PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2025 - 2
Profesores: M. Castro - R. Cuadrado
M. Klapp - M. Villafranca

Interrogación 1
Duración: 120 minutos.

Instrucciones

- **Durante la prueba se exigirá una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También deberá firmar la lista de asistencia a la prueba.
- **Escriba su nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja.** Además, escriba número de lista en cada hoja. No seguir estas instrucciones será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- **Al finalizar la prueba**, cada estudiante debe:
  (a) **Escanearla y entregarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Interrogación 1" que estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Procure que el escaneo sea legible, pues se corregirá sobre el documento escaneado. Un escaneo ilegible o incompleto no será corregido.
  (b) **Entregarla físicamente** como respaldo al equipo de ayudantes. Si no se recibe el respaldo físico de la prueba, esta será calificada con nota 1.
- La prueba es estrictamente individual.
- Escribir respuestas en la prueba después de su término se penalizará con nota mínima en la pregunta o, incluso, en toda la prueba a criterio del equipo docente.
- Está prohibido el uso de dispositivos electrónicos (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) durante la prueba. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS.
- Si termina antes de tiempo, entonces favor avisar a un miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.

Pregunta 1 (6 puntos)

Una persona a cargo de planificación en una empresa minera busca proyectar producción y venta de cobre para los siguientes T meses que conforman su horizonte de planificación. En cada uno de los próximos T meses, esta persona debe planificar cuánto cobre extraer de cada uno de los n yacimientos disponibles y cuánto vender al mercado al final de ese mes (después de la extracción).

El costo de extracción de una tonelada de cobre desde el yacimiento $i \in \{1, ..., n\}$ durante el mes $t \in \{1, ..., T\}$ se estima en c_{it} [\$/ton] y cada yacimiento i dispone de reservas por r_i [ton] para los próximos T meses. Por el lado del mercado, se estima que para cada mes t habrá una demanda máxima de d_t [ton] y un precio de venta p_t [\$/ton] por tonelada comercializada. Además, la empresa minera cuenta con depósitos que le permiten almacenar cobre. Cada yacimiento i tiene un único depósito con capacidad máxima V_i [m^3], y cada tonelada de cobre ocupa un volumen de v [m^3/ton]. El costo de almacenar una tonelada desde el final del mes t hasta el mes $t+1$ es h_{it} [\$/ton]. Finalmente, se sabe que extraer una tonelada de cobre del yacimiento i produce una emisión igual a e_i [tCO_2/ton]. La empresa busca mantener su compromiso medioambiental y no sobrepasar un umbral de E [tCO_2] emisiones por mes. Sin embargo, es posible superar el umbral y pagar una compensación económica igual a q pesos por cada tCO_2 emitida sobre el umbral.

Parte A (5 puntos)

Formule un modelo de programación lineal que maximice la utilidad total de la empresa minera sobre los próximos T meses. Asuma que los depósitos comienzan vacíos y que, en cada periodo, no se puede vender más que su demanda máxima.

Solución:

Variables de decisión:

- $x_{i,t} \in \mathbb{R}_+$: Ton de cobre extraídas en $i \in \{1, \ldots, n\}$ en el mes $t \in \{1, \ldots, T\}$.
- $y_{i,t} \in \mathbb{R}_+$: Ton de cobre almacenadas en $i \in \{1, \ldots, n\}$ del mes t al $t+1$, para $t \in \{0, \ldots, T\}$.
- $z_{i,t} \in \mathbb{R}_+$: Toneladas de cobre de $i \in \{1, \ldots, n\}$ vendidas en el mes $t \in \{1, \ldots, T\}$.
- $w_t \in \mathbb{R}_+$: Sobreemisión generada en el mes $t \in \{1, \ldots, T\}$.

