PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2014
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 3

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**3 puntos**) Indique, justificando con precisión, si la siguiente información es verdadera o no: "Para el problema mín$\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ se cumple que si una restricción es activa, entonces la correspondiente variable dual es $\neq 0$."

Respuesta: No es cierta en general. La condición de holgura complementaria para esta formulación de problemas establece que si $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$ son las variables duales, entonces en el óptimo:

$$y_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i) = 0, i = 1, \ldots, m$$

Pero si la restricción es activa, es decir, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0$, nada impide que $y_i = 0$.

NOTA DE CORRECCIÓN: El enunciado no dice explícitamente que es el óptimo. Esto significa que pueden aparecer respuestas que digan algo como "sí se cumple, pero sólo en el óptimo". Eso no es correcto. También podría haber algo como "si no estamos en el óptimo, entonces no se cumple el teorema de holguras complementarias y entonces puede pasar cualquier cosa". Ese tipo de respuesta sí puede estar sujeto a interpretación según como esté escrito.

(b) (**3 puntos**) En el siguiente Tableau, correspondiente a un problema de maximización, los número a, b, c y d son escalares:

0	a	1	2	0	5
0	-5	0	0	1	5
1	-1	0	4	0	d
0	c	0	b	0	-1
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$

Indique qué valores (o rangos de valores) deben tomar a, b, c y d para que:

(i) (**1 punto**) El problema sea no acotado.

(ii) (**1 punto**) El problema tenga solución óptima única.

(iii) (**1 punto**) El problema tenga una solución óptima degenerada.

Respuesta:

(i) Basta que $c > 0, a \leq 0, d \geq 0$.

(ii) Basta que $c < 0, b < 0, a > 0, d \geq 0$.

(iii) Basta que $c \leq 0, b \leq 0, a > 0, d = 0$.

(c) (**3 puntos**) Considere el Problema de Programación lineal entera en forma estándar:

$$P) \quad \begin{array}{rl} z^* = \text{máx} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0, \text{ enteros} \end{array}$$

La siguiente afirmación: "si este problema es infactible, entonces su relajación lineal también es infactible", ¿es correcta o no? Explique.

Respuesta: Si S denota el conjunto factible del problema P) y $R = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ es el conjunto factible de la relajación lineal, entonces se sabe que $S \subset R$. Entonces, es perfectamente posible que $S = \emptyset$ mientras R puede ser no vacío.

NOTA DE CORRECCIÓN: Con una justificación de este estilo, incluso explicada con un dibujo, es suficiente.

(d) (**3 puntos**) Considere el Problema de Programación lineal entera en forma estándar:

$$P) \quad \begin{array}{rl} z^* = \text{máx} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0, \text{ entero} \end{array}$$

El valor óptimo de la relajación lineal es z^0. Está actualmente resolviendo este problema con el algoritmo de Ramificación y Acotamiento. Ha encontrado hasta ahora una solución entera, con valor z^1 y todavía tiene nodos que deben ser explorados. Si el proceso de búsqueda se detiene ahora (por razones de tiempo), ¿Cuáles son las relaciones (desigualdades) entre z^*, z^0 y z^1?

Respuesta: $z^1 \leq z^* < z^0$.

(e) (**3 puntos**) Considere un problema de Flujo a Costo Mínimo sin restricciones de cota, que se sabe factible y en donde los costos de usar los arcos, c_{ij}, son todos > 0. Muestre que el dual de este problema siempre es factible.

Respuesta: Acá se pede argumentar de dos formas: primero, si el dual fuera infactible, entonces el primal necesariamente debiera ser no acotado. Como el primal es el problema típico de flujo a costo mínimo, los coeficientes de la función objetivo son > 0, las variables son $x_{ij} \geq 0$, y es un problema que minimiza, entonces la función objetivo está garantizadamente acotada por abajo por 0. Luego, no puede ser no acotado. En consecuencia, el dual tiene que ser factible.

Alternativamente, se puede ver el problema dual, que es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{i=1}^{n} b_i \pi_i \\ s.a. & \pi_i - \pi_j \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \end{array}$$

Si $c_{ij} > 0, \forall (i,j) \in A$, entonces $\pi_i = 0, \forall i \in N$ es una solución factible.

