PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2022 - 1
Profesores: R. Cuadrado - J. González
G. Méndez - S. Vásquez
F. Verástegui

Examen

Duración: 150 minutos.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (15 puntos)

Pablito es un trabajador muy obediente, el cual puede realizar un listado de $j \in J$ proyectos. La duración en períodos de cada proyecto se encuentra definida en el parámetro d_j. Se sabe también que debe realizar una inversión en el período en el cual comienza a realizar el proyecto, mientras que recibe una ganancia cuando termina de realizar el proyecto. Un proyecto no se puede realizar a medias, sino que debe hacerse de forma completa. A su vez, cada proyecto entrega una rentabilidad variable según la cantidad de presupuesto invertido:

- Si la inversión del proyecto j se encuentra por debajo de u_{j1}, la rentabilidad es de 0.3α respecto de lo invertido.
- Si la inversión del proyecto j se encuentra igual o por sobre de u_{j1} y por debajo de u_{j2}, la rentabilidad es de 0.5α respecto de lo invertido.
- Y si la inversión del proyecto j se encuentra igual o por sobre de u_{j2}, la rentabilidad es de α respecto de lo invertido.

Por otra parte, usted sabe que existen proyectos que no pueden ser realizado antes que otros. En particular, para cada proyecto j se define el conjunto $C_j \subseteq J$ de proyectos que deben ser realizados previamente. A su vez, cada proyecto puede ser ejecutado una única vez, en donde Pablito solo puede estar ejecutando un proyecto en cada período. Asuma que existen T períodos y que inicia con un presupuesto de β pesos al inicio del primer período.

Plantee un modelo de programación no lineal entera con el cual pueda ayudar a Pablito a maximizar la cantidad de dinero al final del último período.

Solución: Se plantean las siguientes variables de decisión (1 pto por cada una):

- x_{jt}: Cantidad de dinero invertido en el proyecto j en el periodo t.
- y_{jt}: 1 si se invierte en el proyecto j en el periodo t, 0 si no.
- z_{jt}: 1 si se está desarrollando el proyecto j en el periodo t, 0 si no.
- I_t: Dinero disponible al final del periodo t.
- w_{jt}^k: 1 si se invierte en el proyecto j en el periodo t con el nivel de tasa $k \in \{1, 2, 3\}$.

Además, se utilizarán las siguientes variables auxiliares. No son estrictamente necesarias, pero ayudarán al entendimiento y simplificación de algunas notaciones:

- $\diamond$ γ_{jt}: tasa efectiva de la inversión del proyecto j en el periodo t.
- $\diamond$ G_{jt}: ingreso del proyecto j en el periodo t.

La función objetivo consiste en maximizar la cantidad de dinero al final del horizonte de tiempo (1 pto):

$$\text{máx } I_T$$

Se necesitan restricciones que modelen correctamente el ingreso por las inversiones (2 ptos cada una de las dos restricciones):

R1) Se relaciona el dinero disponible de cada periodo con la inversión e ingreso de los periodos correspondientes:

$$I_t = I_{t-1} - \sum_{j \in J} x_{jt} + \sum_{j \in J} G_{jt} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

Se define la variable auxiliar G_{jt}:

$$G_{jt} = x_{j,t-d_j+1} \cdot \gamma_{j,t-d_j+1} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

Se define la variable auxiliar γ_{jt}:

$$\gamma_{jt} = w_{jt}^1 \cdot 0.3\alpha + w_{jt}^2 \cdot 0.5\alpha + w_{jt}^3 \cdot \alpha \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

R2) Se relaciona la cantidad de dinero invertida en un periodo con el nivel de inversión adecuado:

$$0 \leq x_{jt} \leq u_j^1 + (1 - w_{jt}^1) \cdot M \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

$$u_j^1 - (1 - w_{jt}^2) \cdot M \leq x_{jt} \leq u_j^2 + (1 - w_{jt}^2) \cdot M \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

$$u_j^2 + (1 - w_{jt}^3) \cdot M \leq x_{jt} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

Además, se necesitan restricciones que modelen las condiciones impuestas en el enunciado (1 pto cada restricción, desde R3 hasta R7):

R3) Solo se puede ejecutar un proyecto a la vez:

$$\sum_{j \in J} z_{jt} \leq 1 \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

R4) Cuando se invierte en un proyecto, se debe desarrollar de forma completa:

$$y_{jt} \leq z_{jl} \qquad \forall j \in J, t \in \{1, ..., T - d_j + 1\}, l \in \{t, ..., t + d_j - 1\}$$

