PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2015
Profesores: S.Encina - G.Angulo - D.Pozo
J.Vera - A.Cataldo - R.Cuadrado

Solución Tarea 4

Fecha de Entrega: 23 de Noviembre.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos con los que se trabaja en el proyecto semestral.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así **cuatro** grupo de hojas el día de la entrega (se deben entregar todas las preguntas, incluso si no se desea desarrollar alguna[2])
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día lunes 23 de Noviembre a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con la **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso, además de las otras sanciones que establezca la Dirección de la Escuela, la cual será informada de la situación.

Problema 1. (26 puntos)

a) (3 puntos) Diseñe una red $G(N, A)$ en que, para determinar el flujo máximo utilizando el algoritmo de Ford & Fulkerson, se requieran tantas iteraciones como arcos existan.

b) (3 puntos) Determine las condiciones de optimalidad de Simplex para el problema de ruta más corta. Sea explícito en su determinación.

c) (7 puntos) Considere el problema de una persona que puede consumir dos bienes: dulces y chocolates. El costo de un dulce en el mercado es de c_1 y el costo de un chocolate es c_2, ambos estrictamente positivos. El presupuesto de esta persona para comprar estos bienes es de $P > 0$, y el beneficio que obtiene por el consumo de ambos bienes se puede representar por la función $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, donde x_1 y x_2 representan la cantidad consumida de dulces y chocolates respectivamente. El siguiente problema corresponde al de maximizar el beneficio sujeto a respetar el presupuesto:

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] En este caso, entregar una hoja en blanco con el número de la pregunta y el número del grupo indicados claramente.

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & f(x_1, x_2) \\ \text{s.a.} & c_1 x_1 + c_2 x_2 \leq P \end{array}$$

i) (2 puntos) Bajo el supuesto de que el presupuesto se consume en su totalidad, es decir, $c_1 x_1 + c_2 x_2 = P$, plantee el problema como un modelo de optimización irrestricto sobre x_2. Para el modelo planteado, estudie las condiciones de primer y segundo orden.

ii) (2 puntos) Demuestre formalmente que el problema de la parte (i) tiene solución.

iii) (3 puntos) Para el problema (i), aplique el Método del Gradiente (o del máximo descenso) para encontrar el óptimo utilizando como punto de partida $x_2 = 0$. Considere $P = 2$ y $c_1 = c_2 = 1$.

d) (7 puntos) Considere la función:

$$f(x) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \exp(x_i)\right)$$

i) (2 puntos) Muestre que la función $\exp(\cdot)$ es convexa en $\mathbb{R}$ y que $\ln(\cdot)$ es cóncava en su dominio.

ii) (3 puntos) Dado $x \in \mathbb{R}^n$, demuestre que la matriz hessiana de f en x, la cual será denotada por $H_f(x)$, puede ser expresada como

$$H_f(x) = \exp(-2f(x))[\exp(f(x))diag(z) - zz^T]$$

donde z es el vector columna cuyas componentes están dadas por $z_i = \exp(x_i)$, y $diag(a)$ es la matriz que tiene al vector a en su diagonal y 0 en el resto de sus componentes.

iii) (3 puntos) Demuestre que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, se cumple:

$$v^T H_f(x) v = \exp(-2f(x)) \left[\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{i=1}^{n} v_i^2 z_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i z_i\right)^2\right]$$

Concluya, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz ($(a^T b)^2 \leq a^T a \cdot b^T b$), que la función f es convexa en $\mathbb{R}^n$.

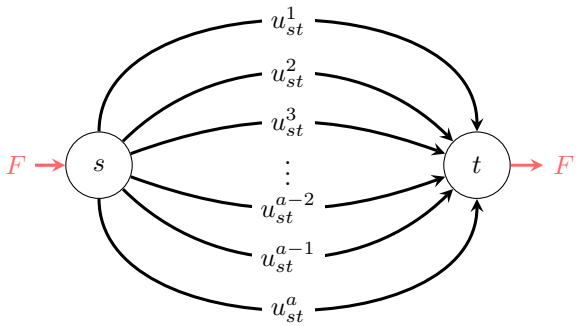
e) (5 puntos) Considere una red $G(N, A)$, al cual se puede aplicar el algoritmo de Dijkstra regular, para la ruta óptima desde un nodo origen $s \in N$ a un nodo destino $t \in A$.

i) (2 puntos) ¿Cómo modificaría el algoritmo de Dijsktra para determinar la manera óptima de ir desde todos los nodos hacia un nodo destino t, ejecutando el algoritmo una sola vez?

ii) (3 puntos) Sea $G(N, A_1)$ el árbol de rutas óptimas obtenido al aplicar el algoritmo Dijkstra regular comenzando desde un nodo origen s hacia todos los nodos, y sea $G(N, A_2)$ el árbol de rutas óptimas obtenido al aplicar el algoritmo Dijkstra modificado para (i). Muestre o refute si la intersección entre los arcos A_1 y A_2 corresponderá a la ruta óptima entre s y t. Para su demostración suponga soluciones únicas.

Solución Problema 1.

a) Un grafo con esas características puede ser un grafo con $|A| = a$ arcos que unan el origen con el destino, como el grafo a continuación:



Así, la capadidad de la red será $\sum_{i=1}^{n} u_{st}^{i}$, y se logrará terminar el algoritmo en n iteraciones.

b) El problema de ruta mínima puede modelarse de la siguiente manera, muy similar al problema de flujo a costo mínimo:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a.} \quad &\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{i:(i,j)\in A} x_{ij} \quad = \begin{cases} 1 & \text{si } i = s \\ -1 & \text{si } i = t \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual del problema anterior es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \pi_t - \pi_s \\ \text{s.a.} \quad & \pi_i - \pi_j \quad \leq d_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

Así, para cualquier solución factible dual y, los costos reducidos deben ser tal que

$$\bar{d_{ij}} = d_{ij} - \pi_i + \pi_j \geq 0$$

para que la solución sea óptima.

c) i) Despejando $x_1 = \dfrac{P - c_2 x_2}{c_1}$ y reemplazando en la función objetivo, el problema irrestricto queda de la siguiente manera:

$$\text{máx}\, g(x_2) = \frac{Px_2 - c_2 x_2^2}{c_1}$$

Estudiamos la condición de primer orden:

$$\frac{dg(x_2)}{dx_2} = \frac{P - 2c_2 x_2}{c_1}$$

Igualando a 0, se obtiene el candidato a óptimo:

$$x_2 = \frac{P}{2c_2} \qquad x_1 = \frac{P}{2c_1}$$

Estudiamos la condición de segundo orden:

$$H_g(x_2) = g''(x_2) = -\frac{2c_2}{c_1}$$

Como vemos, $H_g(x) < 0\ \forall x_2$. En particular, también para $x_2 = \frac{P}{2c_2}$. Luego, el candidato a óptimo encontrado es efectivamente un máximo.

ii) El problema es equivalente a:

$$\text{mín}\, h(x_2) = \frac{-Px_2 + c_2 x_2^2}{c_1}$$

Analizando

$$\lim_{\|x_2\| \to \infty} h(x_2) = \infty$$

La función $h(x_2)$, por el teorema de la hipótesis H, dado el vector de escape indicado, permite admite alguna solución.

iii) Para los datos entregados, el problema irrestricto de una variable queda:

$$\text{máx}\ (2 - x_2)x_2$$

Aplicamos el método del Gradiente:

- ◇ Inicialización: $x_2^0 = 0$. $\nabla f(x_2^0) = 2$.
- ◇ Dirección de crecimiento: $d^0 = 2$, no estamos en el óptimo. Seguimos iterando.
- ◇ Determinar el tamaño del paso:

  Se debe resolver $\text{máx}_{h>0}\ f(x_2^0 + h^0 d^0) = \text{máx}_{h>0}\ \ 2 \cdot 2h - (2h)^2$.