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (**7 puntos**) Considere el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{rrcrl} \text{Max} & x_1 & + & 2x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 & + & 4x_2 & \leq 8 \\ & x_1 & & & \leq 4 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

(i) (**5 puntos**) Resuelva este problema usando el algoritmo SIMPLEX en forma tabular, es decir, usando Tableau. *Indicación: es corto, sólo necesita dos iteraciones.*

(ii) (**2 puntos**) ¿Cuál es el valor de las variables duales en el óptimo? Justifique.

Pauta

(i) El problema en forma estándar es:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{Max} & x_1 & + & 2x_2 & & & & \\ \text{s.a.} & x_1 & + & 4x_2 & +x_3 & & & = 8 \\ & x_1 & & & + & +x_4 & & = 4 \\ & x_1 & , & x_2 & x_3, & x_4 & & \geq 0 \end{array}$$

El Tableau inicial es (la tercera fila son los costos reducidos):

1	4	1	0	8
1	0	0	1	4
1	2	0	0	0
x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$

Hay una base inicial factible de partida que es la formada por x_3 y x_4. La variables x_2 debe entrar a la base y la única alternativa es que reemplace a x_3 ya que el test de razón mínima sólo es el número $8/4 = 2$. El siguiente Tableau es:

0,25	1	0,25	0	2
1	0	0	1	4
0,5	0	-0,5	0	4
x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$

Como uno de los costos reducidos es < 0, aún no estamos en el óptimo y la variables x_1 entra a la base. La que sale se determina del mínimo entre $2/0,25 = 8$ y $4/1 = 4$. Luego, la variable x_4 sale de la base. El siguiente Tableau es:

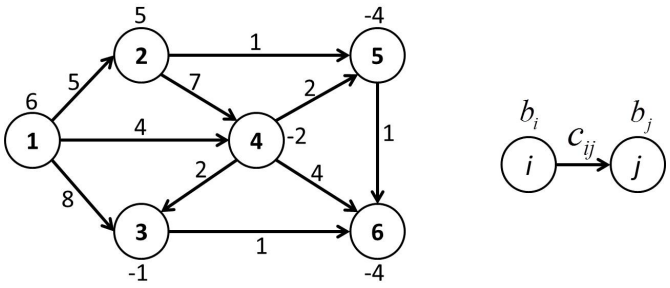
0	1	0,25	-0,25	1
1	0	0	1	4
0	0	-0,5	-0,5	6
x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$

Estamos ahora en la solución óptima del problema.

(ii) Como este problema partió con la base inicial de las variables de holgura, las variables duales (los multiplicadores del simplex) aparecerán en la posición de los costos reducidos de esas variables de holgura. En este caso, corresponden entonces a los valores $0,5$ y $0,5$.

Alternativamente, también es válido plantear el problema dual y argumentar por holguras complementarias, lo que determina de inmediato esos mismos valores.

(b) (**8 puntos**) Dado el siguiente grafo,



(i) (**6 puntos**) Partiendo de la solución $f_{13} = 1$, $f_{14} = 5$, $f_{25} = 5$, $f_{46} = 4$, $f_{56} = 1$, resuelva mediante el algoritmo simplex para redes. *Indicación: Si se presenta un empate al determinar el arco que entra a la base, elija el que tenga su cola (o nodo de origen) en el nodo de menor numeración.*

(ii) (**2 puntos**) En la solución óptima, el arco $(1, 4)$ lleva flujo. ¿Dentro de qué rango de valores puede variar su costo, para que la solución obtenida en (i) siga siendo óptima?

Pauta

(i) Se procede como sigue.

Iteración 1

Los arcos que llevan flujo forman un árbol generador, por lo tanto corresponden a una base del problema. En la Figura 1 los arcos asociados a variables básicas se presentan en rojo, y los flujos no nulos entre corchetes.

