PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2019 - 1
Profesores: : A. Cataldo - R. Cuadrado - J. González - M. Klapp - P. Guajardo

Interrogación 2

Duración: 2 horas 30 minutos.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos. Sea estratégico, el orden de preguntas no tiene relación con su dificultad.*
- *Conteste cada pregunta en un cuadernillo. En cada uno coloque su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, deje cada cuadernillo en su puesto para que sean retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
- *Dos rondas de preguntas al profesor (una 15 minutos después de comenzar, otra cuando transcurra el 60 % del tiempo). Está prohibido hacer preguntas al ayudante. Deje anotado cualquier supuesto.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (15 puntos)

Una empresa multinacional vende uvas en un grupo de países descrito en el conjunto N y lo ha contratado para apoyar en el diseño de su cadena de producción y abastecimiento internacional para el próximo año. La máxima producción de uva durante el mes $t \in \{1, \ldots, 12\}$ en cada país $i \in N$ es $p_{i,t}$ toneladas y depende de la productividad, estacionalidad y clima del país.

En el país i, durante el mes t, la tonelada de uva a granel se vende a $\$a_{i,t}$ pesos, consumiéndose un máximo de $m_{i,t}$ toneladas. Adicionalmente, usted puede vender a un valor de $b_{i,p}$ la tonelada de uva a diferentes plantas procesadoras de jugo de uva premium ubicadas en diferentes países. Sin embargo, para hacer jugo premium la uva debe estar fresca y cada planta procesadora solo recibe uvas que fueron producidas en el mismo país en donde está ubicada la planta. El parámetro binario $s_{i,p}$ tiene valor 1 si la planta p está en el país i, y 0 en otro caso. Considere que no se puede almacenar uva, que todo lo producido en un mes se consume durante ese mismo mes, y que si usted importa uva al país i desde el pais $j \neq i$ se debe pagar un costo aduanero de importación v_{ij} por tonelada de uva debido a cargos aduaneros y de empaquetado.

Adicionalmente, usted debe pagar costos de transporte $c_{i,j}$ por tonelada de uva transportada entre cada par de países i, j. Considere que el transporte entre el país i y el país j genera un porcentaje de pérdida de $t_{i,j}$ (%) del cargamento, por lo tanto solo una fracción de lo que usted envía desde i finalmente se puede consumir en j. Asuma que a usted le pagan por tonelada no perdida que arriba a destino. También asuma que los costos de aduana se pagan por todo el cargamento transportado (independiente de la pérdida).

Basándose en la información entregada, formule un modelo de optimización lineal que permita a la empresa planificar su cadena de producción y abastecimiento internacional para el próximo año maximizar la utilidad de la compañía.

Solución: Variables de decisión:

- $x^t_{i,j}$: Toneladas de uva enviadas a granel desde el país i hacia el país j en el periodo t. $i \in N$, $j \in N$, $t \in \{1, \ldots, 12\}$

- $y_{i,p}^t$: Toneladas de uva enviadas para jugo desde el país productor i hacia la planta p en el periodo t. $i \in N$, $p \in P$, $t \in \{1, \ldots, 12\}$

Objetivo:

$$\max_{x,y} \quad \sum_{t=1}^{12} \left\{ \sum_{i,j \in N} x_{i,j}^t \cdot [a_{i,t}(1 - t_{i,j}) - c_{i,j} - v_{i,j}] x_{i,j}^t + \sum_{i \in N} \sum_{p \in P} b_{i,p} y_{i,p}^t \right\}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
\text{Producción máxima:} \quad & \sum_{j \in N} x_{i,j}^t + \sum_{p \in P} y_{i,p}^t \leq p_{i,t}, && \forall i \in N, t \in \{1, \ldots, 12\}, \\
\text{Consumo granel máximo:} \quad & \sum_{j \in N} (1 - t_{j,i}) x_{j,i}^t \leq m_{i,t}, && \forall i \in N, t \in \{1, \ldots, 12\}, \\
\text{Compatibilidad con planta:} \quad & y_{i,p}^t = 0, && \forall i \in N, p \in P : s_{i,p} = 0, t \in \{1, \ldots, 12\}, \\
\text{Naturaleza:} \quad & x_{i,j}^t \geq 0, && \forall i, j \in N, t \in \{1, \ldots, 12\}, \\
& y_{i,p}^t \geq 0, && \forall i \in N, p \in P, t \in \{1, \ldots, 12\}
\end{aligned}$$