  Como es un problema de una variable, derivamos e igualamos a cero:

$$4 - 8h = 0 \to h = \frac{1}{2}$$

- ◇ Calculamos el siguiente punto:

$$x_2^1 = x_2^0 + h^0 d^0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

- ◇ Verificamos que $\nabla f(x_2^1) = 0$. Luego, estamos en el óptimo.

d) i) Definimos $f(x) = \exp(x)$, luego $f''(x) = \exp(x)$ y $g(x) = \ln(x)$, luego $g''(x) = \frac{-1}{x^2}$.
Como $f''(x) \geq 0\ \forall x$ y $g''(x) \leq 0\ \forall x > 0$, se tiene que $f(x)$ es convexa y $g(x)$ es cóncava.

ii) Notemos que

$$\exp(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \exp(x_i) \qquad \text{y que} \qquad \exp(-2f(x)) = \frac{1}{\exp(f(x))^2} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \exp(x_i)\right)^2}$$

Sea $g(x) \doteq \exp(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \exp(x_i)$.
Además, para facilitar notación,

$$1^T z = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$$

y:

$$zz^T = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ \vdots \\ e^{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_1} & \cdots & e^{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x_1} & \cdots & e^{x_1+x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{x_n+x_1} & \cdots & e^{2x_n} \end{pmatrix}$$

Luego, $[zz^T]_{jk} = e^{x_j} e^{x_k}$ y $[zz^T]_{jj} = e^{2x_j}$.
Por lo tanto, reemplazando en $H_f(x) = \frac{1}{g(x)^2} \cdot \left((1^T z) diag(z) - zz^T\right)$, lo que se quiere demostrar es que

$$H_{jk} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (e^{x_i} \cdot 0) - e^{x_k} e^{x_j}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)^2} = \frac{-e^{x_k} e^{x_j}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)^2}$$

y que

$$H_{jj} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (e^{x_i} e^{x_j}) - e^{2x_j}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)^2}$$

Por otro lado, derivamos f respecto a x_j:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \frac{e^{x_j}}{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}}$$

Volvemos a derivar y obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$H_{jk} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_j} = -e^{x_j} \frac{e^{x_k}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)^2}$$

y

$$H_{jj} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} = \frac{e^{x_j} \sum_{i=1}^{n} (e^{x_i}) - e^{x_j} e^{x_j}}{\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)^2}$$

Con lo cual, finalmente queda demostrado.

iii) Usando (ii):

$$\begin{aligned} v^T H_f(x) v &= v^T \frac{1}{g(x)^2} \cdot \left((1^T z) diag(z) - z z^T\right) v \\ &= \frac{1}{g(x)^2} \cdot \left(v^T (1^T z) diag(z) v - v^T z z^T v\right) \\ &= \frac{1}{g(x)^2} \cdot \left((1^T z) v^T diag(z) v - v^T z z^T v\right) \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} v^T diag(z) v &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 e^{x_1} \\ \vdots \\ v_n e^{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \\ &= v_1^2 e^{x_1} + v_2^2 e^{x_2} + \cdots + v_n^2 e^{x_n} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 e^{x_i} \end{aligned}$$

Además,

$$v^T z z^T v = (v^T z)(v^T z)^T = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i e^{x_i}\right)^2$$

Luego,

$$\begin{aligned} v^T H_f(x) v &= \frac{1}{g(x)^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 e^{x_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i e^{x_i}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{g(x)^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \sum_{i=1}^{n} v_i^2 z_i - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i z_i\right)^2\right) \end{aligned}$$

Por último, definiendo $a_i = v_i\sqrt{z_i}$ y $b_i = \sqrt{z_i}$,

$$(a^T b) = \sum_{i=1}^{n} v_i e^{x_i} \qquad (a^T a) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 e^{x_i} \qquad (b^T b) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e^{x_i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i^2 e^{x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i^2 e^{x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i e^{x_i}\right)^2$$

Luego, como $\frac{1}{g(x)^2} > 0$,

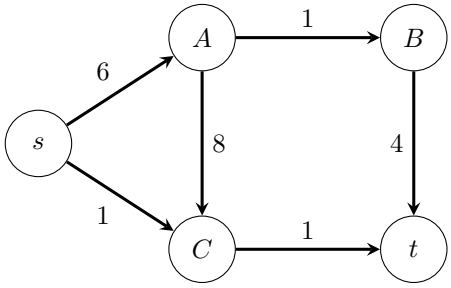
$$v^T H_f(x) v = \frac{1}{g(x)^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 e^{x_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i e^{x_i}\right)^2\right) \geq 0$$

Así, $H_f(x)$ es definida positiva. Luego, $f(x)$ es convexa.

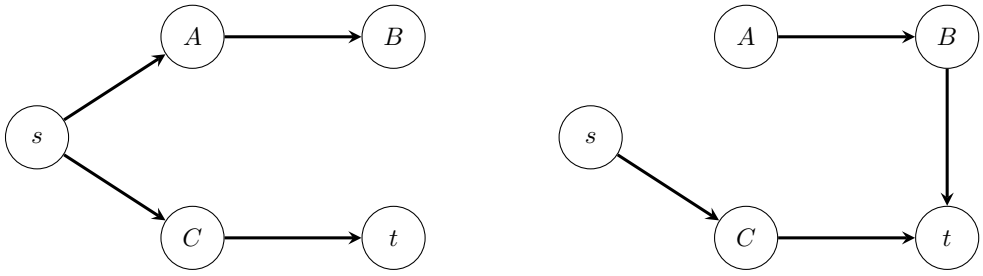
e) i) Basta con hacer dos opciones equivalentes:

- ◇ Una opción es invertir cada arco del problema y ejecutar el algoritmo de Dijkstra desde t hasta que todos los nodos se encuentren visitados. Sin embargo, este método modifica la red.
- ◇ Otra opción es ejecutar el algoritmo de Dijkstra de tal manera que, al ubicarse en un nodo, se verifique la información de todos los nodos **que llevan al nodo** actual de iteración. Este método podría utilizarse para no modificar la red.

ii) Se puede construir un contraejemplo para demostrar que esto no se cumple siempre. Sea el siguiente grafo:



cuyos árboles A_1 y A_2 se encuentran a la izquierda y a la derecha a continuación, respectivamente.



Claramente la intersección de A_1 con A_2 devuelve los arcos de la ruta mínima entre el nodo s y el nodo t, pero también retorna el arco (A, B) como parte de la intersección, el que no pertenece a la ruta mínima entre el nodo s y el nodo t. Luego, lo enunciado no se cumple siempre.

Problema 2. (24 puntos)

a) (8 puntos) Considere la red entregada por la siguiente información en que cada componente se refiere a la distancia por arco:

$$C = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 9 & 20 & 16 & 15 & \infty \\ \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 1 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

i) (1 punto) Grafique la red del problema.

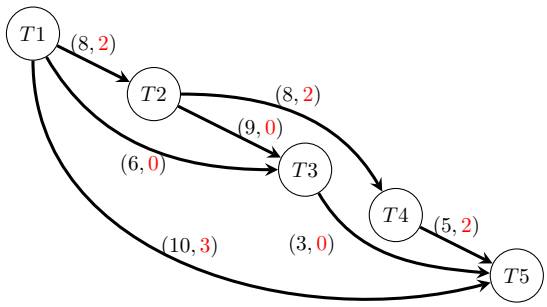
ii) (3 puntos) Determine la ruta más corta del problema para ir de A a F, utilizando el algoritmo de Dijkstra. Indique claramente el árbol de rutas óptimas.

iii) (2 puntos) Sin resolver el algoritmo nuevamente, ¿qué ocurre con la ejecución del algoritmo si la distancia del tramo $A - E$ (c_{AE}) disminuye a 12? ¿Y con el árbol óptimo? ¿Y la distancia óptima para llegar a E?

iv) (2 puntos) Sin resolver el algoritmo nuevamente, ¿qué ocurre con la ejecución del algoritmo si la distancia del tramo $D - F$ (c_{DF}) aumenta en 3 unidades? ¿Y con la ruta óptima hasta F? ¿Y la distancia óptima para llegar a F?

b) (11 puntos) En primavera, el sur de Chile presenta siempre el mismo problema: el deshielo. El grafo a continuación presenta los distintos ríos que se forman a partir de un volcán al sur (Nodo $T1$), que se cruzan en distintas ubicaciones geográficas (Nodos $T2, T3, T4$) hasta desembocar en el mar (Nodo $T5$). Sin embargo, los ríos se encuentran cerca de diversas ciudades, y la Onemi quiere evitar que los ríos se desborden. Han estimado diversos números que podrían representar la cantidad de agua que podría pasar por cada río antes de que se desborde.

La Onemi ha mapeado la situación en el grafo a continuación. Cada arco presenta las etiquetas (u_{ij}, f_{ij}), en que f_{ij} es la cantidad de nieve derretida que fluye actualmente (lo menos que se ha visto en la temporada), y u_{ij} indica cuánta nieve derretida puede aguantar un río sin desbordarse. Se pretende estimar cuánta nieve (en términos de sus estimadores) puede caer para que no exista emergencia en ninguna ciudad aledaña a un río.



i) (2 puntos) Encuentre una cota superior y una cota inferior para la cantidad de nieve que puede derretirse en total sin desbordamientos, utilizando solamente la información proporcionada. Justifique sus números.

ii) (2 punto) Identifique la red residual para la situación actual para poder determinar cuáles son los ríos que tienen más holgura.

iii) (3 puntos) Ayude a la Onemi y utilice el algoritmo de Ford & Fulkerson para encontrar la cantidad de nieve (en términos de los estimadores presentados) que puede recibir el volcán en cuestión.

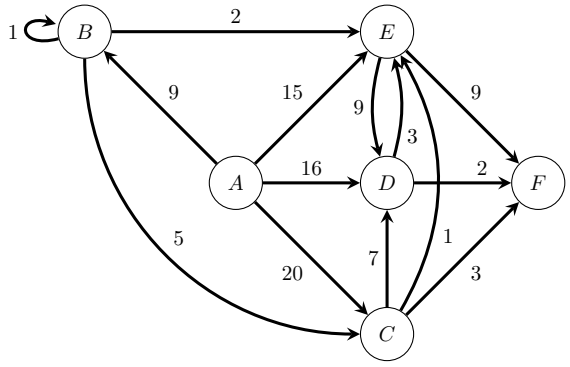
iv) (2 puntos) Basándose en la respuesta obtenida en la parte (iii), indique los ríos más críticos de la región, e indique cuánta agua (en los mismos términos) pueden resistir.

v) (2 puntos) La Onemi le pregunta cuáles serían **los dos** ríos a los que usted haría trabajos para aumentar la capacidad en la mayor cantidad posible. ¿Cuál sería su respuesta?

c) (5 puntos) Miguel Ponce quiere armar una nueva selección sub 17 de fútbol. Para eso, escribió una lista con sus 40 jugadores favoritos, de los cuales debe elegir 21 convocados para el próximo encuentro. Necesita 3 arqueros, entre 3 y 5 delanteros, entre 4 y 6 defensores, 3 volantes por izquierda, 3 volantes por derecha y 3 cincos. Por otra parte, los clubes no están dispuestos a ceder a la selección más de dos jugadores. Modele el problema de Miguel como un grafo que permita resolver un problema a flujo máximo.

Solución Problema 2.

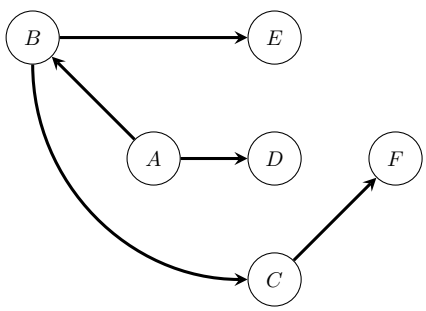
a) i) El grafo a continuación representa la información entregada por la matriz. El nodo A es el nodo origen y el nodo F es el nodo destino. Los arcos con costo ∞ se pueden colocar o no, dado que nunca se seleccionarían para ser utilizados.



ii) El desarrollo del algoritmo se presenta en la tabla a continuación. En ella, • indica el nodo que está siendo cerrado en cada iteración, luego de actualizar las etiquetas correspondientes. En color verde se indican las etiquetas actualizadas por iteración. El conjunto V indica los nodos que ya están cerrados en después de cada iteración, en orden de cierre.

Iteración	(d_A, p_A)	(d_B, p_B)	(d_C, p_C)	(d_D, p_D)	(d_E, p_E)	(d_F, p_F)	V
0	$(0, A)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$\emptyset$
1	•	$(9, A)$	$(20, A)$	$(16, A)$	$(15, A)$	$(\infty, -)$	$\{A\}$
2		•	$(14, B)$	$(16, A)$	$(11, B)$	$(\infty, -)$	$\{A, B\}$
3			$(14, B)$	$(16, A)$	•	$(20, E)$	$\{A, B, E\}$
4			•	$(16, A)$		$(17, C)$	$\{A, B, E, C\}$
5				•		$(17, C)$	$\{A, B, E, C, D\}$
6						•	$\{A, B, E, C, D, F\}$

El árbol de rutas óptimas se presenta a continuación:



Y la ruta óptima para llegar al nodo F desde A es $A - B - C - F$, con un costo de 17.

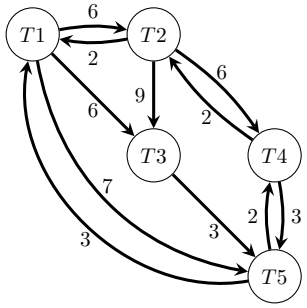
iii) El algoritmo se ve modificado, pues en la primera iteración, $(d_E, p_E) = (12, A)$. Sin embargo, en la segunda iteración su etiqueta volverá a ser modificada y el algoritmo se mantendrá tal como en (i). Por lo mismo, el árbol óptimo no se ve afectado. Además, la distancia total para llegar a E tampoco cambia.

iv) El algoritmo no se ve modificado. Así, el árbol óptimo no se ve modificado, ni la solución óptima.

