PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2014
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
A.Lüer - J.Vera

Pauta Tarea 1

Fecha de Entrega: 10 de Septiembre.

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) Indique si el siguiente problema tiene o no solución, justificando con claridad sobre la base de los resultados y métodos del curso:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & x_1^2 - 4x_2^2 \\ s.a. & x \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Respuesta: No tiene solución, basta tomar el camino $(x_1(t), x_2(t)) = (0, t), t \geq 0$ y la función objetivo va a $-\infty$ cuando $t \to \infty$.

(b) En el siguiente problema, ¿qué condiciones deben cumplir los parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ para que el siguiente problema tenga solución óptima?

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j x_j} \\ s.a. & \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 16 \end{array}$$

Respuesta: Desde luego sí tiene, por el teorema de BW, ya que la restricción define un conjunto cerrado y acotado y la función objetivo es continua.

(c) Determine si estas funciones son convexas o no

- $f(x, y) = (x + y)^2$
  Respuesta: Es convexa ya que es la composición de una función convexa con otra que es creciente y convexa.
- $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z$
  Respuesta: No es convexa, basta fijar $y = z = 0$ y argumentar que $f(x) = x^3$ no es convexa. Esto se puede hacer por la definición, por ejemplo.

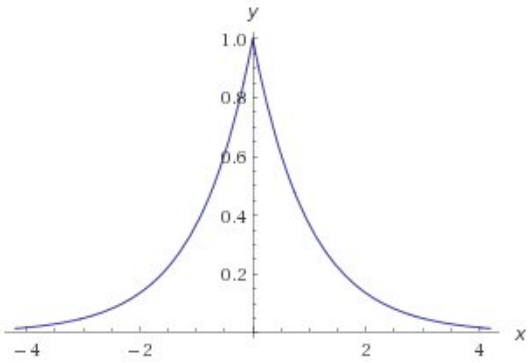
(d) Definamos, para $x \in \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

Muestre que el conjunto: $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq 1\}$ es convexo.

Respuesta: $\|x\|_1$ es definida como la suma de funciones convexas, así que es una función convexa. El conjunto es un conjunto de nivel de una función convexa, así que es convexo.

(e) Argumente que la función de una variable definida sobre todo $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x|}$ no es convexa y tampoco es cóncava. **Respuesta:** Basta ver el gráfico de la función y se tiene el resultado:



Pregunta 2 (15 puntos)

(a) Demuestre las siguientes aseveraciones dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z = c^T x \\ s.a. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(i) El conjunto de soluciones factibles (S) de un problema de programación lineal es un conjunto convexo.

(ii) Si S es un poliedro convexo, entonces la función objetivo z alcanza su mínimo en un vértice de S. Además, si este mínimo se alcanza en más de un punto, también se alcanza en cualquier combinación lineal convexa de los mismos.

(iii) Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ que es vértice de un poliedro S, entonces loa vectores A_i asociados con x_i positivos, forman un sistema linealmente independiente. Por lo que a lo sumo m de estos x_i son positivos.

(iv) Cada punto extremo del poliedro en programación lineal se encuentra asociado a un conjunto de m vectores linealmente independientes de la matriz A.

Pauta

Las aseveraciones se demostraban directamente de las definiciones de convexidad, y son resultados clásicos presentes en los textos de Programación Lineal comúnmente utilizados.

(b) Para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 20 \\ 2x + y + z &\leq 40 \\ 2x + y + 4z &\geq 50 \\ x, y, z &\leq 0 \end{aligned}$$

(i) Indique cuántas potenciales bases puede tener el problema planteado.

(ii) Indique cuántas bases realmente tiene.

(iii) Indique cuántas bases generan soluciones básicas factibles.

(iv) Indique las soluciones básicas factibles asociadas a cada base.