Pregunta 2 (15 puntos)

Usted está a cargo de la planificación de una empresa que elabora dos tipos de producto químico: producto A y producto B. Por un contrato vigente, usted debe producir al menos 1000 litros en total, considerando ambos tipos de productos. Cada litro del producto A necesita un litro de materia prima y cada litro del producto B necesita dos litros de materia prima. Usted sabe que cuenta con 3000 litros de materia prima. Por último, usted sabe que puede vender el producto A en \$4000 el litro, y el producto B en \$9000 el litro. Asuma que siempre se puede vender lo que usted produzca.

(a) **(2 puntos)** Formule un problema de programación lineal con variables continuas que permita decidir cuánto producir de cada químico con el objetivo de maximizar los ingresos.

(b) **(5 puntos)** A través de análisis gráfico, resuelva el problema. Identifique una solución y el valor óptimo.

(c) **(2 puntos)** Escriba la forma estándar del problema. Determine una configuración de base asociada al punto óptimo que obtuvo. Justifique, utilizando las diferentes condiciones del algoritmo Simplex que efectivamente esta solución es óptima.

(d) **(3 puntos)** ¿Podría usted iniciar el algoritmo simplex comenzando desde una base definida por el vértice origen? Justifique su respuesta.

(e) **(3 puntos)** Considere ahora la solución que solo produce 1000 litros de A y nada de B. Realice una iteración del algoritmo simplex desde ese vértice. ¿Llega a una solución óptima? Justifique.

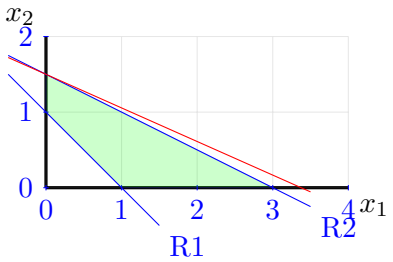
Ayuda: La inversa de la matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $M^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Solución:

(a) El problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 4000x_1 + 9000x_2 \\ s.a. & x_1 + x_2 \geq 1000 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(b) Ver solución gráfica. En azul las restricciones, en verde el dominio, y en rojo la curva de nivel de valor óptimo. La solución óptima es $(0, 1500)$, con valor óptimo 13.500.000.



(c) La forma estándar del problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -4000x_1 - 9000x_2 \\ s.a. & x_1 + x_2 - x_3 = 1000 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3000 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

La configuración de base óptima es $B = \{2, 3\}$.

Calculamos las matrices y vectores necesarios: $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ $A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $c_B = \begin{pmatrix} -9000 & 0 \end{pmatrix}$ $c_R = \begin{pmatrix} -4000 & 0 \end{pmatrix}$

Para comprobar optimalidad, calculamos los costo reducidos:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -4000 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9000 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 500 & 4500 \end{pmatrix} \geq 0$$

Tenemos costos reducidos no negativos, lo que significa que estamos en el óptimo.

(d) Debemos mostrar que la base $B = \{3, 4\}$ es infactible . Para ello, tenemos las siguientes matrices y vectores: $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vemos el criterio de factibilidad:

$$\bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

El primer componente es negativo, por lo cual no cumple con el criterio de factibilidad.

(e) Debemos realizar una iteración desde la base $B = \{1, 4\}$.