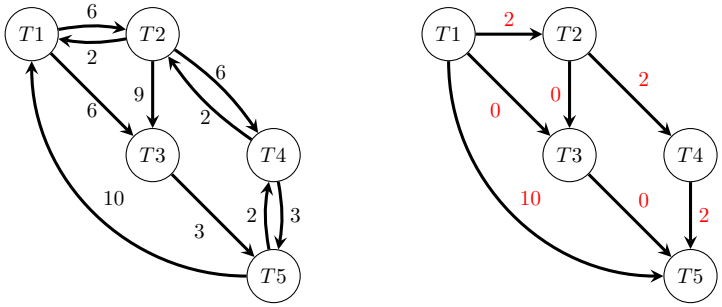
b) i) La mejor cota inferior disponible hasta ahora es el flujo de nieve que está ocurriendo actualmente: 5. Una cota superior cualquier sería cualquier corte que separe los nodos T_1 con el T_5. Por ejemplo, $S = \{T_1, T_2\}$ y $\bar{S} = \{T_3, T_4, T_5\}$. La capacidad de este corte es de 33 unidades de nieve.
Así,

$$5 \leq F^* \leq 33$$

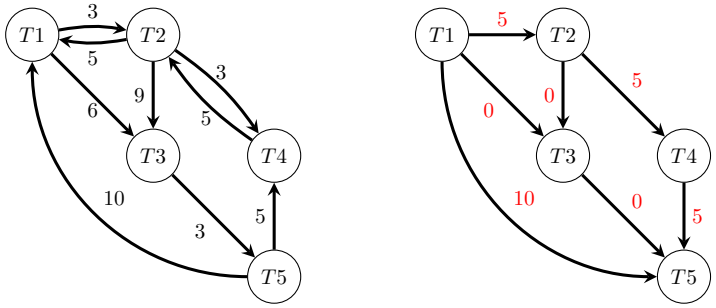
ii) La red residual es la que se presenta a continuación:



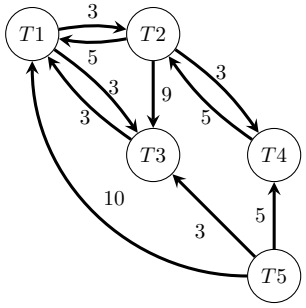
iii) Sobre la red residual de (ii), encontramos una ruta incremental. Esta ruta podría ser la ruta $T1-T5$. La capacidad de esta ruta es de $\Delta f_1 = 7$. La nueva red residual y el nuevo flujo actual por cada arco se presentan a continuación, respectivamente a la izquierda y a la derecha.

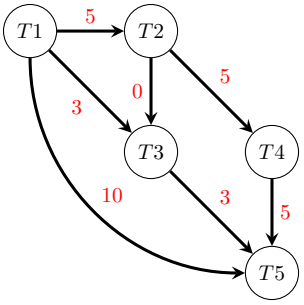


Sobre esta nueva red residual, encontramos una ruta incremental. Esta ruta podría ser la ruta $T1-T2-T4-T5$. La capacidad de esta ruta es de $\Delta f_2 = 3$. La nueva red residual y el nuevo flujo actual por cada arco se presentan a continuación, respectivamente a la izquierda y a la derecha.



Todavía podemos encontrar una ruta incremental sobre la nueva red residual. Esta ruta podría ser la ruta $T1 - T3 - T5$. La capacidad de esta ruta es de $\Delta f_2 = 3$. La nueva red residual y el nuevo flujo actual por cada arco se presentan a continuación, respectivamente a la izquierda y a la derecha.



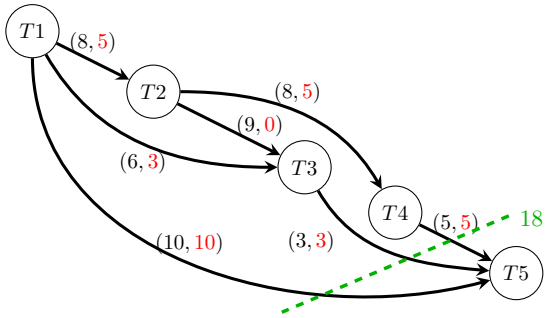


Ya no existen rutas incrementales sobre la nueva red residual. Por lo tanto, el algoritmo de Ford & Fulkerson termina de iterar. La cantidad de nieve derretida que puede caer como máximo en el volcán sería de $7+3+3$ más que lo que ya está derritiéndose actualmente (5). Es decir, la cantidad de nieve que pueden soportar los ríos (F^*) es de

$$F^* = 5 + 7 + 3 + 3 = 18$$

unidades.

iv) Como se encontró en la parte (iii), el flujo máximo que pueden trasportar los ríos es de 18 unidades. Así, se puede observar que los ríos más críticos (los que siempre primero se saturarán) son los que van desde el volcán a la desembocadura, desde la ciudad $T3$ a la desembocadura ($T5$) y desde la ciudad $T4$ a la desembocadura ($T5$). El corte se presenta a continuación:



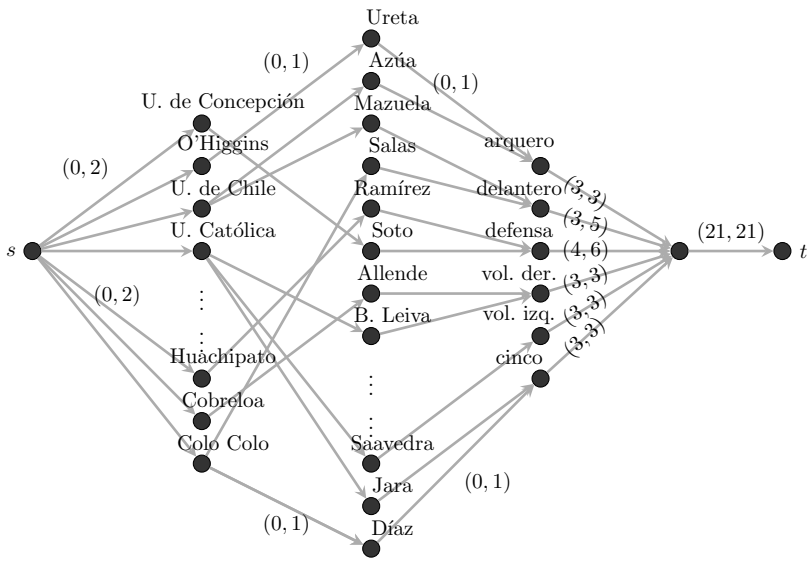
v) Podría aumentarse la capacidad de cualquier río perteneciente al corte identificado en (iv) para aumentar el flujo máximo. Sin embargo, el que más podría aumentarse en primer lugar claramente es el río que va directamente desde el Volcán ($T1$) hacia la desembocadura ($T5$).

El siguiente río que convendría aumentar lo más posible sería el río que va desde $T3$ hacia la desembocadura ($T5$). La cantidad en que se podría aumentar podría ser de 6 unidades, saturando los arcos $T1-T3$ y $T1-T2$.

c) Sea J el conjunto de jugadores, C el conjunto de clubes y P el conjunto de posiciones. El modelo considera 3 (nodo origen, destino y auxiliar) $+ |J| + |C| + |P|$ nodos.

- ◇ Del nodo origen van arcos a cada uno de los clubes, con capacidades $(l_{ij}, u_{ij}) = (0, 2)$, que determinarán cuántos jugadores está aportando el club j.
- ◇ De cada uno de los clubes, sale un arco hacia cada jugador perteneciente a ese club, con capacidades $(l_{ij}, u_{ij}) = (0, 1)$, que determinará si el jugador j fue seleccionado o no.
- ◇ De cada uno de los jugadores, sale un arco hacia la posición a la que corresponde ese jugador, con capacidades $(l_{ij}, u_{ij}) = (0, 1)$.
- ◇ De cada una de las posiciones, sale un arco hacia el nodo auxiliar, con capacidades acorde a las condiciones del Diego. Esto es, para el arquero $(l_{ij}, u_{ij}) = (3, 3)$, para el delantero $(l_{ij}, u_{ij}) = (3, 5)$, para el defensor $(l_{ij}, u_{ij}) = (4, 6)$, para el volante derecho $(l_{ij}, u_{ij}) = (3, 3)$ para el volante izquierdo $(l_{ij}, u_{ij}) = (3, 3)$ y para los cincos $(l_{ij}, u_{ij}) = (3, 3)$.
- ◇ Finalmente, el nodo auxiliar va conectado con el nodo destino con un arco de capacidades $(l_{ij}, u_{ij}) = (21, 21)$, asegurando que pasarán exactamente 21 unidades de flujo o jugadores.

El grafo sería, ejemplificado, algo así, en que cada arco indica (l_{ij}, u_{ij}):



Problema 3. (20 puntos)

a) (11 puntos) Considere el problema:

$$\begin{array}{lrcll} \text{mín} & (x-4)^2 + (y-8)^2 & & & \\ \text{s.a.} & x + (y/2 - 2)^3 & \leq & 3 & \\ & \frac{3}{5}x^2 + y & \leq & \frac{42}{5} & \\ & 2x - y & \leq & 3 & = b_3 \\ & x, y & \geq & 0 & \end{array}$$

i) (2 puntos) Encuentre gráficamente la solución óptima. ¿Es punto regular?

ii) (2.5 puntos) Compruebe analíticamente que la solución encontrada en (i) cumple las condiciones de KKT.

iii) (1 punto) Compruebe gráficamente que la solución encontrada en (i) cumple las condiciones de KKT.

iv) (1.5 puntos) Indique qué ocurre si la segunda restricción fuese $\frac{3}{5}x^2 + y \leq 8$ ó $\frac{3}{5}x^2 + y \leq 9$. Dé una aproximación al valor objetivo óptimo dado el cambio y comente su resultado.

v) (4 puntos) Considere que b_3 ahora vale -2. Repita (i)(0.5 punto), (ii)(1.5 puntos), y (iv)(2 puntos).

b) (9 puntos) La empresa fabricante de aviones POING, lo ha contratado a ud. como gerente de producción. La compañía actualmente tiene compromisos de entregar D_k aviones el mes k ($k \in \{1, \ldots, K\}$).

La planta tiene capacidad para fabricar en un mes, el número de aviones que convenga. Además, puede guardar aeronaves para satisfacer los compromisos de meses siguientes. Guardar un avión durante un mes tiene un costo de h u.m. Por otro lado, no se incurre en ningún gasto de inventario si un producto terminado es fabricado y entregado en el mismo mes. Suponga que el avión se entrega siempre al final de cada mes.

Al comienzo de este periodo de K meses la planta no tiene aviones en inventario y al final tampoco debe tenerlos. Como regla de operación la compañía no fabrica aviones si le quedan en bodega.

El costo total de fabricar i aviones en el mes k es C_{ik}. El problema al que se ve enfrentado ud., como gerente de la compañía es determinar cuánto se debe fabricar en cada mes, de manera de minimizar los costos de fabricación y de inventario, cumpliendo con los compromisos de entrega. Para ello, responda las siguientes preguntas.

i) (1.5 puntos) ¿Por qué este problema es susceptible a ser abordado por un enfoque de programación dinámica?

ii) (2.5 puntos) Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables de decisión, variables de estado y funciones de beneficio.

iii) (2.5 puntos) Suponga ahora que $K = 4$, $h = {}^1/_{10}$, $D_k = 1\ \forall k$, y que los costos C_{ik} están dados por la siguiente tabla:

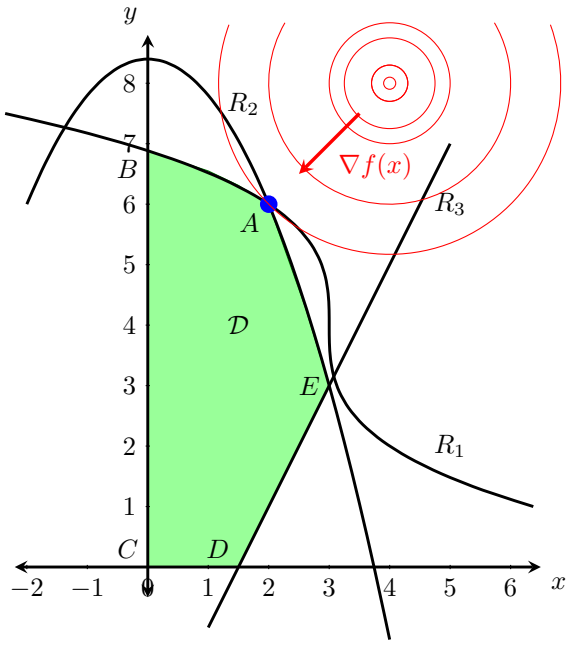
	Cantidad a fabricar			
Mes	1	2	3	4
1	5	10	15	17
2	6	9	12	–
3	6	7	–	–
4	3	–	–	–

Con esta información, encuentre la política óptima de producción, usando el modelo planteado en (ii). Explicite claramente las funciones de beneficio y las decisiones óptimas en cada una de las etapas de la programación.

iv) (2.5 puntos) Suponga ahora que el dueño de la compañía desea incentivar a sus trabajadores. Para esto, entregará un premio (que se distribuirá entre todos los trabajadores) cada vez que un nuevo avión es terminado. Este premio dependerá del número total de aviones producidos hasta el momento y del mes en el cual se fabrica. Así, tiene un valor $R(n, k)$ si el $n-$ésimo avión es fabricado en el mes k. Reformule el modelo de la parte (ii) para esta nueva situación.

Solución Problema 3.

a) i) El gráfico se presenta a continuación, en que $A = (2, 6), B = (0, 6{,}884), C = (0, 0), D = ({}^3/_2, 0), E = (3, 3)$.Las curvas de nivel se indican en color rojo, y el vector rojo indica la dirección del **aumento** de las curvas de nivel $\nabla f(x)$.



El punto óptimo es el punto $A = (2, 6)$ (intersección entre las restricciones 1 y 2), con valor óptimo $z^* = 8$.