Objetivo: maximizar utilidad total = venta menos costos de extracción, almacenamiento y

compensación ambiental.

$$\max_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w})} \quad \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{n} p_t \cdot z_{i,t} - \sum_{i=1}^{n} c_{i,t} \cdot x_{i,t} - \sum_{i=1}^{n} h_{i,t} \cdot y_{i,t} - q \cdot w_t\right)$$

Restricciones:

$$y_{i,t-1} + x_{i,t} = z_{i,t} + y_{i,t} \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall t \in \{1,\ldots,T\} \qquad \text{(1a)}$$

$$y_{i,t} \leq V_i/v \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall t \in \{1,\ldots,T\} \qquad \text{(1b)}$$

$$y_{i,0} = 0 \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \qquad \text{(1c)}$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{i,t} \leq r_i \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \qquad \text{(1d)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{i,t} \leq d_t \qquad \forall t \in \{1,\ldots,T\} \qquad \text{(1e)}$$

$$w_t \geq \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot x_{i,t} - E \qquad \forall t \in \{1,\ldots,T\} \qquad \text{(1f)}$$

$$w_t \geq 0 \qquad \forall t \in \{1,\ldots,T\} \qquad \text{(1g)}$$

$$x_{i,t}, y_{i,t}, z_{i,t} \geq 0 \qquad \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall t \in \{1,\ldots,T\} \qquad \text{(1h)}$$

Las restricciones (1a) imponen el balance de material entre extracción, almacenaje y venta para cada yacimiento y mes. Las restricciones (1b)–(1c) modelan el almacenamiento, imponiendo la capacidad máxima y el inicio sin inventario. Las restricciones (1d) aseguran que no se extraiga más que las reservas disponibles, mientras que (1e) limitan venta a la demanda mensual. La restricciones (1f) y(1g) definen que la sobreemisión mensual es mayor o igual a la diferencia entre las emisiones menos el umbral y cero. Finalmente, (1h) establecen la no negatividad de las variables restantes.

Nota de corrección:

No es necesario definir $y_{i,0}$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ (se puede modelar con restricciones de inventario diferentes para el mes 1).

La solución supone que no existen transferencias horizontales entre depósitos, es decir, cada yacimiento administra de manera independiente su inventario. Sin embargo, si un alumno **modela correctamente** estas transferencias (equivalente a compartir depósitos), se considerará igualmente correcta.

Pauta Corrección:

- ◇ 1 punto por definir las variables equivalentes a $x_{i,t}, y_{i,t}, z_{i,t}$ y establecer su no-negatividad

(1h).

- ◇ 1 punto por el objetivo.
- ◇ 1 punto por restricciones (1a), (1b) y (1c).
- ◇ 1 punto por restricciones (1d) y (1e).
- ◇ 1 punto por modelar correctamente la compensación económica (definir variables w_t, añadirlas a objetivo y restringirlas adecuadamente).

Parte B (1 puntos)

Asumiendo que todos los datos enunciados son no negativos, argumente que el modelo anterior debe admitir al menos una solución óptima.

Solución:

Para demostrar que el modelo admite una solución óptima utilizamos el teorema de Bolzano–Weierstrass (extendido):

- ◇ **Función objetivo continua $\in \mathbb{D}$:** Es lineal, por lo tanto, continua en $\mathbb{R}^n$.
- ◇ **Dominio no vacío:** El origen es factible (no extraer, ni almacenar, ni vender).
- ◇ **Dominio cerrado:** Dominio definido por igualdades y desigualdades irrestrictas.
- ◇ **Función coercitiva ($f(\mathbf{x}) \to -\infty$ cuando $||\mathbf{x}|| \to \infty, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$):** Todas las variables son no negativas (estan acotadas inferiormente). Las variables $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ están además acotadas superiormente por las restricciones (1d), (1e) y (1b), respectivamente. La variable $\mathbf{w}$ no está acotada superiormente, sin embargo, cuando $\mathbf{w} \to \infty$ se cumple que $f(\mathbf{x}) \to -\infty$ debido a la penalización que impone en la función objetivo.

Nota de corrección: Alternativamente se puede plantear un limite superior para la función objetivo. Es decir existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que: $k \geq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$. Por ejemplo, $k = \sum_{t=1}^{T} p_t \cdot d_t$, que corresponde al valor óptimo del modelo que sólo considera las restriccines de demanda y no negatividad. Combinando esta condición con el hecho de que el dominio es no vacío y cerrado, se concluye, por el corolario para problemas lineales, que existe al menos una solución óptima.

