Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Ayudante: Ignacio Monardes (iamonardes@uc.cl)
Profesores: Mathias Klapp, Margarita Castro, Gonzalo Pérez, Esteban Salgado

ICS1113 - Optimización
2do semestre del 2023

Tarea 1 ICS1113

Reglas de la tarea:

- La tarea se puede realizar de a pares o de forma individual (las parejas pueden ser de diferentes secciones). En caso de ser de a pares se debe inscribir con su pareja en los grupos de Canvas.
- La tarea parte el día 05/09/2023 a las 00:00 horas y se entrega el día 15/09/2023 a las 23:59 horas.
- Existirá la opción de usar un cupón de atraso solamente una vez entre las tres tareas, dando la posibilidad de entregar hasta 24 horas después de finalizada la entrega. Para poder acceder a este cupón se deben inscribir con el nombre de los integrantes de la tarea en un Google Forms que será habilitado en su debido tiempo y que cierra junto a la fecha oficial de la entrega. En caso de ser de a pares ambos deben tener un cupón disponible y se usará uno por cada uno y tendrán 24 horas extra (no 48).
- Las tareas atrasadas sin cupón no serán corregidas, así que recuerden entregarlas a tiempo.
- Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo y preparación individual de la interrogación a la que está asociada la tarea. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta escalar a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.
- Por entregar en LaTeX se darán 3 décimas para la tarea entregada. Estas no son transferibles a otras actividades. Para subirlo tendrá que enviar un archivo .pdf y el archivo .zip correspondientes. En caso de no entregar en LaTeX basta con subir un archivo .pdf que contenga las respuestas. En ambos casos los .pdf tienen que contener los nombres de los integrantes. El no cumplir con el formato conllevará descuentos por formato.
- La nota de la tarea queda a lo más con nota 7 en caso de exceder la nota máxima.
- Se abrirá un foro en Canvas donde se responderán las dudas que puedan surgir del enunciado.

Pregunta 1 **[20 Puntos]**

Actualmente, la asignación del equipo de ayudantes que cuida cada evaluación del curso es manual. Sin embargo, la asignación podría ser optimizada. En esta pregunta su grupo deberá ayudar a la coordinadora del curso a escoger quiénes, dentro del grupo de ayudantes, deben cuidar cada prueba del curso.

Considere que su grupo dispone de un conjunto A que lista a todos los ayudantes del curso y un conjunto I de todas las evaluaciones del semestre.

Por cada ayudante $a \in A$, se ha construido una matriz de disponibilidad b, donde $b_{a,i} \in \{0,1\}$ informa sobre los topes de horario de cada ayudante en cada evaluación, es decir, $b_{a,i} = 1$ indica si es que es factible asignar al ayudante $a \in A$ a cuidar la evaluación $i \in I$ y $b_{a,i} = 0$ indica el caso contrario. Además, se ha recogido una matriz de preferencias p, donde $p_{a,i} \in \{0,1,2\}$ indica el deseo del ayudante $a \in A$ por cuidar la evaluación $i \in I$, es decir, la asignación más deseada posee más valor de preferencia (2: más deseada y 0: menos deseada).

Estas son algunas restricciones que se deben cumplir: cada ayudante debe cuidar al menos una evaluación en el semestre. También, se genera una insatisfacción comparable a perder γ unidades de preferencia cuando un ayudante cuida tres o más evaluaciones. Finalmente, en cada evaluación $i \in I$ se ocupan $c_i > 0$ salas y en cada una de las salas debe haber al menos dos ayudantes asignados. Un ayudante no puede cuidar más de una sala a la vez.

Su grupo debe formular un modelo de optimización lineal entera mixta que ayude a planificar la asignación de ayudantes maximizando la suma total de preferencias asignadas menos la insatisfacción sujeto a las restricciones descritas.

Solution: Definamos al conjunto de evaluaciones compatibles por ayudante $I_a := \{i \in I : b_{a,i} = 1\}$.