R5 y R6) Relación entre las variables de inversión:

$$x_{jt} \leq y_{jt} \cdot M \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

$$\sum_{k=1}^{3} w_{jt}^k = y_{jt} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

R7) Condición de proyectos realizados previamente:

$$y_{jt} \leq \sum_{l=1}^{t-1} y_{il} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J, i \in C_j$$

R8) Naturalza de variables. Importante también para asegurar de mantener un saldo no negativo a lo largo de todo el horizonte de tiempo (puntaje incluido dentro de la definición de variables):

$$I_t \geq 0 \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

$$x_{jt} \geq 0 \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

$$y_{jt}, z_{jt} \in \{0, 1\} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J$$

$$w_{jt}^k \in \{0, 1\} \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}, j \in J, k \in \{1, 2, 3\}$$

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique en ambos casos.

(i) **(2 puntos)** La función $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-x_i}$ es convexa para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}^n$.
Solución: Falso. Si $\alpha_i < 0$ para cierto $i = 1, \ldots, n$, entonces g no es necesariamente convexa.

(ii) **(2 puntos)** Un problema de programación lineal continua tiene solución óptima entera si y sólo si su dominio es un poliedro con todos sus vértices enteros (poliedro integral).
Solución: Falso. Si el dominio es un poliedro integral, entonces la solución óptima será entera. Pero que la solución óptima sea entera no implica que el dominio sea un poliedro integral. Por ejemplo, el problema $\min\{x : \ 0 \leq x \leq 1/2\}$ admite solución óptima entera pero el poliedro no es integral.

(iii) **(2 puntos)** Se tiene un problema lineal entero (P) y su relajación lineal (P_L). A (P_L) se le agrega una serie de cortes válidos y el problema resultante es infactible. Luego, (P) es infactible.
Solución: Verdadero. Como los cortes son válidos, estos no remueven soluciones enteras de (P_L). Como las soluciones de (P) están contenidas en (P_L), entonces (P) no tiene soluciones factibles.

(b) **(5 puntos)** Considere los conjuntos $S^1, S^2 \subseteq \mathbb{R}^n_+$ con $S^1 \cap S^2 \neq \emptyset$. Sean $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \cdot x_j \leq \beta^i$ cortes válidos para S^i, con $i = 1, 2$. Muestre que el corte

$$\sum_{j=1}^{n} \min\{\alpha_j^1, \ \alpha_j^2\} \cdot x_j \leq \max\{\beta^1, \beta^2\}$$

es válido para $S^1 \cap S^2$.

Solución: Notemos que todo $x \in S^1 \cap S^2$ es tal que satisface $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^1 \cdot x_j \leq \beta^1$ y $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \cdot x_j \leq \beta^2$. Luego, sumando ambos cortes, se obtiene que $x \in S^1 \cap S^2$ satisface

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^1 + \alpha_j^2) \cdot x_j \leq \beta^1 + \beta^2.$$

Por un lado, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^1 + \alpha_j^2) \cdot x_j \geq \sum_{j=1}^{n} 2 \cdot \text{mín}\{\alpha_j^1,\ \alpha_j^2\} \cdot x_j.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\beta^1 + \beta^2 \leq 2 \cdot \text{máx}\{\beta^1,\ \beta^2\}.$$

Finalmente, se concluye que $x \in S^1 \cap S^2$ satisface

$$\sum_{j=1}^{n} \text{mín}\{\alpha_j^1,\ \alpha_j^2\} \cdot x_j \leq \text{máx}\{\beta^1, \beta^2\}.$$

(c) **(4 puntos)** Un procesador de texto como TEX usa optimización para formatear un documento, dividiendo un párrafo en distintas líneas, con el fin de ajustar los márgenes y obtener un alto nivel de atractividad al leer. Suponga que un párrafo se compone de una secuencia ordenada de palabras, las cuales tienen asignadas un número único entre 1 y n. Sea c_{ij} el nivel de atractividad de una línea que comienza con la palabra i y termina con la palabra $j-1$, y la atractividad del párrafo la suma de los niveles de atractividad de cada una de sus líneas.

Explique cómo resolvería el problema de descomponer un párrafo en múltiples líneas con el fin de maximizar su atractividad, como un problema de ruta mínima o ruta más corta. Explique, también, cómo se interpreta la solución óptima al problema.