Calculamos las matrices y vectores necesarios: $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $c_B = \begin{pmatrix} -4000 & 0 \end{pmatrix}$ $c_R = \begin{pmatrix} -9000 & 0 \end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \end{pmatrix}$ $\bar{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos los costos reducidos:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -9000 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4000 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -5000 & -4000 \end{pmatrix}$$

Como hay al menos un costo reducido menor que cero, no estamos en el óptimo. Elegimos la variable x_2 para que entre a la base.

Para escoger la variable de salida, usamos el criterio del mínimo cuociente:

$$\text{mín}\{\frac{1000}{1}, \frac{2000}{1}\}$$

La variable x_1 sale de la base. Tenemos la nueva base $B = \{2, 4\}$.

Calculamos las matrices y vectores necesarios: $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $c_B = \begin{pmatrix} -9000 & 0 \end{pmatrix}$ $c_R = \begin{pmatrix} -4000 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos los costos reducidos:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -4000 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9000 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 5000 & -9000 \end{pmatrix}$$

Como hay al menos un costo reducido menor que cero, no estamos en el óptimo.

Pregunta 3 (15 puntos)

Responda cada pregunta de forma independiente:

(a) **(5 puntos)** Considere un número positivo entero $k \geq 1$ y defina el siguiente poliedro $n-$dimensional:

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} x_i \geq 1, & \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq n + k, & \end{array} \right\}$$

(i) Identifique todos sus vértices. Justifique.

Solución: Hay $n+1$ restricciones en $\mathbb{R}^n$. Un vértice requiere n restricciones l.i. en igualdad. Esto implica que hay como máximo $\binom{n+1}{n} = n+1$ vértices.
El primero es $x^0 = (1, 1, \ldots, 1) = \mathbf{1}$, donde las n restricciones de cota están en igualdad.
Los otros n vértices se obtienen haciendo $n-1$ cotas en igualdad y con $\sum_{i=1}^n x_i = n + k$. Es decir, $x^i = \mathbf{1} + k \cdot \mathbf{e}_i$ para $i = \{1, \ldots, n\}$, donde $[\mathbf{e}_i]_j = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso.

(ii) Ahora, identifique el valor óptimo y todas las soluciones óptimas de

$$\max_x \left\{ \sum_{i=1}^n i \cdot x_i \text{ s.a. } x \in P \right\}$$

Solución: El dominio es un polítopo no vació, por lo que hay al menos una solución óptima en un vértice. Claramente, la solución es única en x^n con valor óptimo $v = \sum_{i=1}^n i \cdot x_i^n = n \cdot (n+1)/2 + n \cdot k$.

(b) **(5 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \text{mín} & c^T x & \\ s.a. & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

para el cual x^* es solución óptima, y suponga que $x_1^*, \ldots, x_p^* > 0$ y $x_j^* = 0$ para todo $j = p+1, \ldots, n$.

Demuestre que el siguiente sistema no tiene solución:

$$\begin{array}{lll} (S) \quad Ad & & = 0 \\ & c^T d & < 0 \\ & d_{p+1}, \ldots, d_n & \geq 0 \end{array}$$

Solución: Supongamos por contradicción que el sistema tiene solución, es decir, existe d^0 tal que resuelve (S).

Defina $x^0 := x^* + \epsilon \cdot d^0$. Este punto es factible para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, ya que $Ax^0 = Ax^* + Ad^0 = b$; $x_i^0 = x_i^* - \epsilon d_i^0 \geq 0$ para $i = 1, \ldots, p$ y $x_i^0 = d_i^0 \geq 0$ para $i = p+1, \ldots, n$.

El valor objetivo en el punto x^0 es $v = c^T x^0 = c^T x^* + \epsilon c^T d^0 < c^T x^*$. Esto implica que x^0 es mejor que el óptimo (contradicción).