Pauta Corrección:

- ◇ 1 punto si todo está correcto.

Pregunta 2 (6 puntos)

Se le solicita ayuda para planificar decisiones de contratación de personal para un *callcenter* que funciona los 7 días de una semana representativa. En cada día $d \in \{1, ..., 7\}$, el trabajo se organiza en un sistema compuesto por tres turnos $t \in \{1, 2, 3\}$. Cada turno t establece una jornada de δ_t horas de trabajo y en el día d debe ser cubierto por al menos $q_{d,t}$ personas.

La ley laboral establece que nadie puede trabajar más de un turno diario ni más de 6 días a la semana. A su vez, se ha acordado que nadie puede trabajar el turno $t = 3$ el día inmediatamente anterior al día que trabaja el turno $t = 2$. Asuma un esquema cíclico de trabajo, es decir, después del domingo comienza el lunes de la semana representativa.

Suponga que usted dispone de N personas que podría contratar. Usted debe escoger cuántas de estas personas contratar y asignarle a cada una un esquema de turnos semanales, pero sujeto a las condiciones del tipo de contrato laboral que usted elija. Para ello, existen C diferentes tipos de contrato disponibles en el departamento legal de la empresa. Específicamente, el contrato tipo $c \in \{1, ..., C\}$ establece un pago fijo de $\$\alpha_c$ por las primeras B_c horas semanales trabajadas más un pago variable de $\$\beta$ por cada hora extra trabajada sobre este límite, las cuales no pueden superar el 20 % de B_c.

Formule un modelo de programación lineal con variables mixtas que le ayude a planificar decisiones de contratación de personal requerido para cubrir sus requerimientos de trabajo a mínimo costo satisfaciendo los requerimientos exigidos.

Solución:

Variables de decisión:

- $x_{i,d,t} \in \{0, 1\}$: Si persona $i \in \{1, ..., N\}$ trabaja el día $d \in \{1, ..., 7\}$ en turnos $t \in \{1, 2, 3\}$.
- $y_{i,c} \in \{0, 1\}$: Si a persona $i \in \{1, ..., N\}$ se le ofrece el contrato $c \in \{1, ..., C\}$.
- $z_i \in \mathbb{R}_+$: Horas de trabajo sobre el límite para persona $i \in \{1, ..., N\}$.

Objetivo:

$$\min_{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})} \quad \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{c=1}^{C} \alpha_c \cdot y_{i,c} \right) + \beta \cdot \left(\sum_{r \in R} \cdot z_i \right)$$

La función objetivo minimiza los costos de contratación más los costos de las horas variables.

Restricciones:

$$\sum_{c=1}^{C} y_{i,c} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1, ..., N\} \qquad \text{(2a)}$$

$$\sum_{d=1}^{7} \sum_{t=1}^{3} \delta_t \cdot x_{i,d,t} \leq \left(\sum_{c \in C} B_c \cdot y_{i,c} \right) + z_i \qquad \forall i \in \{1, ..., N\} \qquad \text{(2b)}$$

$$z_i \leq \sum_{c=1}^{C} 0.2 \cdot B_c \cdot y_{i,c} \qquad \forall i \in \{1, ..., N\} \qquad \text{(2c)}$$

$$\sum_{t=1}^{3} x_{i,d,t} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1, ..., N\}, \forall d \in \{1, ..., 7\} \qquad \text{(2d)}$$

$$\sum_{d=1}^{7} \sum_{t=1}^{3} x_{i,d,t} \leq 6 \qquad \forall i \in \{1, ..., N\} \qquad \text{(2e)}$$

$$x_{i,d,3} + x_{i,d',2} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1, ..., N\}, \forall d, d' \in \{1, ..., 7\} : \text{mod}((d' - d), 7) = 1 \qquad \text{(2f)}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,d,t} \geq q_{d,t} \qquad \forall d \in \{1, ..., 7\}, t \in \{1, 2, 3\} \qquad \text{(2g)}$$

$$x_{i,d,t} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, ..., N\}, \forall d \in \{1, ..., 7\}, t \in \{1, 2, 3\} \qquad \text{(2h)}$$

$$y_{i,c} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in \{1, ..., N\}, \forall c \in \{1, ..., C\} \qquad \text{(2i)}$$

$$z_i \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., N\} \qquad \text{(2j)}$$