Solución: Se construye un grafo con nodos $N = \{1, \ldots, n+1\}$ para los cuales, entre cada par $(i, j) \in N \times N : i < j$, se incluye un arco con costo $-c_{ij}$. Así, se resuelve el problema de ruta mínima comenzando en el nodo 1 y finalizando en el nodo $n+1$.

Los nodos que pertenezcan a la ruta (solución) óptima indicarán qué palabras comienzan una nueva línea (a excepción de $n+1$).

Pregunta 3 (15 puntos)

Considere el problema

$$\begin{aligned}
(P) \quad \text{mín} \quad & z = x_2 - \alpha x_3 + 20 \\
\text{s.a.} \quad & -x_1 + \beta x_2 - \beta x_3 \leq 20 \\
& -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 \leq 100 \\
& x_1 \leq 0 \\
& x_2 \geq -10 \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son parámetros desconocidos.

(a) **(3 puntos)** Sea el problema:

$$
\begin{aligned}
(Q) \quad \text{mín} \quad & w = x_2' - \alpha x_3 \\
\text{s.a.} \quad & x_1' + \beta x_2' - \beta x_3 + x_4 = 20 + 10\beta \\
& 3x_1' - 4x_2' + 3x_3 + x_5 = 60 \\
& x_1' \geq 0 \\
& x_2' \geq 0 \\
& x_3 \geq 0 \\
& x_4 \geq 0 \\
& x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Muestre que (Q) es una formulación estándar equivalente de (P).

Solución:
El problema está presentado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(Q) \quad \text{mín} \quad & c^\top x \\
\text{s.a.} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Por lo que el problema está claramente escrito en forma estándar. Existe una transformación conocida para obtener las variables x_1, x_2, x_3, z, estas son: $x_1 = -x_1'$, $x_2 = x_2' - 10$ y $z = w + 10$. Por último, las primeras dos restricciones de (P) son equivalentes a las primeras dos restricciones de (Q) al sumar las variables de holguras x_4 y x_5 en el lado izquierdo.

(b) **(4 puntos)** Desde la solución $\hat{x} = (x_1', x_2', x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 20 + 10\beta, 60)$ se desea realizar una sola iteración de Simplex. Indique el rango de valores de α y β para que $\hat{x}$ sea factible, y en la nueva base, la función objetivo no empeore cuando x_3 entra a la base y la variable que debe salir de la base sea x_5.

Solución:
La base es $B = \{x_4, x_5\}$.
Luego tenemos que $A_B = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $A_N = \begin{bmatrix} 1 & \beta & -\beta \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}$
La solución actual es $\hat{x}_B = \begin{bmatrix} 20 + 10\beta \\ 60 \end{bmatrix}$. Entonces, $\hat{x}$ es factible cuando $\beta \geq -2$.
x_3 entra a la base para $\alpha \geq 0$ ya que $\bar{c}_3 = -\alpha \leq 0$
Para que x_5 salga de la base se tiene que cumplir que $-\frac{20+10\beta}{\beta} \geq 20 \rightarrow -20 - 10\beta \leq 20\beta$ para $\beta < 0$, por lo tanto, $\beta \geq -\frac{2}{3}$. Notar que si $\beta \geq 0$, entonces x_4 no puede entrar a la base. Finalmente, $\beta \geq -\frac{2}{3}$ y $\alpha \geq 0$.

Nota: No haga iteraciones, solo indique los valores de los parámetros para que sea posible la iteración.

(c) **(8 puntos)** Ahora realice la iteración del inciso (b), es decir, los parámetros α y β están dentro de un rango de valores tal que es más conveniente que la nueva base sea $B = \{x_3, x_4\}$. Actualice (de ser necesario) los rangos de valores de α y β para que la solución básica obtenida sea:

(i) Óptima. **Solución:** La nueva base es $B = \{x_3, x_4\}$.
Luego tenemos que, $A_B = \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A_B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & \beta \end{bmatrix}$ y $A_N = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

La solución es $x_B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20+10\beta\\ 60\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\ 20+30\beta\end{bmatrix}$. Notar que x_B es factible ya que se asume que $\beta \geq -\frac{2}{3}$.
Calculamos los costos reducidos:
$\bar{c}_N^\top = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\alpha & 0\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \beta & 0\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & -\frac{4\alpha}{3}+1 & \frac{\alpha}{3}\end{bmatrix}$
Por lo tanto, $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$.