(c) **(5 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \text{máx} & 3x_1 + 5x_2 & \\ s.a. & x_1 + x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & \leq 5 \\ & x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & x_2 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

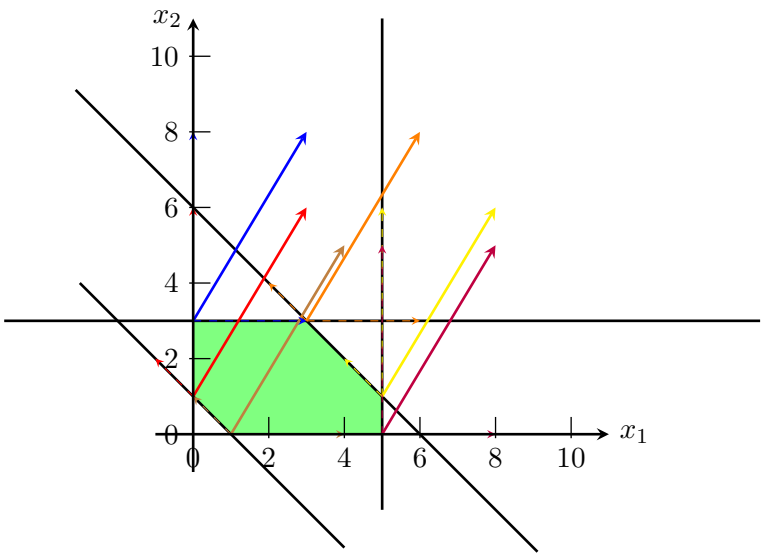
(i) **(2 puntos)** Grafique la proyección del gradiente de la función objetivo sobre las restricciones activas en tres de los vértices (puntos extremos) del poliedro definido en (P). En una frase: ¿Qué representan estas proyecciones?

Solución: Las proyecciones indican que tan conveniente es desplazarse a lo largo de una restricción hacia otro punto factible.

Por ejemplo si se toma el punto (1,2), es posible observar que ambas proyecciones llevan a otros vértices factibles, pero la proyección que lleva a (5,0) es mayor, por lo que mejorará más el valor incumbente en esa dirección.

Magnitud relativa de la proyección sobre el gradiente de la restricción, es decir,costos reducidos.

Se grafican las restricciones y se obtiene el dominio factible de (P). En este caso se muestran las proyecciones sobre 3 vértices.



(ii) **(2 puntos)** Indique cuáles son las variables básicas en cada uno de los vértices (puntos extremos) que escogió en la parte (i).

Solución:

$$
\begin{array}{lll}
(P') \quad \text{mín} & -3x_1 - 5x_2 & \\
s.a. & x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\
 & x_1 + x_4 & = 5 \\
 & x_1 + x_2 + x_5 & = 6 \\
 & x_2 + x_6 & = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0
\end{array}
$$

$$\vec{v_1} = (0,3,2,5,3,0) \rightarrow x_b = x_2, x_3, x_4, x_5$$

$$\vec{v_2} = (3,3,5,2,0,0) \rightarrow x_b = x_1, x_2, x_3, x_4$$

$$\vec{v_3} = (5,1,5,0,0,2) \rightarrow x_b = x_1, x_2, x_3, x_6$$

$$\vec{v_4} = (5,0,4,0,1,3) \rightarrow x_b = x_1, x_3, x_5, x_6$$

$$\vec{v_5} = (1,0,0,4,5,3) \rightarrow x_b = x_1, x_4, x_5, x_6$$

$$\vec{v_6} = (0,1,0,5,5,2) \rightarrow x_b = x_2, x_4, x_5, x_6$$

(iii) **(1 puntos)** Indique si el cono recesivo asociado al dominio poliedro definido en (P) es trivial o regular.

Solución:

Forma A: Considerando el gráfico es posible apreciar que la región factible es un poliedro acotado, es decir, un politopo. Dado que todo cono recesivo asociado a un politopo es trivial, el cono recesivo asociado al dominio de (P) es trivial.