Las restricciones (2a) aseguran un contrato (como máximo) por persona. Las restricciones (2b) y (2c) limitan el máximo semanal de horas por persona en función de su contrato. Las restricciones (2d) y (2e) evitan que alguien trabaje más de un turno al día o más de 6 días a la semana, respectivamente. Las restricciones (2f) restringen que una misma persona no realice un turno 2 en el día inmediatamente siguiente al turno 3. Las restricciones (2g) establecen que la demanda de cada turno debe ser cubierta. El resto impone la naturaleza de las variables.

- ◇ 1 punto por definir variables x, y y su naturaleza.
- ◇ 1 punto por formular la función objetivo.
- ◇ 2 puntos por definir variables z y modelar correctamente las restricciones (2a),(2b) y (2c).
- ◇ 1 punto por modelar correctamente las restricciones (2d), (2e) y (2g).
- ◇ 1 punto por modelar correctamente las restricciones (2f).

Pregunta 3 (6 puntos)

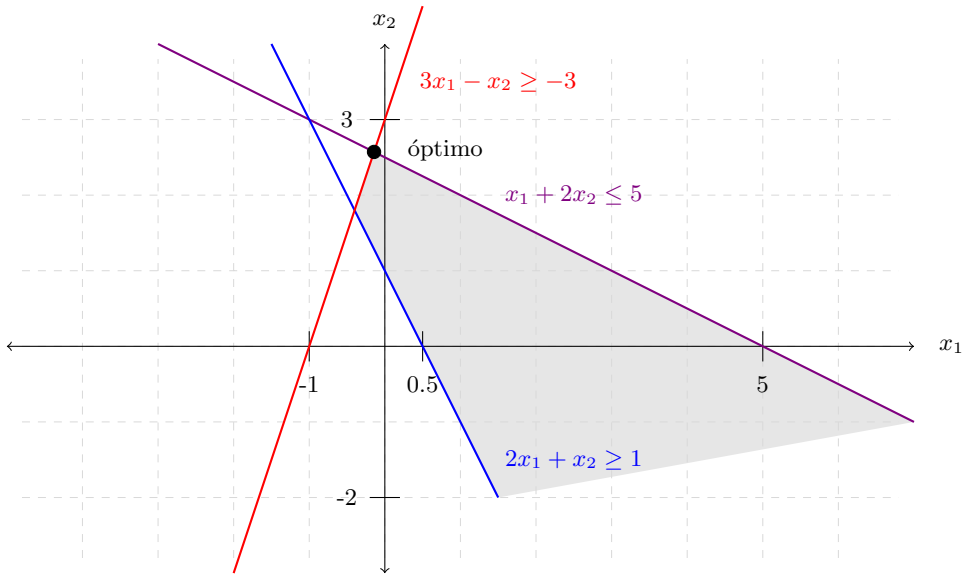
Parte A (2 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal con dos variables:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -x_1 + 7x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5 && \text{(3a)} \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 && \text{(3b)} \\ & 3x_1 - x_2 \geq -3 && \text{(3c)} \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(a) Resuelva gráficamente este problema identificando su valor óptimo y su(s) solución(es) óptima(s). Identifique las restricciones activas en cada una de las soluciones óptimas encontradas.

Solución: La figura detalla la región factible y el punto óptimo. En particular, la única solución óptima es $(x_1^*, x_2^*) = (-1/7, 18/7)$ y su valor óptimo es $v^* = 18 + 1/7 = 127/7 \approx 18.14$. Las restricciones (3a) y (3c) son activas, mientras que la restricción (3b) es inactiva.



(b) Considere la función objetivo $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ con coeficientes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Indique para qué rango de valores de $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ se mantiene la(s) solución(es) óptima(s) encontrada(s) en la pregunta anterior. Justifique su respuesta.