(ii) No acotada. **Solución:** Calculemos $A_B^{-1}A_N = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \beta & 0\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & -4 & 1\\ 3\beta+3 & -\beta & \beta\end{bmatrix}$.
La columna de x_2' es la única candidata a tener todas sus componentes no positivas. Para que x_2' entre a la base se tiene que $\alpha > \frac{3}{4}$. Para que el problema sea no acotado, tenemos que $\beta \geq 0$.

(iii) Óptima, pero existen múltiples soluciones óptimas. **Solución:** Algún costo reducido tiene que tomar el valor de cero, esto se cumple cuando $\alpha = \frac{3}{4}$. Para encontrar una nueva base, se tiene que $-\frac{2}{3} \leq \beta < 0$. Por otro lado, existen costos reducidos iguales a cero cuando $\alpha = 0$, en este caso, $\beta \geq -\frac{2}{3}$.

(iv) Óptima degenerada. **Solución:** Se fuerza a que $20+30\beta = 0$, por lo tanto, $\beta = -\frac{2}{3}$. Para que además sea óptima se debe cumplir que, $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$.

Nota: Considere estos cuatro items de manera independiente.
Ayuda: $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$, en caso de ser útil.

Pregunta 4 (15 puntos)

a) **(7 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización no lineal con una restricción de igualdad:

$$\begin{array}{rll}\text{mín} & x_1 + x_2 & \\ \text{s.a} & x_1^2 + x_2^2 - 2 & = 0\\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}. & \end{array}$$

Plantee las condiciones de Lagrange y encuentre la solución óptima del problema planteado. ¿Se cumplen las condiciones en el óptimo? Explique por qué sí o por qué no.

Solución:

Las condiciones de Lagrange del problema propuesto corresponden a:

$$\begin{array}{rll}\frac{\partial L}{\partial x_1} = & 1 + \lambda\, 2\, x_1 & = 0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = & 1 + \lambda\, 2\, x_2 & = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = & x_1^2 + x_2^2 & = 2\end{array}$$

Restando las derivadas parciales respecto a x_1y x_2 obtenemos:

$$\lambda(x_1 - x_2) \quad = 0$$

Es fácil ver, de las condiciones de Lagrange, que λ no puede tomar un valor igual a cero. Luego todo punto crítico debe cumplir con que $x_1 = x_2$. Así, podemos despejar dos candidatos a solución óptima:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) &= (1, 1)\\ (x_1, x_2) &= (-1, -1)\end{aligned}$$

Es directo verificar que el primer punto corresponde a un máximo, y el segundo punto corresponde a un mínimo. A la vez, $(x_1, x_2) = (-1, -1)$ es la solución óptima del problema planteado, el que cumple con las condiciones de Lagrange, para un valor de $\lambda = \frac{1}{2}$.

Lo anterior ocurre ya que el dominio cumple con condiciones de regularidad.

b) **(8 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización no lineal con dos restricciones de igualdad:

$$\begin{aligned}\text{mín} \quad & -x_1 \\ \text{s.a} \quad & (1-x_1)^3 + x_2 = 0 \\ & (1-x_1)^3 - x_2 = 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Plantee las condiciones de Lagrange y encuentre la solución óptima del problema planteado. ¿Se cumplen las condiciones en el óptimo? Explique por qué sí o por qué no.

Solución:

Las condiciones de Lagrange del problema propuesto corresponden a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -1 + 3\,\lambda_1\,(1-x_1)^2 + 3\lambda_2\,(1-x_1)^2 = 0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \lambda_1 - \lambda_2 = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= (1-x_1)^3 + x_2 = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= (1-x_1)^3 - x_2 = 0\end{aligned}$$

Por inspección,podemos notar que el dominio tiene un solo punto factible, correspondiente al punto $(x_1, x_2) = (1, 0)$. Dado que esta es la única solución factible, corresponde también a la solución óptima del problema planteado.

Evaluando las condiciones de Lagrange para dicho punto, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -1 + 3\,\lambda_1\,(1-1)^2 + 3\lambda_2\,(1-1)^2 = 0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \lambda_1 - \lambda_2 = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= (1-1)^3 + 0 = 0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= (1-1)^3 - 0 = 0\end{aligned}$$

Es fácil verificar que no existen valores para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que el sistema anterior tenga solución, con lo que se concluye que el punto (1,0) no cumple las condiciones de Lagrange.

Esto ocurre ya que el punto analizado es un punto singular, en el cual los gradientes de las restricciones son linealmente dependientes.

Tabla de dualidad:

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas