Parte 1 (30pts).

i) **(10pts)** Considere el siguiente problema de Programación Lineal, donde A es la matriz de restricciones de *n* variables y *m* restricciones:

$$P) \quad \begin{aligned} Min \quad & c^T x \\ s.a. \quad & Ax = b \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,...,n \end{aligned}$$

Obtenga las condiciones KKT y demuestre son equivalentes a las condiciones de optimalidad del SIMPLEX, es decir, muestre que implican que el problema tenga costos reducidos no negativos.

Respuesta:
El lagrangeano del problema es:

$$L = c^T x + \lambda^T \left(Ax - b \right)$$

Y las condiciones KKT del problema son:

$$(1) \ \frac{dL}{dx} = c^T + \lambda^T A \geq 0$$

$$(2) \ \frac{dL}{dx} x = \left(c^T + \lambda^T A \right) x = 0$$

$$(3) \ \frac{dL}{d\lambda} = \left(Ax - b \right) = 0$$

Suponiendo que la solución óptima no es degenerada y que existen "m" variables básicas distintas de cero, de la ecuación (2) se puede obtener que:

$$\left({c_B}^T + \lambda^T B \right) x_B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad {c_B}^T + \lambda^T B = 0$$

Donde B, es la matriz básica asociada a las variables. Como B es invertible, se tiene que:

$$\lambda^T = -{c_B}^T B^{-1}$$

Luego, reemplazando en la condición (1):

$$\begin{aligned} & c^T - {c_B}^T B^{-1} A \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & \left[{c_B}^T : {c_D}^T \right] - {c_B}^T B^{-1} \left[B : D \right] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & \left[{c_B}^T : {c_D}^T \right] - \left[{c_B}^T : {c_B}^T B^{-1} D \right] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & \left[0 : {c_D}^T - {c_B}^T B^{-1} D \right] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & \left[0 : {r_D}^T \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Es decir los costos reducidos básicos serán nulos y los no básicos serán no negativos. Esta es la condición de optimalidad del SIMPLEX.

Puntaje: por el KKT 5 puntos (2 por el lagrangeano y uno por cada condición) y 5 por la demostración, también acepté que lo justificaran argumentando λ≥0, con el problema dual y simplex, o que explicaran el tableau indicando los Cr no negativos.

ii) **(10pts)** Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad -8x_3 \\
&x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\
&4x_1 + 8x_3 + 10x_4 + 2x_5 = 10 \\
&x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

Encuentre todas las soluciones óptimas utilizando el algoritmo SIMPLEX.

Respuesta:

Dividiendo la segunda restricción por dos, este problema es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad -8x_3 \\
&x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\
&2x_1 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 5 \\
&x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

En donde x_2 y x_5 hacen de holguras de la primera y segunda restricción. Estas dos variables comenzarán en base. El tableau inicial de minimización equivalente sería:

X1	X2	X3	X4	X5	LD
1	1	3	2	0	2
2	0	4	5	1	5
0	0	8	0	0	0

Este tableau es óptimo con solución óptima (0,2,0,0,5). Pero hay dos costos reducidos no básicos con costo nulo, por lo que tres vértices son óptimos. Luego hay solución múltiple. Entra x_1 sale x_2.

X1	X2	X3	X4	X5	LD
1	1	3	2	0	2
0	-2	-2	1	1	1
0	0	8	0	0	0

Este tableau también es óptimo con solución óptima (2,0,0,0,1). Entra $x_{4\text{ y hay}}$ un empate en la salida, escogemos que salga x_1 (puede ser x5 tambièn).

X1	X2	X3	X4	X5	LD
1	5	7	0	-2	0
0	-2	-2	1	1	1
0	0	0	0	8	0

Este tableau es el último óptimo con solución óptima (0,0, 0, 1, 0).