Corrección: Asignar 3 puntos por cada variable.

Primero, definiremos nuestras variables a usar:

- $x_{a,i} = \begin{cases} 1 & \text{si el ayudante } a \in A \text{ es asignado a la evaluación } i \in I_a \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $z_a = \begin{cases} 1 & \text{si el ayudante } a \in A \text{ es asignado a 3 o más evaluaciones} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Corrección: Asignar 2 puntos por la función objetivo.

Luego, la función objetivo es:

$$\text{máx} \sum_{a \in A} \left(\sum_{i \in I_a} p_{a,i} \cdot x_{a,i} - z_a \cdot \gamma \right)$$

Corrección: Asignar 3 puntos por cada restricción.

Las restricciones son:

1. Cada ayudante debe ir a cuidar al menos una evaluación.

$$\sum_{i \in I_a} x_{a,i} \geq 1 \quad \forall a \in A$$

2. Si un ayudante cuida 3 o más evaluaciones, entonces tendrá insatisfacción.

$$\sum_{i \in I_a} x_{a,i} \leq 2 + (|I_a| - 2) \cdot z_a \quad \forall a \in A$$

3. Se debe cumplir la demanda de ayudantes por evaluación:

$$\sum_{a \in A : b_{a,i} = 1} x_{a,i} \geq 2 \cdot c_i \quad \forall i \in I$$

Alternativamente:

$$\sum_{a \in A} b_{a,i} \cdot x_{a,i} \geq 2 \cdot c_i \quad \forall i \in I$$

4. Naturaleza de las variables.

$$x_{a,i} \in \{0,1\}, \quad \forall a \in A, i \in I$$
$$z_a \in \{0,1\}, \quad \forall a \in A$$

Notar que no es necesario definir el conjunto I_a para modelar el problema, pero se deben ajustar las restricciones y función objetivo de forma acorde (similar a forma alternativa de la restricción 3).

Pregunta 2 **[20 Puntos]**

Una empresa gestiona un conjunto de D distritos y para cada distrito $d \in D$ debe contratar r_d contratistas durante toda una semana. La lista de contratistas está definida en el conjunto C. Se puede contratar a cada contratista $c \in C$ en días hábiles (es decir, de lunes a viernes) o en días de fines de semana.

En total, cada contratista $c \in C$ puede trabajar a lo más una vez en un día del fin de semana y a lo más 5 veces en toda la semana. Además, cada contratista $c \in C$ puede ser contratado a lo más una vez entre todos los distritos por cada día.

Por otro lado, en cada distrito debe haber al menos un contratista trabajando en cada día de fin de semana y al menos 2 en cada día de semana.

Finalmente, el costo de contratar a $c \in C$ para el distrito $d \in D$ es $f_{c,d}$ para los días de semana y $p_{c,d}$ para los fines de semana.

Responda a cada una de las siguientes solicitudes:

(a) Formule un modelo que represente este problema como un programa de optimización entera que permita definir la contratación a mínimo costo.

Solution: Añadiremos el conjunto $T = \{1, \ldots, 7\}$ que serán los días.
Definiremos las siguientes variables:
Corrección: 2 punto por la variable

- $x_{c,d,t}$ $\begin{cases} 1 & \text{si el contratista } c \text{ es contratado para el distrito } d \text{ el día t} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

Corrección: 2 punto FO Función objetivo:

$$\min \sum_{d \in D} \sum_{c \in C} \left(\sum_{t=1}^{5} x_{c,d,t} \cdot f_{c,d} + \sum_{t=6}^{7} x_{c,d,t} \cdot p_{c,d} \right)$$

Corrección: 1 punto cada restricción
Restricciones:

1. Cada contratista puede ser contratado a lo más una vez por distrito por día; viene de la naturaleza de las variables, ya que al ser binaria es a lo más uno.

