K} f_{j,t} x_{j,t,k} \right\}$$

Restricciones:

R1) Balance de trabajadores disponibles:

$$h_t = h_{t-1} + u_t - w_{t-1}, \quad \forall t \in \{2, \ldots, T\}$$

$$h_1 = u_1$$

R2) No utilizar mas trabajadores que los disponibles:

$$\sum_{j \in J} z_{j,t} \leq h_t \quad \forall t \in \{1, \ldots, T\}$$

R3) Capacidad de cosecha:

$$\sum_{k \in K} x_{j,t,k} \leq \gamma z_{j,t} \quad \forall j \in J, \forall t \in \{1, \ldots, T\}$$

R4) Inventario de bodegas de fermentación:

$$I_{c,k,t} = I_{c,k,t-1} + \sum_{j \in J : e_{jc} = 1} x_{j,t-1,k} - \sum_{j \in J : e_{jc} = 1, t - \tau_c \geq 1} x_{j,t-\tau_c,k}, \quad \forall k \in K, t \in \{2, \ldots, T\}, c \in C$$

$$I_{c,k,1} = 0$$

R5) Capacidad de bodega y determinar único tipo de cepa por bodega

$$I_{c,k,t} \leq q_k y_{c,k,t} \quad \forall c \in C, k \in K, t \in \{1, \ldots, T\}$$

$$\sum_{c \in C} y_{c,k,t} \leq 1, \quad \forall k \in K, t \in \{1, \ldots, T\}$$

R6) No cosechar por sobre la disponibilidad del cuartel

$$\sum_{t=1}^{T} x_{j,t,k} \leq d_j, \quad \forall j \in J$$

R7) Naturaleza variables

$$u_t, w_t, h_t, z_{jt}, I_{c,k,t} \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall j \in J, t \in \{1, \ldots, T\}, k \in K, c \in C$$

$$x_{j,t,k} \geq 0 \quad \forall j \in J, t \in \{1, \ldots, T\}, k \in K$$

$$y_{c,k,t} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, t \in \{1, \ldots, T\}, k \in K$$

Nota de corrección:

- ◇ Variables bien definidas: 4 puntos.
- ◇ Restricciones bien definidas 7 puntos.
- ◇ Objetivo 2 punto.

Pregunta 2 (17 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal entera

$$\begin{array}{lll} P: & \text{máx} & x_1 + 3x_2 \\ & s.a. & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & & -2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & & x_1 \leq 3 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \\ & & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

y sea P^L su relajación lineal.

(a) **(6 puntos)** Encuentre toda solución óptima de P^L ejecutando el algoritmo simplex desde la solución básica inicial factible definida por $x_1 = 0, x_2 = 2$.

(b) **(4 puntos)** ¿En qué rango de valores puede estar el coeficiente de x_1 en la función objetivo (actualmente en 1) para que se mantenga inalterado el conjunto de soluciones óptimas?

(c) **(3 puntos)** Construya un corte de Gomory para el problema lineal entero.

(d) **(4 puntos)** Utilizando el corte de Gomory encontrado en (c), encuentre la solución óptima de P (no es necesario ejecutar simplex en esta parte de la pregunta).

Ayuda con inversas de matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ -1 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 2/5 \\ -1 & 2/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ -1 & 2/5 & 9/5 \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Planteamos el problema en su forma estándar:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & -x_1 - 3x_2 & \\ s.a. & x_1 + 2x_2 - x_3 & = 2 \\ & -2x_1 + 5x_2 + x_4 & = 10 \\ & x_1 + x_5 & = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array}$$

La base es $\{x_2, x_3, x_5\}$. Calculamos matrices y vectores:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ -1 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ -1 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos costos reducidos:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 0 \\ -1 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -11/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Entra la variable x_1. Vemos el criterio del mínimo cuociente:

$$\text{mín}\{;;\frac{3}{1}\}$$

Sale la variable x_5. Así, nuestra nueva base es $\{x_2, x_3, x_1\}$. Calculamos matrices y vectores:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 2/5 \\ -1 & 2/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 2/5 \\ -1 & 2/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/5 \\ 37/5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos costos reducidos:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 2/5 \\ -1 & 2/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 9/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 3/5 & 11/5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, es la base óptima. La solución óptima es $(3, 16/5, 37/5, 0, 0)$ y es única.

(b) Queremos que:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & -c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 9/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 3/5 & 6/5 + c_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

Es decir, $c_1 \geq -6/5$ para que la solución óptima se mantenga.

(c) Como x_1 es entero, solo podemos usar x_2 para generar el corte:

$$(\frac{1}{5} - 0)x_4 + (\frac{2}{5} - 0)x_5 \geq (\frac{16}{5} - 3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 \geq \frac{1}{5}$$

Reemplazando con las variables originales del problema:

$$\Rightarrow x_2 \leq 3$$

Notar que si se usa la fila correspondiente a $x_3 = \frac{37}{5}$, se obtiene el mismo corte. Por lo tanto, como el otro valor es entero, es el único corte que se genera.

(d) Gráficamente, se puede visualizar que la solución óptima de P^L es el punto $(3, 3)$. Al ser entera, es también solución de P.

Pregunta 3 (14 puntos)

Esta pregunta posee 3 partes completamente independientes:

Parte 1 (4 puntos)

¿Es el siguiente conjunto un poliedro? Justifique.

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \text{máx}\left[z - \text{mín}(x+3, 2y), |2x+3y|\right] \leq 5\right\}$$

Ayuda: Un conjunto es un poliedro si es representable mediante restricciones lineales.

Solución: Si es un poliedro. Es equivalente a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : & z - \text{mín}(x+3, 2y) \leq 5 \\ & |2x+3y| \leq 5,\end{aligned}$$

que, a su vez, es equivalente a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : & z - x - 3 \leq 5 \\ & z - 2y \leq 5 \\ & 2x + 3y \leq 5 \\ & -2x - 3y \leq 5.\end{aligned}$$

Parte 2 (7 puntos)

Considere un poliedro acotado y no vacío $\mathbb{X} := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ definido por m desigualdades lineales, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. También considere una función $f(x)$ continua y estrictamente convexa, que recibe como argumento un vector de n variables $x \in \mathbb{R}^n$ y retorna un valor escalar. Basado en estos elementos, defina los siguientes problemas de optimización:

- P_{min} : mín $f(x)$ s.a. $x \in \mathbb{X}$
- P_{max} : máx $f(x)$ s.a. $x \in \mathbb{X}$

(a) **(3 puntos)** Muestre que ambos problemas (P_{min} y P_{max}) admiten solución óptima.

(b) **(4 puntos)** Muestre que la solución óptima de P_{min} es única.

(c) **(Bono Extra, 5 puntos)** Muestre que toda solución óptima de P_{max} es un vértice de $\mathbb{X}$.

Solución:

(a) Es aplicación directa de BW. Dominio cerrado, acotado, no vacío. Función objetivo continua.

(b) Supongamos por contradicción que no hay solución única para P_{min}, es decir, existen dos soluciones diferentes x_1^* y x_2^* tal que $f(x_1^*) = f(x_2^*) = v_{min}$. El dominio y la función son convexos, por lo que el punto medio $x' = \frac{x_1^* + x_2^*}{2}$ es factible y cumple que:

$$f(x') < \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*)}{2} = \frac{v_{min}^* + v_{min}^*}{2} = v_{min}^*$$

. Es decir, x' es posee menor valor objetivo que el valor óptimo (contradicción).

(c) **(3 puntos)** Supongamos por contradicción que hay una solución óptima x^* de P_{max} que no es un vértice. Entonces, x^* puede ser escrita como el punto medio de dos soluciones factibles diferentes x_1 y x_2, es decir, $x^* = \frac{x_1+x_2}{2}$. Luego, por convexidad:

$$v_{max} = f(x*) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq \text{máx}(f(x_1), f(x_2))$$

.

Es decir, existe una solución factible (x_1 o x_2) que posee un valor objetivo mayor que el máximo (contradicción).

Parte 3 (3 puntos)

Considere un grafo conexo y dirigido $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos del grafo. Suponga que para cada arco $a \in A$ se ha definido un costo $c_a \in \mathbb{R}_+$ asociado a transportar una unidad de flujo por el arco. En cada nodo existe un parámetro de oferta generalizada (positiva o negativa) $b_i \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i \in N} b_i = 0$. En el curso usted estudió el algoritmo simplex de redes que resuelve el Problema de Flujo a Costo Mínimo (PFCM) definido como

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^{|A|}} \sum_{a \in A} c_a x_a \text{ s.a. } Ex = b,$$

donde E es la matriz de incidencia nodo-arco de G.

Considere ahora que, adicionalmente, existe un costo $k_i \geq 0$ por transportar una unidad de flujo en cada nodo $i \in N$ diferente al que produce o demanda el bien transportado. ¿Cómo podría resolver este problema mediante el algoritmo simplex de redes?

Solución: Basta con desdoblar cada nodo $i \in N$ en dos nodos i_1 e i_2. Luego, para cada par:

- ◇ Agregar arco (i_1, i_2) con costo k_i.
- ◇ Reubicar todo arco entrante a i como arco entrante de i_1
- ◇ Reubicar todo arco saliente de i como arco saliente de i_2

El problema resultante es un PFCM y se puede resolver mediante el algoritmo simplex.