El sistema para calcular los multiplicadores es,

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 = & 0 \\ \pi_1 - \pi_3 = & 8 \\ \pi_1 - \pi_4 = & 4 \\ \pi_2 - \pi_5 = & 1 \\ \pi_4 - \pi_6 = & 4 \\ \pi_5 - \pi_6 = & 1 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \pi_1 = & 0 \\ \pi_2 = & -6 \\ \pi_3 = & -8 \\ \pi_4 = & -4 \\ \pi_5 = & -7 \\ \pi_6 = & -8 \end{array} \right.$$

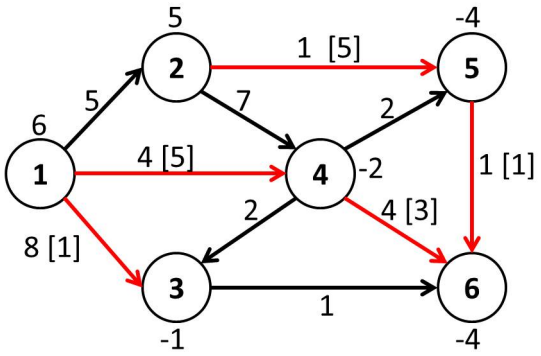


Figura 1: Base inicial, ejercicio 2b.

Al calcular los costos reducidos de las variables no básicas mediante la fórmula $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ resulta lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\overline{c_{12}} &= 5 - (0) + (-6) = -1 \\
\overline{c_{24}} &= 7 - (-6) + (-4) = 9 \\
\overline{c_{36}} &= 1 - (-8) + (-8) = 1 \\
\overline{c_{43}} &= 2 - (-4) + (-8) = -2 \\
\overline{c_{45}} &= 2 - (-4) + (-7) = -1
\end{aligned}$$

Por lo que $(4, 3)$ entra a la base, formándose el ciclo mostrado en la Figura 2. La variable que entra se presenta en azul, y la que sale, $(1, 3)$, en verde.

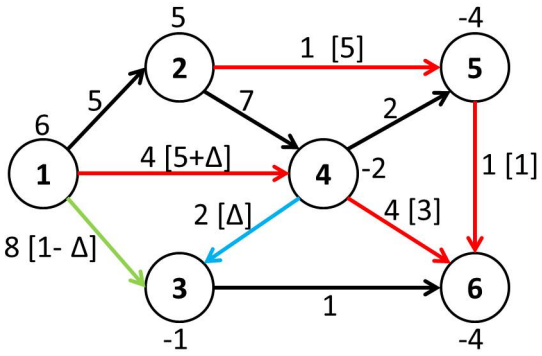


Figura 2: Cambio de base, para la iteración 1.

La nueva base se presenta en la Figura 3.

Iteración 2

El sistema para calcular los multiplicadores es,

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= 0 \\
\pi_1 - \pi_4 &= 4 \\
\pi_2 - \pi_5 &= 1 \\
\pi_4 - \pi_3 &= 2 \\
\pi_4 - \pi_6 &= 4 \\
\pi_5 - \pi_6 &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{cases}
\pi_1 = 0 \\
\pi_2 = -6 \\
\pi_3 = -6 \\
\pi_4 = -4 \\
\pi_5 = -7 \\
\pi_6 = -8
\end{cases}$$

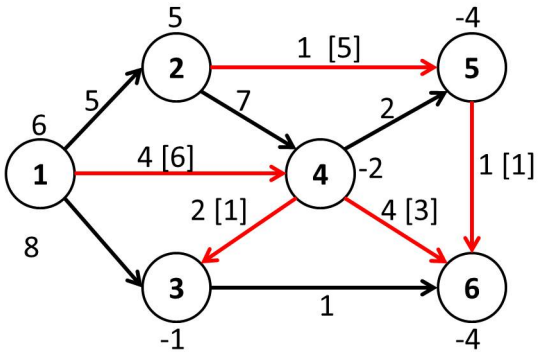


Figura 3: Base para la iteración 2, ejercicio 2b.

Al calcular los costos reducidos de las variables no básicas, resulta lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\overline{c_{12}} &= 5-(0)+(-6) = -1 \\
\overline{c_{13}} &= 8-(0)+(-6) = 2 \\
\overline{c_{24}} &= 7-(-6)+(-4) = 9 \\
\overline{c_{36}} &= 1-(-6)+(-8) = -1 \\
\overline{c_{45}} &= 2-(-4)+(-7) = -1
\end{aligned}$$

Por lo que $(1,2)$ entra a la base, de acuerdo a la indicación entregada, formándose el ciclo mostrado en la Figura 4. Nuevamente, la variable que entra se presenta en azul, y la que sale, $(4,6)$, en verde.

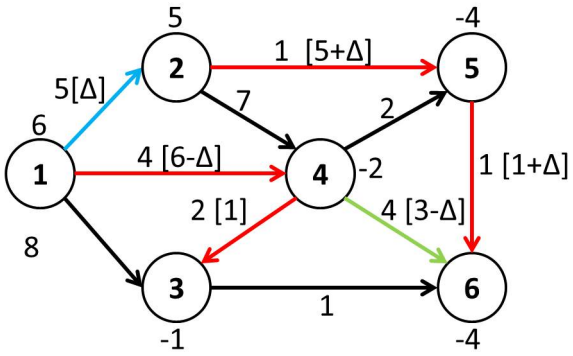


Figura 4: Cambio de base, para la iteración 2.

La nueva base se presenta en la Figura 5.

Iteración 3

El sistema para calcular los multiplicadores es,

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= 0 \\
\pi_1-\pi_2 &= 5 \\
\pi_1-\pi_4 &= 4 \\
\pi_2-\pi_5 &= 1 \\
\pi_4-\pi_3 &= 2 \\
\pi_5-\pi_6 &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
\left\{\begin{aligned}
\pi_1 &= 0 \\
\pi_2 &= -5 \\
\pi_3 &= -6 \\
\pi_4 &= -4 \\
\pi_5 &= -6 \\
\pi_6 &= -7
\end{aligned}\right.$$

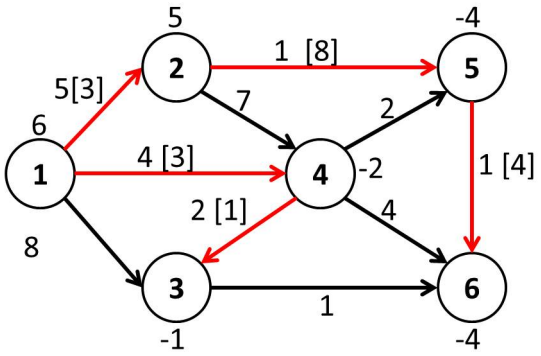


Figura 5: Base para la iteración 3, ejercicio 2b.

Al calcular los costos reducidos de las variables no básicas, resulta lo siguiente,

$$\begin{aligned}
\overline{c_{13}} &= 8-(0)+(-6) = 2\\
\overline{c_{24}} &= 7-(-5)+(-4) = 8\\
\overline{c_{36}} &= 1-(-6)+(-7) = 0\\
\overline{c_{45}} &= 2-(-4)+(-6) = 0\\
\overline{c_{46}} &= 4-(-4)+(-7) = 1
\end{aligned}$$

Que es una de las bases óptimas del problema. La solución óptima tiene los siguientes flujos no nulos: $f_{12}=3$, $f_{14}=3$, $f_{25}=8$, $f_{43}=1$ y $f_{56}=4$. El valor óptimo es 41.

(ii) Denotemos el costo del arco $(1,4)$ como C. La situación se presenta en la Figura 6.

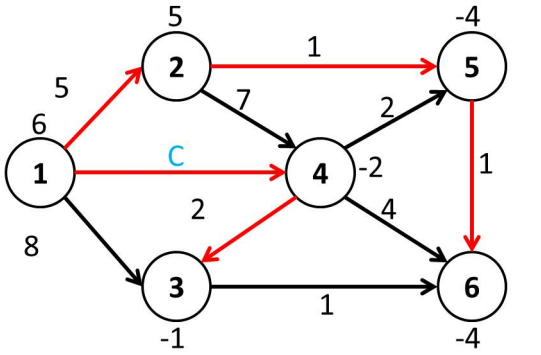


Figura 6: Análisis a sensibilidad a realizar, ejercicio 2b.

El sistema para calcular los multiplicadores es,

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= 0\\
\pi_1-\pi_2 &= 5\\
\pi_1-\pi_4 &= C\\
\pi_2-\pi_5 &= 1\\
\pi_4-\pi_3 &= 2\\
\pi_5-\pi_6 &= 1
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{cases}
\pi_1 = & 0\\
\pi_2 = & -5\\
\pi_3 = & -C-2\\
\pi_4 = & -C\\
\pi_5 = & -6\\
\pi_6 = & -7
\end{cases}$$