$$x_{c,d,t} \in \{0,1\}, \quad \forall d \in D,\ c \in C,\ t \in T$$

2. Cada contratista es contratado a lo más 5 veces en total.

$$\sum_{d \in D} \sum_{t \in T} x_{c,d,t} \leq 5, \quad \forall c \in C$$

3. Cada contratista trabaja en a lo más un distrito x día.

$$\sum_{d \in D} x_{c,d,t} \leq 1, \quad \forall c \in C, t \in T$$

4. Cada contratista $c \in C$ trabaja a lo más una vez por fin de semana.

$$\sum_{d \in D} \sum_{t \in \{6,7\}} x_{c,d,t} \leq 1, \quad \forall c \in C$$

5. Cada distrito debe contratar al menos un contratista por día de fin de semana.

$$\sum_{c \in C} x_{c,d,t} \geq 1 \quad \forall d \in D, t \in \{6,7\}$$

6. Cada distrito debe contratar al menos 2 contratistas por día hábil.

$$\sum_{c \in C} x_{c,d,t} \geq 2 \quad \forall d \in D, t \in \{1,2,3,4,5\}$$

7. Cada distrito $d \in D$ debe contratar r_d contratistas en la semana.

$$\sum_{c \in C} \sum_{t \in T} x_{c,d,t} = r_d \quad \forall d \in D$$

(b) Suponga que la empresa desea ser justa con los contratistas: Incorpore una restricción que exija que la diferencia de días contratados entre el contratista que más días trabaja con el que menos días trabaja sea menor o igual a un día.

Solution: Basta con agregar la siguiente restricción:

$$\sum_{t \in T} \sum_{d \in D} x_{c_1,d,t} - \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} x_{c_2,d,t} \leq 1 \quad \forall c_1, c_2, \in C, \; c_1 \neq c_2$$

Notar que esto es correcto ya que es equivalente a:

$$\max_{c_1,c_2 \in C} |\sum_{t \in T} \sum_{d \in D} x_{c_1,d,t} - \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} x_{c_2,d,t}| \leq 1$$

Corrección: Solución principal 2.5 puntos

Alternativamente se podrían crear dos variables auxiliares que representan el contratista que más ha sido contratado y el que menos ha sido contratado.

- x_{max} = Cantidad de días trabajados por el contratista que más trabaja.
- x_{min} = Cantidad de días trabajados por el contratista que menos trabaja.

Y la restricciones serían las siguientes:

1. Relación de las variables para el máximo.

$$\sum_{t \in T} \sum_{d \in D} x_{c,d,t} \leq x_{max} \quad \forall c \in C$$

2. Relación de las variables para el mínimo.

$$\sum_{t \in T} \sum_{d \in D} x_{c,d,t} \geq x_{min} \quad \forall c \in C$$

3. Diferencia menor o igual a un día.

$$x_{max} - x_{min} \leq 1$$

Corrección: En caso de tener la solución alternativa asignar 0.5 por cada variable y 0.5 por cada restricción