Luego la solución óptima será la combinación convexa de esos vértices:

$$x = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; con \; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Puntaje: asigné 3 puntos por cada solución óptima y un punto por determinar que la solución final es la combinación convexa de las 3 dadas. En casos de errores de arrastre para los tableau descontaba medio punto. Si ingresaban x3 a la base, no di puntaje.

iii) **(10pts)** Considere un dominio lineal dado por *n* variables y *m* restricciones:

$$Ax \leq b$$

$$x_i \geq 0 \;\; \forall \mathrm{i} \in \{1,..,n\}$$

Se sabe que $b_j \geq 0 \;\; \forall \mathrm{j} \in \{1,..,m\}$. Utilizando el SIMPLEX diseñe un método para demostrar que el dominio está acotado.

Respuesta:
Lo más fácil es plantear y reslover "k" problemas maximizando a cada una de las variables:

$$Max: x_k$$

$$Ax \leq b$$

$$x_i \geq 0 \;\; \forall \mathrm{i} \in \{1,..,n\}$$

Si cada uno de esos "k" problema tiene solución óptima (es decir el problema no es no acotado), entonces el valor óptimo será la cota para cada una de las variables.

Puntaje: aquí usé más bien criterio, acepté varias respuestas, por ejemplo que iteren con simplex y digan:

- **Si recorre todos los vértices, hasta dar la vuelta completa al dominio, se concluye que era acotado.**
- **Si todos los aij con negativos, no se puede sacar una variable de la base (ya que todos los bj son positivos), luego el dominio no es acotado.**
- **Que usen dualidad y vean que si el dual tiene un dominio no vacío, implica que el primal tiene dominio acotado.**

El puntaje lo asigné según cómo explicaran la justificación.

Parte 2 (30pts).

Responda brevemente las siguientes preguntas:

i) **(5pts)** Comente respecto a cómo se compara la velocidad de convergencia del método del gradiente con la del método de Newton. Explique con precisión por qué las diferencias, si las hubiere.

Respuesta: En cuanto al número de iteraciones, el método de **Newton es más rápido porque su convergencia es cuadrática**, comparada con la del método del gradiente cuya convergencia es lineal. En cuanto al cálculo necesario en cada iteración, **Newton es más caro por iteración**, pues se debe calcular el Hessiano de la función objetivo y su inversa.Luego en el global del tiempo, por lo general Newton converge en menos tiempo, pero a ciencia cierta es indeterminado cuál método converge primero.

ii) **(5pts)** Suponga que tiene un problema multidimensional irrestricto y cuadrático. Una persona afirma que tanto el método del gradiente como el método de Newton lo resuelven en una iteración. ¿Le cree? Justifique.

Respuesta: El método de newton si lo hará, porque tiene convergencia cuadrática. El método del gradiente no necesariamente pues tiene convergencia lineal. En este caso dependerá del punto de partida y de las formas de las curvas de nivel.

iii) **(5pts)** Cuáles dos condiciones de borde (comentadas en clase) aseguran que un problema de optimización resuelto con Programación Dinámica tenga solución.

Respuesta: Por un lado la función objetivo es conocida en la última etapa y por otro lado los recursos son conocidos en la primera etapa.

iv) **(5pts)** Suponga un problema de optimización, en donde le dicen que la función objetivo es continua y diferenciable, y además, que el dominio es cerrado y acotado. Si se asegura que la función objetivo es estrictamente convexa al evaluarla en un punto mínimo local, entonces se puede decir que dicho punto es el óptimo. Verdadero ó Falso. Justifique.

Respuesta: Falso, para asegurar que un mínimo local sea global el problema debe ser convexo en todo el dominio.

v) **(5pts)** Explique en dos líneas cuál es la ventaja de la Programación Dinámica resolviendo Problemas Enteros frente a métodos como el Branch & Bound.

Respuesta: La programación dinámica obtiene solución en un tiempo polinomial en comparación con métodos con tiempo exponencial como lo es B&B.

(5pts) Explique en dos líneas que es un Modelo. Base sus argumentos en lo conversado en clase.

Respuesta: Un modelo es una **abstracción de la realidad** que representa sus **características principales** seleccionadas para analizar un efecto específico.