Solución:

Para que la solución óptima no cambie, necesitamos que las restricciones (3a) y (3c) sigan siendo activas para nuestro problema. Para esto, necesitamos que exista un $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tal que:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esto equivale a señalar que el ratio de los coeficientes este contenido en el intervalo dado por el ratio de los gradientes de las restricciones activas:

$$\frac{c_1}{c_2} \in \left(-3, \frac{1}{2}\right)$$

Lo que es equivalente a $c_2 \geq 0$ y $-3c_2 \leq c_1 \leq c_2/2$. Cualquiera de estas representaciones se considera correcta.

Parte B (2 puntos)

Encuentre un modelo de programación lineal equivalente al siguiente problema de optimización, donde $c, d, K \in \mathbb{R}$ y $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ son constantes del problema.

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \; & d + \frac{e^c}{\prod_{i=1}^{n} e^{b_i x_i}} \\ \text{s.a.} \quad & \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;,\; |x_n - x_1| \right\} \leq K \end{aligned}$$

Solución: Hay varias formas de empezar a abordar el problema y las soluciones resultantes pueden ser levemente diferentes (pero equivalentes). Primero desarrollamos la función objetivo. Notamos que podemos omitir la constante d (argumentando, por ejemplo, con una función lineal creciente $f(x) = x + d$) y ocupando propiedades de la exponencial tenemos:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \; & e^{c - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i} \\ \text{s.a.} \quad & \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;,\; |x_n - x_1| \right\} \leq K \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar la función logaritmo natural a la función objetivo, ya que esta es estrictamente creciente, y obtener:

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\mathbb{R}^n} \; c - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ &\text{s.a.} \quad \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;,\; |x_n - x_1| \right\} \leq K \\ &\qquad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

La función objetivo resultante es lineal (se puede simplificar más, pero no es necesario). Ahora separamos el max de la restrición en dos:

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\mathbb{R}^n} \; c - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ &\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\leq K \\ &\qquad |x_n - x_1| \leq K \\ &\qquad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

La primera restricción es lineal. Ahora solo bastan linearizar el valor absoluto:

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\mathbb{R}^n} \; c - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ &\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \;\leq K \\ &\qquad x_n - x_1 \leq K \\ &\qquad x_n - x_1 \geq -K \\ &\qquad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Pauta Corrección:

- ◇ 1 punto por linearizar la función objetivo
- ◇ 1 punto por linearizar la restricción

Parte C (2 puntos)

Considere un problema de optimización P que minimiza una función objetivo convexa sobre un dominio convexo. Asuma que este problema admite solución óptima. ¿Es la siguiente frase verdadera o falsa? "El conjunto de soluciones óptimas de P es convexo"

Pruébela o refútela con un buen argumento de acuerdo a su respuesta.

Solución: Sea $f(x)$ el objetivo convexo de P definido sobre un dominio convexo $\mathbb{X}$ y v^* su valor óptimo. Hay al menos dos forma de probar esto:

- A: El epígrafe de $f(x)$ es convexo, por lo que el conjunto: $\{x \in \mathbb{X}, y \in \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ es convexo. Si intersectamos este conjunto con el conjunto $\{x \in \mathbb{X}, y = v^*\}$, entonces esta intersección es convexa y es exactamente el conjunto de soluciones óptimas.

- B: Sean x_1^* y x_2^* cualquier par de soluciones óptimas en el conjunto de soluciones óptimas, es decir, $f(x_1^*) = f(x_2^*) = v^*$. Su combinación convexa $x^c = \lambda \cdot x_1^* + (1-\lambda) \cdot x_2^*$ está en $\mathbb{X}$, pues el dominio es convexo. Además, debe cumplirse que $f(x^c) \geq v^*$, pues ningún punto factible logra menor valor que el óptimo.

  Por convexidad, además se tiene que:

  $$f(x^c) \leq \lambda \cdot f(x_1^*) + (1-\lambda) \cdot f(x_2^*) = \lambda \cdot v^* + (1-\lambda) \cdot v^* = v^*,$$

  Luego, x^c es solución óptima también, lo que demuestra que el conjunto de soluciones óptimas es convexo.

Nota de corrección: Todo el puntaje va a la argumentación.