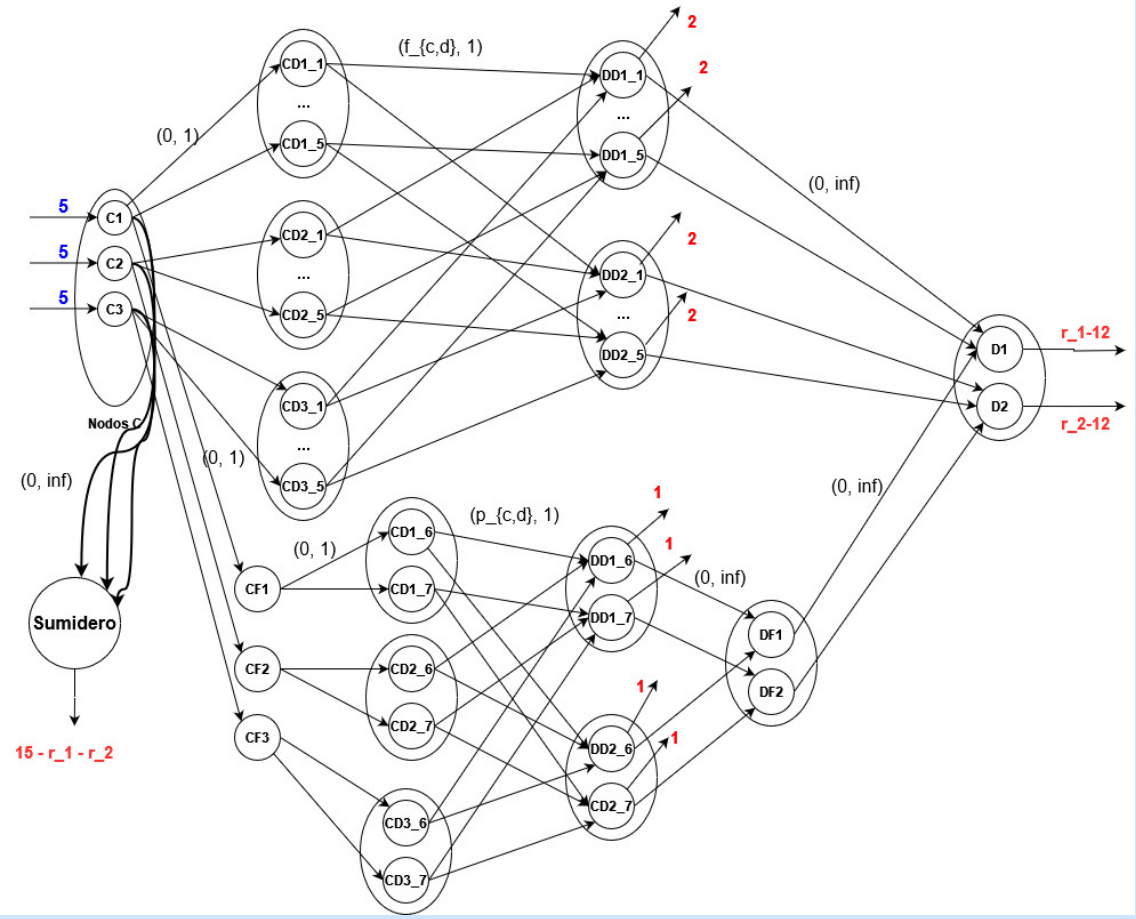
(c) Muestre que el problema descrito en la parte (a) puede ser modelado como un caso particular del Problema de Flujo a Costo mínimo (PFCM). Se solicita que: (1) Represente el problema en un grafo para $|C| = 3$ y $|D| = 2$ y detalle todos sus elementos (nodos, arcos, costos, ofertas netas en nodos y capacidades en arcos) y (2) transforme el modelo anterior a un PFCM equivalente en términos de las decisiones que toma. Escriba este modelo.

Solution: (1)

Para poder hacer la representación como grafo se crean los siguientes nodos:

- C_i nodos de los contratistas con $i \in \{1, \ldots, |C|\}$.
- $CD_{i,t}$ nodos que representan contratista con un día t.
- CF_i nodo que representa el fin de semana del contratista i.
- $DD_{j,t}$ nodo que representan los distritos, día t.
- DF_j nodos que representan los distritos fin de semana.
- D nodos que representan los distritos.

Grafo del problema



Para efectos prácticos se presentan solamente los nodos asociados a los días 1, 5, 6 y 7 ya que los nodos $2, \ldots, 4$ se representan de la misma manera que 1 y 5.