Parte 3 (25 pts).

i) **(5pts)** Demuestre que el siguiente problema tiene solución óptima:

$$Max: 2x - y + z^3$$
$$s.a.$$
$$x + y + z^2 \leq 3$$
$$x - y + e^z \leq 1$$
$$x \leq 1$$
$$x, y \geq 0$$

Respuesta: Por el Teorema de Existencia, tenemos que:

- Función objetivo continua, pues es un polinomio.
- dominio cerrado, pues posee sólo desigualdades irrestrictas.
- Su dominio es distinto del vacío, pues el origen pertenece a él.
- El dominio es acotado. (Aquí se debe demostrar que todas las variables están acotadas)

En conclusión, el problema posee solución óptima.

Puntaje:

- Explicar Continuidad, 1 punto.
- Explicar dominio cerrado, 1 punto.
- Nombrar dominio distinto del vacío **a través de un punto** perteneciente a éste, 1 punto.
- **Demostrar** que el dominio es acotado, y concluir que existe solución óptima, 2 puntos.

ii) Considere el siguiente Problema de mochila.

$$Max: \sum_{i=1}^{N} g_i X_i$$
$$s.a.$$
$$\sum_{i=1}^{N} v_i X_i \leq K$$
$$X_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \qquad \forall i = 1,..,N$$

(5pts) Plantee los problemas de optimización en función de los recursos disponibles b_n de la Etapa "n", donde $1 < n < N$, de la Etapa *1* y de la Etapa *N*.

Respuesta:

Los problemas son:

Etapa *n*: $G_n(b_n) = Max: g_n X_n + G_{n+1}(b_n - v_n X_n)\ s.a.\ v_n X_n \leq b_n\ \wedge\ X_n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Etapa *N*: $G_N(b_N) = Max: g_N X_N\ s.a.\ v_N X_N \leq b_N\ \wedge\ X_N \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Etapa 1: $V^* = G_1(b_1 = K) = Max: g_1X_1 + G_2(K - v_1X_1)\ s.a.\ v_1X_1 \le K\ \wedge\ X_1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Puntaje:

- Por la etapa n, 2 puntos.
- Por la etapa N, 1 punto.
- Por la etapa 1, 2 puntos.

(15pts) Considere ahora el siguiente problema:

$$Max: 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 2x_4$$

$$s.a.$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \le 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

Resuélvalo utilizando los principios de la Programación Dinámica. Indique claramente la solución óptima y el valor óptimo.

Respuesta:

Comenzamos con la etapa 4: $G_4(b_4) = Max: 2x_4\ s.a.\ 2x_4 \le b_4\ \wedge\ x_4 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Hacemos la tabla en función de los recursos:

b4	0	1	2	3	4	5
x4*	0	0	1	1	2	2
G4*	0	0	2	2	4	4

Seguimos con la etapa 3: $G_3(b_3) = Max: 2x_3 + G_4(b_3 - x_3)\ s.a.\ x_3 \le b_3\ \wedge\ x_3 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Hacemos la tabla en función de los recursos:

b3	0	1	2	3	4	5
x3*	0	1	2	3	4	5
G3*	0	2	4	6	8	10

Seguimos con la etapa 2: $G_2(b_2) = Max: 10x_2 + G_3(b_2 - 4x_2)\ s.a.\ 4x_2 \le b_2\ \wedge\ x_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Hacemos la tabla en función de los recursos:

b2	0	1	2	3	4	5
x2*	0	0	0	0	1	1
G2*	0	2	4	6	10	12

Terminamos con la etapa 1: $V^* = G_1(5) = Max: 3x_1 + G_2(5 - 3x_1)\ s.a.\ 3x_1 \le 5\ \wedge\ x_1 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Hacemos la tabla esta vez con los recursos conocidos:

b1	5
x1*	0
V*	12

Luego:

El valor óptimo es 12.

La solución óptima es:
→ x1=0, con ello quedan 5 de recurso para la etapa 2.
→x2=1, con ello queda 1 de recurso para la etapa 3.
→x3=1, con ello queda 0 de recurso para la etapa 4.
→x4=0.