Pregunta 4 (16 puntos)

Esta pregunta considera 2 partes completamente independientes:

Parte 1 (3 puntos)

En máximo dos líneas: ¿Cuál es la principal diferencia entre una condición necesaria (CN) y una condición suficiente (CS) de optimalidad local?

Solución:
Una CN es requerida para que el punto sea óptimo local (pero no garantiza que lo sea). Una CS garantiza que el punto es óptimo local (pero no es requerida para que lo sea)

Parte 2 (13 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización no lineal continua:

$$\begin{array}{lll} P: \text{ mín} & x_1 & \\ s.a. & (x_1-2)^2+(x_2-1)^2 & = 5 \\ & (x_1-3)^2+x_2^2 & \leq 9 \end{array}$$

(a) **(2 puntos)** Muestre que el problema P admite solución óptima.

(b) **(2 puntos)** Grafique el problema P, indicando claramente cuál es el espacio de soluciones factibles y las curvas de nivel de la función objetivo.

(c) **(4 puntos)** Indique sobre el gráfico cuáles son los puntos críticos (singulares o que cumplen condiciones necesarias de primer orden) en este problema.

(d) **(3 puntos)** Verifique que efectivamente los puntos regulares indicados en (c) cumplen las condiciones de KKT.

(e) **(2 puntos)** Indique toda solución óptima del problema.

Solución:

(a) **(2 puntos)** Se puede ver que las condiciones impuestas por Bolzano-Weierstrass se satisfacen:

- ◇ Espacio no vacío: se puede ver que el punto (0,0) satisface ambas restricciones.
- ◇ La función objetivo es continua (de hecho es lineal).
- ◇ Las restricciones son cerradas (la primera es de igualdad y la segunda de menor o igual).
- ◇ Ambas restricciones definen un espacio acotado (son circunferencias donde una considera solo el borde y la otra el borde e interior).

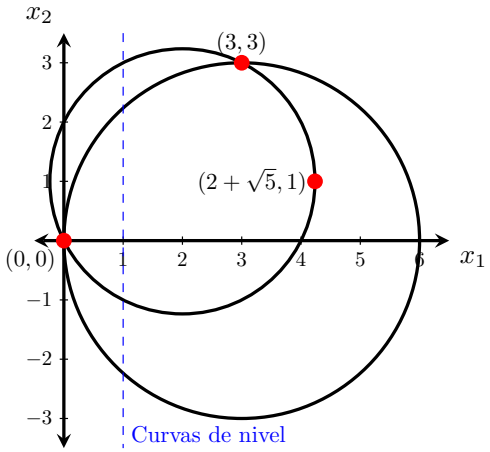
Luego, el teorema garantiza que el problema P admite solución óptima.

(b) **(2 puntos)** El gráfico es el siguiente:

(c) **(4 puntos)** Los puntos críticos (indicados en el gráfico) son: $(0,0)$, $(2+\sqrt{5},1)$ y $(3,3)$.

(d) **(3 puntos)** Se tiene que:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla h(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-1) \end{pmatrix}, \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$



Verifiquémoslo entonces las condiciones de KKT para cada punto, viendo que existen multiplicadores λ y μ que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2(x_1-2) \\ 2(x_2-1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2(x_1-3) \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ Se cumplen ambas restricciones, y ambas son activas. Se puede apreciar que los gradientes de ambas restricciones son linealmente independientes, luego se puede resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2(0-2) \\ 2(0-1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2(0-3) \\ 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces, se tiene que $\lambda = 0$ y $\mu = 1/6$, por lo que el punto cumple con KKT.

$(2+\sqrt{5},1)$ Se cumplen ambas restricciones, y solo la primera es activa. Luego se puede resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2(2+\sqrt{5}-2) \\ 2(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces, se tiene que $\lambda = -1/(2\sqrt{(5)})$ y $\mu = 0$, por lo que el punto cumple con KKT.

$(3,3)$ Se cumplen ambas restricciones, y ambas son activas. Se puede apreciar que los gradientes de ambas restricciones son linealmente independientes, luego se puede resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2(3-2) \\ 2(3-1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2(3-3) \\ 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces, se tiene que $\lambda = -1/2$ y $\mu = 1/3$, por lo que el punto cumple con KKT.

(e) **(2 puntos)** En este caso la función objetivo no se va (en ninguna parte del dominio) a $-\infty$, por lo tanto el óptimo es alguno de los 3 puntos críticos analizados. Se puede ver que el punto $(0,0)$ es (de los tres puntos) el que tiene menor valor de la función objetivo, luego es mínimo global.