Corrección: Asignar 0.5 por cada uno de los siguientes puntos

1. La restricción 1 se cumple con que la arista C_i a $C_{i,t}$ tenga capacidad.
2. La restricción 2 se cumple con que la oferta del nodo C_i sea 5.
3. La restricción 3 se cumple con que la capacidad del arco $CD_{i,t}$ se conecte a $DD_{j,t}$ con capacidad 1.
4. La restricción 4 se cumple con que la capacidad del arco C_i a CF_i sea 1.
5. La restricción 5 se cumple con que la demanda de flujo en el nodo $DD_{j,d}$ sea 1 para $d \in \{6, 7\}$.
6. La restricción se cumple con que la demanda de flujo en el nodo $DD_{j,t}$ sea 2 para $t \in \{1, \ldots, 5\}$.
7. La restricción 7 se cumple con que la demanda entre todos los arcos $DD_{j,t} + D_j$ suma r_j.
8. La FO se cumple con que el flujo a costo mínimo en las aristas de $CD_{i,t}$ a $DD_{j,t}$ tengan el costo asociado a la contratación.

Para (2) debemos definir el conjunto de nodos. Por temas de simplicidad haremos un abuso de notación:

- $CD = \{CD_{i,t} : i \in C, t \in T\}$
- $CF = \{CF_i : i \in C\}$
- $DD = \{DD_{j,t} : j \in D, t \in T\}$
- $DF = \{DF_j : j \in D\}$

Corrección: 0.5 punto por los nodos definidos

Luego, el conjunto de nodos es $V = C \cup CD \cup CF \cup DD \cup DF \cup \{Sumidero\}$.
Debemos definir el conjunto de aristas, para eso primero definiremos algunos subconjuntos:

- $C_a_CDiario = \{\{u, v\} : i \in C, t \in \{1, \ldots, 5\}, u = C_i, v \in \{CD_{i,t}\}\}$
- $C_a_CFinde = \{\{u, v\} : i \in C, u = C_i, v = CF_i\}$
- $C_a_sumidero = \{\{u, Sumidero\} : i \in C, u = C_i\}$
- $CFinde_a_CDias = \{\{u, v\} : i \in C, t \in \{6, 7\}, u = CF_i, v = CD_{i,t}\}$
- $CDiario_a_DDiario = \{\{u, v\} : i \in C, j \in D, t \in Tu = CD_{i,t}, v = DD_{j,t}\}$
- $DDiario_a_D = \{\{u, v\} : j \in D, t \in \{1, \ldots, 5\}, u = DD_{j,t}, v = D_j\}$
- $DDiario_a_Dfinde = \{\{u, v\} : j \in D, t \in \{6, 7\}, u = DD_{j,t}, v = DF_j\}$
- $DFinde_a_D = \{\{u, v\} : j \in D, u = DF_j, v = D_j\}$

Corrección: 0.5 punto por las aristas definidas

El conjunto de aristas es:

$$\begin{aligned} A =& C_a_CDiario \cup C_a_CFinde \cup C_a_sumidero \cup CFinde_a_CDias \\ & \cup CDiario_a_DDiario \cup DDiario_a_D \cup DDiario_a_Dfinde \cup DFinde_a_D \end{aligned}$$

Definimos la demanda y oferta en los nodos de manera generalizada.
Corrección: 0.5 punto por ofertas / demandas

$$b_u = \begin{cases} 5 & \text{si } u \in C \\ -5|C| + \sum_{d \in D} r_d & \text{si } u \in Sumidero \\ -2 & \text{para } u \in \{DD_{j,t} : \ t \in \{1, \ldots, 5\}, \ j \in D\} \\ -1 & \text{para } u \in \{DD_{j,t}: \ \ t \in \{6, 7\}, \ j \in D\} \\ -r_d + 12 & \text{para } u \in D \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Corrección: 0.5 punto por los costos

Definimos los costos de las aristas:

$$costo_{\{u,v\}} = \begin{cases} f_{i,j} & i \in C, \ j \in D, t \in \{1, \ldots, 5\} \text{ y } u = CD_{i,t}, \ v = DD_{j,t} \\ p_{i,j} & i \in C, \ j \in D, t \in \{6, 7\} \text{ y } u = CD_{i,t}, \ v = DD_{j,t} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Corrección: 0.5 punto por las capacidades