Para verificar si el punto (2,6) es regular o no, lo primero es determinar el Jacobiano de las restricciones:

$$J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2}(\frac{y}{2}-2)^2 \\ \frac{6x}{5} & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

En el punto en cuestión, el Jacobiano de las restriccinoes que son activas únicamente es:

$$J(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & {}^{3}\!/_{2} \\ {}^{12}\!/_{5} & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior es de rango máximo y, por tanto, el punto en cuestión es regular.

ii) Para chequear si cumple con las condiciones de KKT, en primer lugar construimos el Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (x-4)^2 + (y-8)^2 + \mu_1(x + ({}^{y}\!/_{2} - 2)^3 - 3) + \mu_2(\frac{3}{5}x^2 + y - \frac{42}{5}) + \mu_3(2x - y - 3)$$

Y las condiciones de KKT asociadas a él son las 15 que siguen:

i)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$	$=$	$2(x-4) + \mu_1 + \frac{6}{5}\mu_2 x + 2\mu_3$	$\geq$	0
ii)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$	$=$	$2(y-8) + \frac{3}{2}\mu_1(\frac{y}{2}-2)^2 + \mu_2 - \mu_3$	$\geq$	0
iii)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1}$	$=$	$x + ({}^{y}\!/_{2} - 2)^3 - 3$	$\leq$	0
iv)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2}$	$=$	$\frac{3}{5}x^2 + y - \frac{42}{5}$	$\leq$	0
v)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3}$	$=$	$2x - y - 3$	$\leq$	0
vi)	$x\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$	$=$	$x\left(2(x-4) + \mu_1 + \frac{6}{5}\mu_2 x + 2\mu_3\right)$	$=$	0
vii)	$y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$	$=$	$y\left(2(y-8) + \frac{3}{2}\mu_1(\frac{y}{2}-2)^2 + \mu_2 - \mu_3\right)$	$=$	0
viii)	$\mu_1\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1}$	$=$	$\mu_1\left(x + ({}^{y}\!/_{2} - 2)^3 - 3\right)$	$=$	0
ix)	$\mu_2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2}$	$=$	$\mu_2\left(\frac{3}{5}x^2 + y - \frac{42}{5}\right)$	$=$	0
x)	$\mu_3\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3}$	$=$	$\mu_3(2x - y - 3)$	$=$	0
xi)			x	$\geq$	0
xii)			y	$\geq$	0
xiii)			μ_1	$\geq$	0
xiv)			μ_2	$\geq$	0
xv)			μ_3	$\geq$	0

Como sabemos que $x \neq 0$, entonces, (vi) necesariamente resulta $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$. Así, también, en la ecuación (vii) y como $y \neq 0$, entonces $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$. Así, usando también la ecuación x), podemos construir un sistema de 3x3:

(a)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$	$=$	$x\left(2(x-4) + \mu_1 + \frac{6}{5}\mu_2 x + 2\mu_3\right)$	$=$	0
(b)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$	$=$	$y\left(2(y-8) + \frac{3}{2}\mu_1(\frac{y}{2}-2)^2 + \mu_2 - \mu_3\right)$	$=$	0
(c)	$\mu_1\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3}$	$=$	$\mu_3\left(2x - y - 3\right)$	$=$	0

Resolvemos considerando que el óptimo es $(x, y) = (3, 4)$.
De (c) sale que $\mu_3 = 0$. Luego, resolviendo el sistema, $\mu_1 = \frac{28}{13}$ y $\mu_2 = \frac{10}{13}$.

Luego, es posible verificar que el punto óptimo $\vec{x^*} = (x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 6, \frac{28}{13}, \frac{10}{13}0,)$ efectivamente cumple con todas las condiciones KKT.

iii) Las condiciones anteriores indican que el negativo del gradiente de la función objetivo es posible construirla como una combinación lineal de las restricciones activas en el punto (2,6).

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-4) \\ 2(y-8) \end{pmatrix} \qquad \nabla f(2, 6) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

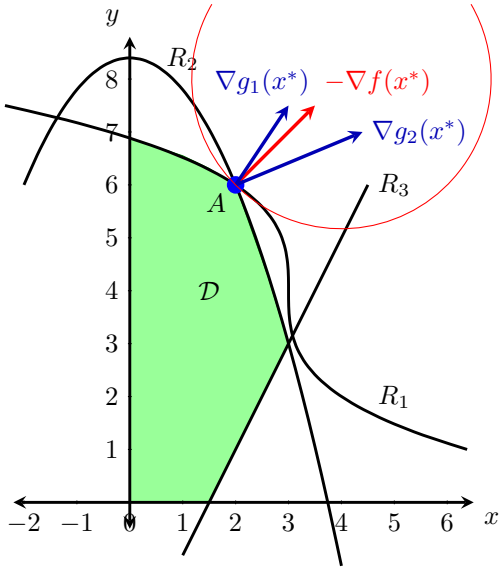
$$\nabla g_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}(\frac{y}{2}-2)^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1(2, 6) = \begin{pmatrix} 1 \\ {}^{3}\!/_{2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} {}^{6x}/_{5} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(2,6) = \begin{pmatrix} {}^{12}/_{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así:

$$-\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{28}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ {}^{3}/_{2} \end{pmatrix} + \frac{10}{13}\begin{pmatrix} {}^{12}/_{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Graficando estos vectores desde el punto (2,6), queda:



iv) Sabemos que el multiplicador asociado a la tercera restricción (μ_2) indica justamente el valor de una unidad de los recursos correspondientes a ella. Es decir, indica cuánto mejor es la función objetivo si se dispone de una unidad más en b_2.

El valor de la función objetivo en el óptimo es 8. Luego, para representar el cambio en la función objetivo:

- ◇ Si la restricción es $\frac{3}{5}x^2 + y \leq 8$, sabemos que el cambio en la función objetivo es aproximadamente igual a:

$$\Delta f = -\mu_2 \Delta b = -\frac{10}{13} \cdot (8 - 8{,}4) = 0{,}3077$$

Y, por lo tanto, el nuevo valor óptimo va a ser aproximadamente igual a

$$f^{*'} = 8 + 0{,}3077 = 8{,}3077$$

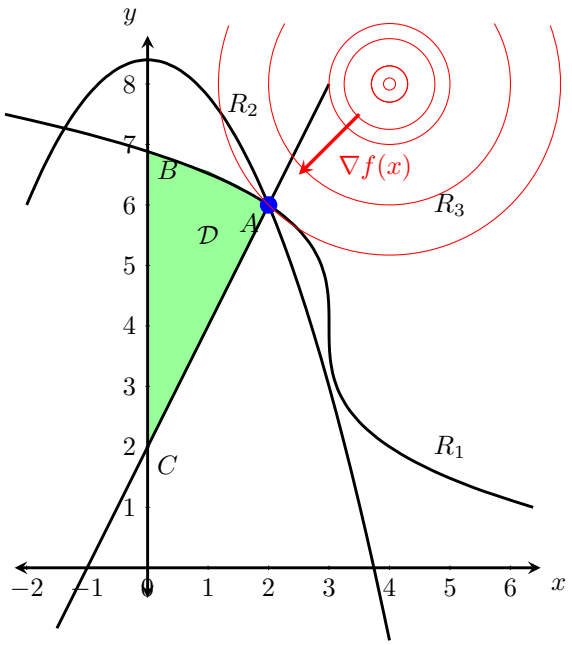
- ◇ Si la restricción es $\frac{3}{5}x^2 + y \leq 9$, sabemos que el cambio estimado en la función objetivo es aproximadamente igual a:

$$\Delta f = -\mu_1 \Delta b = -\frac{10}{13} \cdot (9 - 8{,}4) = -0{,}4615$$

Y, por lo tanto, el nuevo valor óptimo va a ser aproximadamente igual a

$$f^{*''} = 8 - 0{,}4615 = 15{,}5384$$

v) iv.i) Siguiendo la misma notación que el problema (i), gráficamente su óptimo se encuentra en A.



Ese punto es un punto degenerado, pues corresponde a la intersección de las restricciones 1, 2 y 3:

$$x + (y/2 - 2)^3 = 3 \quad \wedge \quad \frac{3}{5}x^2 + y = \frac{42}{5} \quad \wedge \quad 2x - y = -2$$
$$(x, y) = (2, 6)$$

iv.ii) Para chequear si cumple con las condiciones de KKT, en primer lugar construimos el Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (x-4)^2 + (y-8)^2 + \mu_1(x + (y/2 - 2)^3 - 3) + \mu_2(\frac{3}{5}x^2 + y - \frac{42}{5}) + \mu_3(2x - y + 2)$$

Y las condiciones de KKT asociadas a él son las 15 que siguen:

i)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$	$=$	$2(x-4) + \mu_1 + \frac{6}{5}\mu_2 x + 2\mu_3$	$\geq$	0
ii)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$	$=$	$2(y-8) + \frac{3}{2}\mu_1(\frac{y}{2} - 2)^2 + \mu_2 - \mu_3$	$\geq$	0
iii)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1}$	$=$	$x + (y/2 - 2)^3 - 3$	$\leq$	0
iv)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2}$	$=$	$\frac{3}{5}x^2 + y - \frac{42}{5}$	$\leq$	0
v)	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3}$	$=$	$2x - y + 2$	$\leq$	0
vi)	$x\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$	$=$	$x\left(2(x-4) + \mu_1 + \frac{6}{5}\mu_2 x + 2\mu_3\right)$	$=$	0
vii)	$y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$	$=$	$y\left(2(y-8) + \frac{3}{2}\mu_1(\frac{y}{2} - 2)^2 + \mu_2 - \mu_3\right)$	$=$	0
viii)	$\mu_1\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1}$	$=$	$\mu_1\left(x + (y/2 - 2)^3 - 3\right)$	$=$	0
ix)	$\mu_2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2}$	$=$	$\mu_2\left(\frac{3}{5}x^2 + y - \frac{42}{5}\right)$	$=$	0
x)	$\mu_3\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3}$	$=$	$\mu_3(2x - y + 2)$	$=$	0
xi)			x	$\geq$	0
xii)			y	$\geq$	0
xiii)			μ_1	$\geq$	0
xiv)			μ_2	$\geq$	0
xv)			μ_3	$\geq$	0

Ahora bien, como las restricciones 1, 2 y 3 están activas, las condiciones asociadas a ellas no nos aportan información de los multiplicadores de Lagrange, pues los μ_i podrían ser $>, <$ ó $=$ a 0.
También sabemos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Luego, de la condición vi) sale que necesariamente $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$; y de la condición vii) sale que necesariamente $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$. Por lo tanto tenemos el siguiente sistema, que podemos evaluar inmediatamente en el punto $(x, y) = (2, 6)$:

$$\begin{array}{llcccccc} (a) & \frac{\partial L}{\partial x} & = & 2(x-4)+\mu_1+\frac{6}{5}\mu_2 x+2\mu_3 & = & -4+\mu_1+\frac{12}{5}\mu_2+2\mu_3 & = & 0 \\ (b) & \frac{\partial L}{\partial y} & = & 2(y-8)+\frac{3}{2}\mu_1(\frac{y}{2}-2)^2+\mu_2-\mu_3 & = & -2+\frac{3}{2}\mu_1+\mu_2-\mu_3 & = & 0 \end{array}$$

Luego, tenemos 2 ecuaciones para determinar 3 incógnitas, justamente porque el sistema está sobredeterminado por la degeneración. Para conocer el valor de los multiplicadores de Lagrange en el óptimo, debemos chequear cuál es la restricción que podría estar inactiva (o "sobra"). Es decir, que implica que no cambia el punto óptimo. Para ello, es posible suponer que el multiplicador asociado a ella es nulo, y chequear que el resto de ellos es no negativo. Hay tres casos, entonces:

- a' Restricción (1) inactiva, es decir, $\mu_1 = 0$. Resolviendo las ecuaciones anteriores, descubrimos que $\mu_2 = \frac{30}{11}$ y $\mu_3 = \frac{-14}{11} < 0$, y, por lo tanto, al desactivar la restricción (1), el óptimo cambia. En consecuencia, ella debe estar activada en el óptimo.
- b' Restricción (2) inactiva, es decir, $\mu_2 = 0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, descubrimos que $\mu_1 = 3$ y $\mu_3 = 1/2$, y, por lo tanto, estamos en el óptimo (los multiplicadores son no negativos). Es decir, la restricción 2 "sobra.$^{\text{en}}$ el problema y, en consencuencia, al desactivarla no cambia el óptimo:

$$\vec{x_1^*} = (x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 6, 3, 0, 1/2)$$

- c' Restricción (3) inactiva, es decir, $\mu_3 = 0$.Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, descubrimos que $\mu_1 = 28/13$ y $\mu_2 = 10/13$, y, por lo tanto, estamos en el óptimo (los multiplicadores son no negativos). Es decir, la restricción 3 "sobra.$^{\text{en}}$ el problema y, en consencuencia, al desactivarla no cambia el óptimo:

$$\vec{x_2^*} = (x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (2, 6, 28/13, 10/13, 0)$$

Es decir, se verifican las condiciones de KKT con las restricciones (2) y (3) activas, punto $\vec{x_1^*}$, y con las restricciones (1) y (2) activas, punto $\vec{x_2^*}$. Notamos que en estos dos puntos que satisfacen KKT la solución gráfica es la misma, pues están 2 vértices concentrados en 1 punto. Al mover un Δb muy pequeño en el lado derecho de alguna de las restricciones inactivas, notaríamos esos dos vértices.

iv.iv) Sabemos que el multiplicador asociado a la tercera restricción (μ_2) indica justamente el valor de una unidad de los recursos correspondientes a ella. Es decir, indica cuándo mejor la función objetivo si se dispone de una unidad más en b_2.
El valor de la función objetivo en el óptimo es 8. Luego, para representar el cambio en la función objetivo:

- ◇ Si la restricción es $\frac{3}{5}x^2 + y \leq 8$, el análisis tiene sentido si la restricción está activa, donde $\vec{x_2^*} = (2, 6, 28/13, 10/13, 0)$. Sabemos que el cambio en la función objetivo es aproximadamente igual a:

$$\Delta f = -\mu_2 \Delta b = -\frac{10}{13} \cdot (8 - 8{,}4) = 0{,}3077$$

Y, por lo tanto, el nuevo valor óptimo va a ser aproximadamente igual a

$$f^{*'} = 8 + 0{,}3077 = 8{,}3077$$

- ◇ Si la restricción fuera $\frac{3}{5}x^2 + y \leq 9$, ésta quedaría fuera del dominio y por lo tanto se desactiva. En consecuencia, el análisis tiene sentido para el punto $\vec{x_1^*} = (2, 6, 3, 0, 1/2)$. Por lo tanto, sabemos que el cambio estimado en la función objetivo es aproximadamente igual a:

$$\Delta f = -\mu_2 \Delta b = 0 \cdot (9 - 8{,}4) = 0$$

Y, por lo tanto, el nuevo valor óptimo va a ser aproximadamente igual a

$$f^{*''} = 8 - 0 = 8$$

b) i) El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica temporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar.

ii) El modelo de programación dinámica se presenta a continuación:

Estados:

- $k = 1, \ldots, K$ cada uno de los meses.

Variables de estado:

- I_k Cantidad de aviones almacenados en inventario desde el periodo $k-1$ al k.