Es decir: $X^* = (0,1,1,0)$.

Puntaje:

- Por la etapa 4 completamente buena, 3 puntos.
- Por la etapa 3 completamente buena, 3 puntos.
- Por la etapa 2 completamente buena, 3 puntos.
- Por la etapa 1 completamente buena, 2 puntos.
- Por llegar al valor óptimo, 2 puntos.
- Por llegar a la solución óptima, 2 puntos.

Nota: Para obtener el puntaje del valor y solución óptima, es estrictamente necesario haber llegado a través de programación dinámica, y no simplemente "al ojo".

Parte 4 (25 pts).

En un colegio se da que en cada nivel de educación básica hay cinco cursos. Este colegio está interesado por que haya una crianza mixta entre hombres y mujeres, por lo que se preocupa de mantener un estricto equilibrio de 10 niños y 10 niñas en cada uno de los curso. El colegio tiene la política de mezclar a sus alumnos cuando pasan de tercero a cuarto básico. En cada curso de cuarto básico tiene que haber cuatro alumnos de cada uno de los cinco terceros básicos. Para ello se le pide a cada niño que indique dos compañeros de su mismo sexo y tres compañeros del sexo opuesto que quisiera conservar en su curso de cuarto básico. Así, el colegio recibe 500 requerimientos en total (son 100 niños, y cada uno entrega cinco requerimientos). El colegio indica a los niños y a sus apoderados que será imposible acoger todos los requerimientos, y explica que el problema de composición de los cursos es muy complicado, pero que hará un esfuerzo por mantener al mayor número de alumnos satisfechos.

(20 puntos) Formule un modelo de optimización cuya solución arroje la composición de cada uno de los cinco cuartos básicos. El colegio le pide que la composición de cursos de cuarto básico acoja la mayor cantidad de requerimientos.

(5 puntos) Usted le explica al rector del colegio que eso puede ser muy injusto, pues puede suceder que algunos alumnos verán sus cinco solicitudes aceptadas, mientras otros ninguna. Así, usted le sugiere cambiar el objetivo a que el alumno más perjudicado (que le acojan el menor número de requerimientos) esté lo mejor posible. Formule un modelo que resuelva este nuevo problema.

Hint: usted debe estructurar los datos del problema de la forma que le sea más conveniente. Alguna información del problema podría no ser relevante para su modelo pues podría ser parte del preprocesamiento de los datos.

Respuesta:
Se deben definir algunos datos, una posible forma de hacerlo es:

Datos:
Indexamos a los alumnos de i = 1 a 100
Indexamos los 5 cursos cuarto básico j=1 a 5
Indexamos los 5 cursos tercero básico l=1 a 5

s_i : 1 si el alumno i es niña, o si es niño
r_{ik}: 1 si el alumno i solicita quedar con el alumno k, 0 si no
p_{il}: 1 si el alumno i pertenecía al tercero l, 0 si no

Variables:
x_{ij} =1 si el alumno i va al curso cuarto j o 0 si no.

Modelo:

$$Max \sum_{i=1}^{100} \sum_{k=1}^{100} \sum_{j=1}^{15} x_{ij} x_{kj} r_{ik}$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_{ij} s_i = 10 \qquad \forall j = 1...5$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_{ij} p_{il} = 4 \qquad \forall j = 1...5, \forall l = 1...5$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall j = 1...5, \forall i = 1...100$$

Asignación puntaje:

0 a 5 puntos por definir datos y variables válidas
0 a 5 puntos por la función objetivo
0 a 10 puntos por definir restricciones válidas

b)
Se cambia la función objetivo para que maximice el peor cumplimiento de requerimientos, de manera de que el peor de los caso sea lo menos malo posible:

$$Max \min_{i=1..100} \left\{ \sum_{k=1}^{100} \sum_{j=1}^{15} x_{ij} x_{kj} r_{ik} \right\}$$

El dominio queda igual.

Asignación puntaje:

5 puntos por decir que se debe sacar el máximo del mínimo de la F.O en (a), independiente de la F.O que sea.