Definimos las capacidades de los arcos:

$$cap_{\{u,v\}} = \begin{cases} inf & \text{si } u \in C, \ v = Sumidero \\ inf & \text{para } j \in D, \ u \in \{DD_{j,t} : t \in \{1, \ldots, 5\}\}, \ v = D_j \\ inf & \text{para } j \in D, \ u = DF_j, \ v = D_j \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Luego, basta escribir el modelo a flujo de costo mínimo:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{\{u,v\} \in A} x_{\{u,v\}} \cdot costo_{\{u,v\}} & \\ & x_{\{u,v\}} \leq cap_{\{u,v\}} & \forall \{u, v\} \in A \\ \sum_{v \in \delta_u^-} x_{\{v,u\}} - & \sum_{v \in \delta_u^+} x_{\{u,v\}} = b_u & \forall u \in U \\ & x_{\{u,v\}} \geq 0 & \forall \{u, v\} \in A \end{aligned}$$

Pregunta 3 **[20 Puntos]**

Un supermercado *online* vende varios tipos de producto a domicilio (definidos en el conjunto A) desde su bodega, los cuales son ordenados por clientes con 7 días de anticipación. Así, al comienzo de cada semana, usted puede planificar con certeza la operación de entrega semanal para los próximos $D = \{1, \ldots, 7\}$ días.

Para ejecutar la operación de despacho a domicilio, usted cuenta con un camión que diariamente realiza una ruta de reparto que comienza y termina en la bodega del supermercado y ejecuta visitas de reparto a los domicilios de sus clientes. Considere que todos los clientes están definidos en el conjunto C y que cada cliente $c \in C$ demanda $r_{c,a,d}$ unidades del alimento a en el día d. Adicionalmente se conoce el tiempo $h_{\{c_1,c_2\}}$ en horas y la distancia $k_{\{c_1,c_2\}}$ en kilómetros entre un viaje desde lugar $c_1 \in C \cup \{0\}$ hacia lugar $c_2 \in C \cup \{0\}$, donde el cliente 0 representa a la ubicación de la bodega.

Para atender a sus cliente, usted debe abastecer la bodega del supermercado. Una unidad del alimento a cuesta $p_{a,d}$ si es adquirido el día d. Además, asuma que la bodega tiene capacidad infinita y comienza el día Lunes con un inventario inicial de q_a unidades para cada $a \in A$. El costo de inventario por unidad-día es f_d para un almacenaje entre el día d y el $d+1$ tal que $d, d+1 \in D$.

Las reglas de operación son las siguientes:

- En cada día $d \in D$ el camión debe atender a un conjunto $C_d := \{c \in C : \sum_{a \in A} r_{c,a,d} > 0\}$ de clientes y entregarles lo solicitado.
- El conductor del camión está contratado para trabajar 8 horas diarias cada día. Si su ruta de reparto excede las 8 horas, entonces se le debe pagar horas extra a \$10 mil pesos por hora.
- El costo operacional debe ser minimizado, este se compone de un costo por consumo de combustible (suponga que el camión es diesel y su costo por KM recorrido es de \$300) más las horas extra de conductor utilizadas (el salario normal del conductor es costo hundido), el costo total de inventario y el costo de adquisición de productos.

Formule el modelo de optimización lineal entera mixta que permita apoyar la toma de decisiones del supermercado para minimizar sus costos.

Solution: Se puede notar que el problema consiste en formular un problema del vendedor viajero, en el que se define una ruta y a partir de la ruta podemos obtener la distancia y tiempo total obtenido.

En paralelo hay que suministrar un inventario que cumpla la demanda para cada día.

A continuación están los conjuntos y los parámetros, estos no son necesarios escribirlos para el puntaje, pero sirven para ordenarse.

Conjuntos:

- C_d clientes del día $d \in D$.
- $C2_d = C_d \cup \{0\}$ para efectos prácticos se usará este conjunto.
- D días.

Parámetros:

- $r_{c,a,d}$ demanda.
- $d_{\{c_1,c_2\}}$ distancia.
- $t_{\{c_1,c_2\}}$ tiempo.
- 300 pesos por kilometro.