Se busca asegurar optimalidad de la base actual, por lo tanto,

Al calcular los costos reducidos de las variables no básicas, resulta lo siguiente,

$$\begin{array}{rrrl}
\overline{c_{13}} = & 8-(0)+(-C-2) = & 6-C \geq 0 \\
\overline{c_{24}} = & 7-(-5)+(-C) = & 12-C \geq 0 \\
\overline{c_{36}} = & 1-(-C-2)+(-7) = & -4+C \geq 0 \\
\overline{c_{45}} = & 2-(-C)+(-6) = & -4+C \geq 0 \\
\overline{c_{46}} = & 4-(-C)+(-7) = & -3+C \geq 0
\end{array}$$

Es decir,

$$\left.\begin{array}{rr} C \leq & 6 \\ C \leq & 12 \\ C \geq & 4 \\ C \geq & 4 \\ C \geq & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \leq C \leq 6$$

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (**6 puntos**) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{P)} \quad \begin{array}{lrcrcrl} \text{Min} & z & = & x_1 & - & 2x_2 & \\ \text{s.a.} & & & -4x_1 & + & 6x_2 & \leq 9 \\ & & & x_1 & + & x_2 & \leq 4 \\ & & & x_1 & , & x_2 & \geq 0, \text{enteros} \end{array}$$

La relajación lineal de este problema se resuelve con el algoritmo Simplex y se obtiene el siguiente Tableau óptimo final (x_3 y x_4 son variables de holgura):

0	1	0,1	0,4	2,5
1	0	-0,1	0,6	1,5
0	0	0,3	0,2	3,5
x_1	x_2	x_3	x_4	b

Construya un corte de Gomory, basado en la primera restricción del problema. Verifique que dicha desigualdad efectivamente "corta" la solución óptima actual de la relajación lineal.

Pauta

En el tableau se ve que la variable x_2 es variable básica (de la primera restricción) y las variables x_3 y x_4 son variables no básicas. Entonces, utilizando la expresión para construir un corte de Gomory,

$$\sum_{j \in NB} \left(\bar{a}_{kj} - \lfloor \bar{a}_{kj} \rfloor\right) x_j^0 \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor \quad i = 1, ..., m.$$

se tiene:

$$(0{,}1 - \lfloor 0{,}1 \rfloor)\, x_3 + (0{,}4 - \lfloor 0{,}4 \rfloor)\, x_4 \geq 2{,}5 - \lfloor 2{,}5 \rfloor \Leftrightarrow 0{,}1x_3 + 0{,}4x_4 \geq 0{,}5$$

La solución de la relajación lineal es $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$. Reemplazando en la desigualdad se tiene que $0{,}1 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 0 = 0 \not\geq 0{,}5$. Luego, la solución actual de la relajación lineal de P) no satisface la desigualdad.

(b) (**9 puntos**) Dado el siguiente problema de programación lineal entera (knapsach problem o problema de la mochila):

$$\begin{array}{llrcrcrcrcl} & \text{Max} & z & = & 16x_1 & + & 22x_2 & + & 12x_3 & + & 8x_4 & \\ \text{P)} & \text{s.a.} & & & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq 14 \\ & & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \in \{0,1\} \end{array}$$

(i) (**3 puntos**) Determine la solución relajada del problema y construya un cover que corte esa solución relajada. Muestre que efectivamente la corta.

(ii) (**2 puntos**) La solución $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1)$ es factible para P), pero no es la óptima. ¿Cuánto es el error máximo que podría cometer al usar esta solución en lugar de la solución óptima?

(iii) (**4 puntos**) Construya las dos primeras ramificaciones que haría para resolver P) utilizando el algoritmo de Ramificación y Acotamiento (Branch & Bound). Para cada nodo indique la solución óptima y valor óptimo obtenido. ¿Cuál es ahora el error estimado para la solución factible (1,0,1,1)?

Indicación: La relajación lineal del problema de mochila la puede resolver usando lo que sepa sobre el problema de mochila, o por inspección.

Pauta

(i) Para resolver la relajación lineal de P) calculamos los siguientes coeficientes δ_{x_i}:

$$\delta_{x_1} = \tfrac{16}{5} = 3\tfrac{1}{5} \quad \delta_{x_2} = \tfrac{22}{7} = 3\tfrac{1}{7} \quad \delta_{x_3} = \tfrac{12}{4} = 3 \quad \delta_{x_4} = \tfrac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3}$$

con lo que la solución de la relajación lineal de P) es: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1/2$ y $x_4 = 0$, cuyo valor de la función objetivo es $z_{RL} = 44$.
Basándonos en la solución de la relajación lineal se obtiene el siguiente covers:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

que corta la solución de la relajación lineal de P), dado que: $1 + 1 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} \not\leq 2$.