Pauta

Para resolver este problema, se debía pasar el sistema a restricciones de igualdad (forma estándar del poliedro). Una vez ahí podía hacerse el análisis. Para la parte i) si un sistema bien comportado tiene n variables y m restricciones, tendría la combinatoria de n sobre m bases posibles. Para la parte ii)

bastaba chequear si las matrices de base asociadas a la parte i) se componían de columnas LI. Para las partes iii) y iv), bastaba resolver, para cada base obtenida antes, el sistema en forma estándar haciendo 0 las coordenadas de las variables no básicas, y chequeando si las coordenadas eran no negativas para las variables básicas.

Pregunta 3 (15 puntos)

Una de las decisiones que pueden tomarse utilizando Investigación Operativa es la de localizar instalaciones. Estas, por lo general, corresponden a determinar la ubicación de bodegas, supermercados, o centros de atención considerados 'benignos', es decir, que entregan bienestar a las personas por su existencia, por lo que es deseable tenerlos cerca. Este no es el caso de las llamadas instalaciones NIMBY (Not In My BackYard), como los rellenos sanitarios, plantas de tratamiento, etc.

Suponga que desea ubicar K instalaciones NIMBY indistinguibles entre sí, donde los lugares posibles para localizarlas forman el conjunto L. Para efectos del modelo, la población se ha agrupado en unidades territoriales, las que forman el conjunto U. Así, para la unidad territorial $u \in U$ se conoce la población existente p_u, y la distancia de dicha unidad a cada lugar posible $l \in L$ para las instalaciones NIMBY, denotada d_{ul}.

Por otra parte, y para evitar que las instalaciones se localicen cerca, se sabe que éstas no pueden ubicarse simultáneamente en algunos pares de lugares simultáneamente. Estos pares están almacenados en el conjunto N.

Escriba un modelo de programación lineal entera que determine la ubicación óptima de las K instalaciones NIMBY. Se busca maximizar la distancia ponderada total de estas instalaciones a las unidades territoriales.

Hint: Sólo considere el efecto de la instalación NIMBY localizada más cercana a cada unidad territorial.

Pauta

El modelo asociado es:

Variables

X_l: 1, si se localiza una instalación NIMBY en el lugar $l \in L$; 0, en otro caso.

Y_{ul}: 1, si la instalación NIMBY ubicada en $l \in L$ es la más cercana a la unidad territorial $u \in U$; 0, en otro caso

Función objetivo

$$\text{máx} \sum_{u \in U} \sum_{l \in L} p_u d_{ul} Y_{ul}$$

Restricciones

R1) Cantidad de instalaciones a localizar.

$$\sum_{l \in L} X_l = K$$

R2) Evitar asignaciones imposibles.

$$Y_{ul} \leq X_l, \ \forall u \in U, \ l \in L$$

R3) Asignación única.

$$\sum_{l \in L} Y_{ul} = 1, \ \forall u \in U$$

R4) Pares de localizaciones incompatibles.

$$X_a + X_b \leq 1, \ \forall (a, b) \in N$$

R5) Asignación a la instalación localizada más cercana.

Se define el conjunto M_{ul} como el conjunto de lugares para NIMBYs más cercanos a $u \in U$ que $l \in L$. Formalmente, $M_{ul} = \{m \in L : d_{um} < d_{ul}\}$

$$Y_{ul} \geq X_l - \sum_{k \in M_{ul}} X_k, \ \forall u \in U, \ l \in L$$

R6) Dominio de las variables de decisión.

$$Y_{ul} \in \{0, 1\}, \ \forall u \in U, \ l \in L$$

$$X_l \in \{0, 1\}, \ \forall l \in L$$

Pregunta 4 (15 puntos)

Un país cuenta con N ciudades que requieren anualmente agua del único embalse cercano, cuya distribución de agua está a cargo de la empresa EmReA.

Se sabe que este embalse tiene capacidad para entregar F litros de agua anuales, y que la demanda anual mínima de cada una de estas N ciudades es D_i, y se entiende que esta demanda debe ser al menos satisfecha por EmReA. Se puede asumir que la demanda máxima de cada ciudad es mayor que F.

La empresa EmReA cuenta actualmente con canales que van directo desde el embalse a cada ciudad, y de esta manera hace llegar agua a las ciudades. Actualmente el costo por cada litro de agua transportado desde el embalse a la ciudad i, con $i = 1, \ldots, N$, está fijado en G_i unidades monetarias.

Para el próximo año la empresa está considerando un plan de expansión que consiste en la construcción de canales de transporte de agua entre las ciudades. Los estudios preliminares indican que el costo fijo por la construcción del canal que permita transportar agua desde la ciudad i, con $i = 1, \ldots, N$, a la ciudad j, con $j = 1, \ldots, N$, será de H_{ij} unidades monetarias, y que el costo variables por litro de agua transportada desde la ciudad i, con $i = 1, \ldots, N$, a la ciudad j, con $j = 1, \ldots, N$, será de c_{ij} unidades monetarias. Adicionalmente, este mismo estudio muestra que no es posible construir un canal en ambos sentidos entre un par de ciudades cualquiera.

Sobre el precio que espera cobrar el próximo año EmReA por cada litro de agua, éste se proyecta en P_i unidades monetarias para la ciudad i, con $i = 1, \ldots, N$.

La empresa EmReA ha sido notificada sobre diferentes criterios mediambientales y urbanistas que debe cumplir con sus canales. Específicamente se establece que en una vecindad de ciudades no deben existir más de K canales, considerando los que hay entre las ciudades de la vecindad y los que llegan desde el embalse. Para esto se han construido Z vecindades, y se ha definido $V(z)$ como un conjunto que contiene a todas las ciudades que son definidas "vecinas" en la vecindad z, con $z = 1, \ldots, Z$.

Construya un modelo de programación lineal que permita a EmReA planificar su política de despacho de agua a las ciudades de manera de maximizar la utilidad obtenida durante el próximo año, asegurando que se cumplan los criterios mediambientales y urbanistas.

Pauta

El modelo asociado es:

Variables

f_i: variable continua que indica la cantidad de agua que será enviada desde el embalse a la ciudad i, con $i = 1, \ldots, N$.

y_{ij}: variable continua que indica la cantidad de agua que será enviada desde la ciudad i, con $i = 1, \ldots, N$, a la ciudad j, con $j = 1, \ldots, N : i \neq j$.

x_{ij}: variable binaria que vale 1 si se construye el canal que lleva flujo desde la ciudad i, con $i = 1, \ldots, N$, a la ciudad j, con $j = 1, \ldots, N : i \neq j$, y vale 0 en otro caso.

d_i: variable continua que indica la cantidad de agua que será entregada en la ciudad i, , con $i = 1, \ldots, N$.

Función objetivo Maximizar la rentabilidad del negocio:

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{N} P_i d_i - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1:j\neq i}^{N} H_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{N} G_i f_i - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1:j\neq i}^{N} c_{ij} y_{ij}$$

Restricciones

R1) Debe salir todo del embalse.

$$\sum_{i=1}^{N} f_i \leq F$$

R2) Satisfacer la demanda mínima en cada ciudad.

$$d_i \geq D_i \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N.$$

R3) Conservación de flujo en cada ciudad.

$$d_i = f_i + \sum_{j=1:j\neq i}^{N} y_{ji} - \sum_{j=1:j\neq i}^{N} y_{ij} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N.$$

R4) No transportar flujo por canales no construidos.

$$y_{ij} \leq F \cdot x_{ij} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, N : j \neq i.$$

R5) Construir canales en a lo más una dirección.

$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1 \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, N : j \neq i.$$

R6) Condición sobre cantidad de canales en vecindades.

$$\sum_{V(z)} 1 + \sum_{i\in V(z)} \sum_{j\in V(z):j\neq i} x_{ij} \leq K \qquad \text{para } z = 1, \ldots, Z.$$

R7) Naturaleza de las variables

$f_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, N$.
$y_{ij} \geq 0$, para $i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, N : j \neq i$.
$x_{ij} \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, N : j \neq i$.
$d_i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, N$.