- $p_{a,d}$ precio de compra del alimento a el día d.
- q_a inventario inicial del alimento a.
- f_d costo del inventario el día d.

Corrección: Asignar un punto por cada variable.

Variables:

- $x_{\{u,v\},d}$: $\begin{cases} 1 & \text{si el ciclo visita el arco } \{u,v\} \text{ con } u,v \in C2_d \text{ el día } d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.
- $y_{\{u,v\},d}$: Variable que indica el flujo que pasa por el arco $\{u,v\}$ el día d.
- z_d : horas extra del camionero el día $d \in D$.
- $I_{a,d}$: inventario del alimento del tipo $a \in A$ el día $d \in D$.
- $w_{a,d}$: cantidad de alimento del tipo $a \in A$ comprado pare el día $d \in D$.

Corrección: Asignar 2 puntos por la función objetivo.

Función objetivo:

$$\text{mín} \sum_{d \in D} \left(10000 \cdot z_d + 300 \cdot \left[\sum_{u,v \in C2_d} x_{\{u,v\},d} \cdot k_{\{u,v\}} \right] + \sum_{a \in A} (p_{a,d} \cdot w_{a,d} + f_d \cdot I_{a,d}) \right)$$

Restricciones:

1. Todos los días se atienden a los clientes. Para modelar esta restricción se requieren las restricciones de TSP por cada día.

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in C2_d} x_{\{u,v\},d} &= 1 && \forall u \in C2_d,\ d \in D \\
\sum_{u \in C2_d} x_{\{u,v\},d} &= 1 && \forall v \in C2_d,\ d \in D \\
\sum_{v \in C2_d} y_{\{v,u\},d} - \sum_{v \in C_d} y_{\{u,v\},d} &= 1 && \forall u \in C_d,\ \forall d \in D \\
0 \leq y_{\{u,v\},d} &\leq (|C_d|) x_{\{u,v\},d} && \forall u \in C2_d,\ v \in C_d,\ d \in D \\
x_{\{u,u\},d} &= 0 && \forall u \in C2_d,\ d \in D
\end{aligned}$$

   Corrección: Asignar 6 puntos por formulación correcta del TSP diario.

2. Asignación de horas extras.

$$\sum_{u,v \in C2_d} x_{\{u,v\},d} \cdot h_{\{u,v\}} - 8 \leq z_d \ \ \forall d \in D$$

   Corrección: Asignar 2 puntos por asignación de horas extras

3. Inventario.

$$I_{a,1} = q_a - \sum_{c \in C} r_{c,a,1} + w_{a,1} \qquad \forall a \in A$$

$$I_{a,d+1} = I_{a,d} - \sum_{c \in C} r_{c,a,d} + w_{a,d} \qquad \forall a \in A,\ d \in \{2, \ldots, 7\}$$

Corrección: Asignar 2 puntos por inventario.

4. En caso de asumir que el camión partía antes de que llegarán las compras:

$$I_{a,d-1} \geq \sum_{c \in C} r_{c,a,d} \qquad \forall a \in A,\ d \in \{2, \ldots, 7\}$$

Corrección: Asignar 2 puntos por la restricción de cumplir demanda, en caso de no tenerlo asumido asignar 2 puntos extra en inventario.

5. Naturaleza de las variables:

$$x_{\{u,v\},d} \in \{0, 1\} \qquad \forall u, v \in C2_d,\ d \in D$$

$$y_{\{u,v\},d} \in \mathbb{R}_+ \qquad \forall u, v \in C2_d,\ d \in D$$

$$w_{a,d} \in \mathbb{R}_+ \qquad \forall a \in A,\ d \in D$$

$$I_{a,d} \in \mathbb{R}_+ \qquad \forall a \in A,\ d \in D$$

$$z_d \in \mathbb{R}_+ \qquad \forall d \in D$$

Corrección: Asignar un punto por todas las naturalezas de las variables.