(ii) La solución (1,0,1,1) tiene como valor en la función objetivo $z_F = 36$. La mejor solución entera que se podría obtener, conociendo que la relajación lineal de P) es 44, es vale justamente 44. Como la solución factible que se propone vale 36, luego, el error máximo que se puede cometer es 44-36=8.

(iii) De (i) se tiene que la relajación lineal de P) es: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$ y $x_4 = 0$, cuyo valor de la función objetivo es $z_{RL} = 44$. Como la única variable fraccionaria es $x_3 = \frac{1}{2}$, ramificamos sobre esa variable obteniendo dos subproblemas:

Subproblema 1 (SP1): Se incluye la restricción $x_3 \leq 0$. En este caso, la solución (SP1) es $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ y $x_4 = \frac{2}{3}$, cuyo valor de la función objetivo es $z_{SP1} = 43\frac{1}{3}$.

Subproblema 2 (SP2): Se incluye la restricción $x_3 \geq 1$. En este caso, la solución (SP1) es $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 0$, cuyo valor de la función objetivo es $z_{SP2} = 43\frac{5}{7}$.

La solución (1,0,1,1) tiene como valor en la función objetivo $z_F = 36$. La mejor solución entera que se podría obtener, conociendo que la relajación lineal de (SP1) es $43\frac{1}{3}$ y de (SP2) es $43\frac{5}{7}$ está dado por (SP2). Como la solución factible que se propone vale 36, luego, el error máximo que se puede cometer es $43\frac{5}{7} - 36 = 7\frac{5}{7}$.

Pregunta 4 (15 puntos)

Para cuidar de su sobrino este sábado, un tío se propone llevar a cabo una maratón de programas infantiles. Para ello, este tío se ha preocupado de listar los programas en un conjunto, que ha llamado J (que son los programas que ve el sobrino). Además, ha averiguado la cantidad de capítulos que existen, y que son N_j para el programa j, y la duración en minutos de cada capítulo, que es T_j (todos los capítulos de un mismo programa tienen la misma duración), con $j \in J$.

Los padres del sobrino, enterados del plan del tío, le han puesto tres exigencias a esta maratón: (1) como máximo puede durar W minutos, (2) todo capítulo que será visto debe ser visto íntegramente, y (3) si el programa j forma parte de la maratón, entonces se deben ver al menos l_j capítulos de ese programa, con $j \in J$.

(a) (**8 puntos**) Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal entera que permita a este tío diseñar la maratón de programas infantiles de manera de maximizar su duración.
Note que todos los capítulos de un programa son iguales desde el punto de vista del tío ya que duran lo mismo.

(b) (**7 puntos**) Como era de esperar, este tío no tiene ningún programa infantil en su casa, por lo que deberá arrendarlos a su operador de cable (que se encargará de emitir los programas/capítulos escogidos). El arriendo de cualquier capítulo del programa j, con $j \in J$, cuesta g_j pesos, mientras que el arriendo de todos los capítulos de ese mismo programa cuesta c_j pesos (asuma que $c_j \leq N_j g_j$). Considere la nueva información para modificar el modelo de la parte (a) de manera de asegurar que la maratón no le costará al tío más de R pesos. Tenga en cuenta que todo capítulo arrendado es visto íntegramente.

(c) (**Pregunta de bono: 7 puntos**) El cable operador informa al tío que existe un tiempo de preparación cuando se pasa de la emisión de un capítulo de un programa a la emisión

de un capítulo de un programa diferente (este tiempo se conoce como tiempo de preparación). Específicamente, este tiempo está calculado en f_{ij} minutos cuando se pasa de la emisión de un capítulo del programa j a la emisión de un capítulo del programa i. Dado lo anterior, el tío ha decidido que todos los capítulos que verán de un mismo programa los verán consecutivamente[1]. Incorpore esta nueva información al modelo de la parte (b) de manera que el tiempo total de preparación sea a lo más de H minutos.