Forma B: Para determinar si el cono recesivo es trivial o regular, se debe analizar el sistema $Ax \leq 0$ y sus soluciones; si la única solución que lo satisface es el origen será trivial, en caso contrario, se dice regular.

Se define A como la matriz asociada al siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll} -x_1 - x_2 & \leq 0 \\ x_1 & \leq 0 \\ x_1 + x_2 & \leq 0 \\ x_2 & \leq 0 \\ -x_1, -x_2, & \leq 0 \end{array}$$

Analizando gráficamente la solución es posible observar que el único punto que satisface todas las restricciones es el (0,0), por lo tanto, el cono es trivial.

Pregunta 4 (15 puntos)

Responda cada pregunta de forma independiente:

(a) **(5 puntos)** Considere un poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ y un punto factible $x \in P$.

Demuestre que x es un vértice de P si y solo si $P \setminus \{x\}$ es convexo.

Solución:

(i) $P \setminus \{x\}$ es convexo $\Rightarrow$ x vértice de P:
Probaremos el contra-positivo: x no es vértice de $P \Rightarrow P \setminus \{x\}$ no es convexo. Si x no es un vértice, entonces existen $x_1, x_2 \in P : x_1 \neq x_2$ tal que $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$. Claramente $x_1, x_2 \in P \setminus \{x\}$, pero su combinación convexa para $\lambda = \frac{1}{2}$ no es elemento de $P \setminus \{x\}$, es decir, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \notin P \setminus \{x\}$. Luego $P \setminus \{x\}$ no es convexo.

(ii) x vértice de $P \Rightarrow P \setminus \{x\}$ es convexo:
Supongamos que no se cumple, es decir, que x vértice de P y $P \setminus \{x\}$ no es convexo. Entonces, existen dos valores $x_1 \neq x_2$ en $P \setminus \{x\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \notin P \setminus \{x\}$. Como P debe ser convexo, la única posibilidad es que $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Es decir, existen dos puntos en P cuya combinación convexa forma x. Luego x no es un vértice (contradicción).

(b) **(5 puntos)** Argumente matemáticamente que para un problema convexo de minimización todo óptimo local es global.

Solución: Sea $\mathbb{X}$ el dominio y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ la función objetivo del problema (ambos convexos).

Demostraremos por contradicción: Consideremos un óptimo local $x_0 \in \mathbb{X}$ y otro óptimo global $x^* \in \mathbb{X}$ tal que $f(x^*) < f(x_0)$, es decir, el mínimo local no es global.

En el segmento entre x_0 y x^* existe un punto $x' \in \mathbb{X}$ lo suficientemente cerca de x_0 para estar en su vecindad, es decir, $|x' - x_0| \leq r$ para algún $r > 0$. Esto implica que $f(x') \geq f(x_0)$.

También, al estar x' en el segmento entre x_0 y x^* existe un $\lambda \in (0,1)$ tal que $x' = \lambda x_0 + (1-\lambda)x^*$. Por convexidad de f, se tiene: $f(x') \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x^*) < \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_0) = f(x_0) \leq f(x')$. Es decir, $f(x') < f(x')$ (contradicción).

(c) **(5 puntos)** Muestre que el siguiente problema admite solución óptima

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 7x_1 - x_2 - 6x_3 + 2x_4 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 4 \\ & 5x_1 - 2x_2 \leq 7 \\ & x_2 - 3x_4 \geq 10 \\ & x_1, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

La función objetivo es continua. El dominio es cerrado y no vacío ($x_1 = 0, x_2 = 10, x_3 = 3, x_4 = 0$ es factible). El objetivo se puede implicar sumando todas las restricciones en formato $\leq$. Queda implicado: $7x_1 - x_2 - 6x_3 + 2x_4 \leq 1$. Luego la función objetivo es acotada. Por extensión de $B - W$ tiene solución.