Pauta

(a) **Variables de decisión**

- ◇ x_j: 1, si el programa $j \in J$ es parte de la maratón de programas infantiles; 0, en otro caso.
- ◇ y_j: cantidad de capítulos del programa $j \in J$ que serán vistos durante la maratón de programas infantiles.

Función objetivo

$$Z = \max \sum_{j \in J} T_j y_j \tag{1}$$

Restricciones

- ◇ *No programar más de los capítulos que existen para cada programa si el programa forma parte de la maratón.*

$$y_j \leq N_j x_j, \ \forall j \in J. \tag{2}$$

- ◇ *Si un programa forma parte de la maratón, entonces se debe ver una cantidad mínima de capítulos de ese programa.*

$$y_j \geq l_j x_j, \ \forall j \in J. \tag{3}$$

- ◇ *La totalidad de programas/capítulos que forman parte de la maratón deben ajustarse a las W horas establecidas por los padres.*

$$\sum_{j \in J} T_j y_j \leq W. \tag{4}$$

- ◇ *Naturaleza de las variables de decisión*

$$\begin{array}{c} x_j \in \{0, 1\}, \ \forall j \in J. \\ y_j \geq 0, \text{enteras } \forall j \in J. \end{array} \tag{5}$$

(b) Las modificaciones a la parte (a) son:

Nuevas variables de decisión

[1]Por ejemplo, si el tío decide que vean 4 capítulos del programa 1 y 2 capítulos del programa 2, los verán de una de las siguientes formas: los 4 capítulo del programa 1 primero y luego los 2 capítulos del programa 2, o los 2 capítulos del programa 2 primero y luego los 4 capítulos del programa 1.

- ◇ α_j: 1, si el tío arrienda todos los capítulos del programa $j \in J$; 0, en otro caso.
- ◇ h_j: costo variable si el tío no arrienda la totalidad de los capítulos del programa $j \in J$.

Nuevas restricciones

- ◇ *No superar el presupuesto establecido para la maratón.*

$$\sum_{j \in J} c_j \alpha_j + \sum_{j \in J} h_j \leq R. \tag{6}$$

- ◇ *Construcción de la variable h_j.*

$$h_j \geq g_j y_j - M\alpha_j, \ \forall j \in J. \tag{7}$$

con $M >> 0$.

- ◇ *Primera relación entre α_j e y_j: si se arriendan todos los capítulos de un programa entonces se debe cancelar el costo correspondiente c_j.*

$$(y_j - N_j) + 1 \leq \alpha_j, \ \forall j \in J. \tag{8}$$

- ◇ *Segunda relación entre α_j e y_j: si no se arriendan todos los capítulos de un programa entonces no se debe cancelar el costo correspondiente c_j.*

$$1 - \frac{N_j - y_j}{N_j} \geq \alpha_j, \ \forall j \in J. \tag{9}$$

- ◇ *Naturaleza de las variables de decisión*

$$\begin{array}{c} \alpha_j \in \{0, 1\}, \ \forall j \in J. \\ h_j \geq 0, \text{enteras } \forall j \in J. \end{array} \tag{10}$$

(c) Las modificaciones a la parte (b) son:

Nueva variable de decisión

- ◇ β_{ij}: 1, si los capítulos del programa $j \in J$ se verán justo después de los capítulos del programa $i \in J$, con $i \neq j$; 0, en otro caso.

Nuevas restricciones

- ◇ *No superar el tiempo máximo de preparación permitido para la maratón.*

$$\sum_{j \in J} \sum_{j \in J : j \neq i} f_{ij} \beta_{ij} \leq H. \tag{11}$$

- ◇ *Si un programa es visto entonces posee a lo más un programa que lo antecede.*

$$\sum_{i \in J : i \neq j} \beta_{ij} \leq x_j, \ \forall j \in J. \tag{12}$$

◇ *Si un programa es visto entonces posee a lo más un programa que lo precede.*

$$\sum_{i \in J: i \neq j} \beta_{ji} \leq x_j, \ \forall j \in J. \tag{13}$$

◇ *La cantidad total de programas antecesores (o predecesores) se relaciona con la cantidad de programas que verán en la maratón.*

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in J: i \neq j} \beta_{ji} = \left(\sum_{j \in J} x_j \right) - 1. \tag{14}$$

◇ *Naturaleza de las variables de decisión*

$$\beta_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall j \in J. \tag{15}$$