Variables de decisión:

- x_k Número de aviones a fabricar el mes k.
- y_k Variable que toma el valor 1 si $D_k > I_k$, 0 si no.

Recursión:

- $I_{k+1} = I_k + x_k - D_k$

Función objetivo:

- Dado que los ingresos ya están contabilizados (mediante el contrato), solamente buscaremos minimizar el valor de los costos de producción y bodegaje.

$$\begin{array}{rcc} V_k^*(I_k) = & \min_{x_k} & C_{x_k,k} + h \cdot I_k + V_{k+1}^*(I_{k+1}) \\ & \text{s.a.} & x_k \geq \max\{0, D_k - I_k\} \\ & & x_k \leq M y_k \\ & & D_k \leq I_k + Q y_k \end{array}$$

Notar que el costo de bodegaje desde el periodo $k-1$ al k es contabilizado en el periodo k. Además, la primera restricción sobre la variable de decisión impide que algún mes no se cumpla el contrato de entrega de los aviones. La segunda y la tercera restricción impiden que se produzcan aviones si quedan en bodega, salvo para satisfacer la demanda del período en cuestión (M y Q son números suficientemente grandes.

Condiciones de borde:

- $I_1 = 0$ Al comienzo no hay inventario.
- $I_{K+1} = 0$ o $D_k = x_k + I_k$ Al final no deben sobrar aviones.
- $V_{K+1} = 0$ Valor residual.

iii) Lo primero es notar que la restricción de no producir si quedan aviones guardados y la condición dde borde que nos dice que $S_5 = 0$ reduce notablemente el cuadro de solución en todos los períodos. Las celdas que indican una i corresponden a situaciones infactibles.

Período 4:

I_4	0	1	$V_4^*(\$)$	x_4^*
0	i	3	3	1
1	0.1	i	0.1	0

Período 3:

I_3	0	1	2	$V_3^*(\$)$	x_3^*
0	i	6+3	7+0.1	7.1	2
1	0.1+3	i	i	3.1	0
2	0.2+0.1	i	i	0.3	0

Período 2:

I_2	0	1	2	3	$V_2^*(\$)$	x_2^*
0	i	6+7.1	9+3.1	12+0.3	12.1	2
1	0.1+7.1	i	i	i	7.2	0
2	0.2+3.1	i	i	i	3.3	0
3	0.3+0.3	i	i	i	0.6	0

Período 1:

I_2	0	1	2	3	4	$V_2^*(\$)$	x_2^*
0	i	5+12.1	10+7.2	15+3.3	17+0.6	17.1	1

Entonces, la política óptima es: Producir una unidad el mes 1, producir 2 unidades el mes 2, no producir el mes 3 y producir una unidad el mes 4.

iv) Ahora debemos agregar una nueva variable que nos indique cuántos aviones se han fabricado hasta un mes en particular.

Estados:

- $k = 1, \ldots, K$ cada uno de los meses.

Variables de estado:

- I_k Cantidad de aviones almacenados en inventario desde el periodo $k-1$ al k.
- A_k Cantidad de aviones fabricados hasta el comienzo del mes k.

Variables de decisión:

- x_k Número de aviones a fabricar el mes k.
- y_k Variable que toma el valor 1 si $D_k > I_k$, 0 si no.

Recursión:

- $I_{k+1} = I_k + x_k - D_k$
- $A_{k+1} = A_k + x_k$

Función objetivo:

- Dado que los ingresos ya están contabilizados (mediante el contrato), solamente buscaremos minimizar el valor de los costos de producción y bodegaje.

$$\begin{aligned} V_k^*(I_k, A_k) = \quad & \text{mín}_{x_k} \quad C_{x_k,k} + \sum_{j=1}^{x_k} R(A_k + j, k) + h \cdot I_k + V_{k+1}^*(I_{k+1}, A_{k+1}) \\ & \text{s.a.} \qquad\qquad x_k \geq \text{máx}\{0, D_k - I_k\} \\ & \qquad\qquad\quad x_k \leq M y_k \\ & \qquad\qquad\quad D_k \leq I_k + Q y_k \end{aligned}$$

Notar que el costo de bodegaje desde el periodo $k-1$ al k es contabilizado en el periodo k. Además, la primera restricción sobre la variable de decisión impide que algún mes no se cumpla el contrato de entrega de los aviones. La segunda y la tercera restricción impiden que se produzcan aviones si quedan en bodega, salvo para satisfacer la demanda del período en cuestión (M y Q son números suficientemente grandes.

Condiciones de borde:

- $I_1 = 0$ Al comienzo no hay inventario.
- $A_1 = 0$ Al comienzo no se han fabricado aviones.
- $I_{K+1} = 0$ o $D_k = x_k + I_k$ o $A_{K+1} = \sum_{k=1}^{K} D_k$ Al final no deben sobrar aviones.
- $V_{K+1} = 0$ Valor residual.

Problema 4. (15 puntos)

Un agricultor posee H hectáreas libres para cultivo de K variedades de plantas; principalmente arándanos, como blueberry (Vaccinium Corymbosum) y bilberry (Vaccinium Myrtillus). Así como también otras Ericáceas como frambuesa roja, negra y mora. Para planificar la producción de T períodos, este individuo ha pedido ayuda a nuestro amigo Enrique, conocido por sus habilidades en modelación y sus habilidades en comer frutos.

Cada cultivo $k \in \{1, \ldots, K\}$ tiene una capacidad productiva de $t_k < T$ períodos. Una vez terminada la capacidad productiva, es posible ocupar el mismo terreno utilizado para plantar nuevamente o dejar la hectárea en reposo. Sin embargo, es necesario satisfacer algunas condiciones que el agricultor le indica. El blueberry requiere que al final de su etapa productiva sea necesario dejar la tierra en reposo por un período. Además, si se usa una hectárea con bilberry, al final de su etapa productiva es necesario plantar mora en tal hectárea. Por último, si se planta frambuesa roja en una hectárea, al final de su etapa productiva se puede cultivar sólamente frambuesa negra, mora o bluberry en dicha hectárea.

Como el arándano es el cultivo principal, Enrique le sugiere que la cantidad de hectáreas de bilberry supere al 30 % del total de hectáreas plantadas.

Por una cuestión de orden para el agricultor, una hectárea puede ser destinada a un sólo tipo de cultivo durante su período. A su vez, no queremos perder semillas, por lo que no se podrá retirar cultivo antes de que finalice su etapa productiva. Por cada hectárea plantada con el cultivo k se tiene asociado un beneficio B_k (por período) y un costo de mantención C_k. Por otra parte, por cada hectárea no plantada o en reposo, es necesario arrendar un tractor por un período para abonarla; esto tiene un costo por período y por hectárea de R. (Este es el único costo asociado a las hectáreas libres).

Finalmente, la frambuesa negra necesita de un insumo especial que se encuentra en una bodega fuera del campo. El costo de este insumo (agregando el transporte) depende de la ubicación de este cultivo en el campo y está dado por F_j por período si se ubica en la hectárea j.

Enrique tiene el desafío de planificar todo lo indicado por el agricultor, considerando que interesa el período de cultivo de las variedad de planta k, sin importar si la capacidad productiva fue o no terminada antes de los T períodos.

Se le ha prometido a Enrique un pago en función de la cantidad de beneficio total logrado exclusivamente por cultivar. Se le hará un pago de $E(\pi) \geq 0$, siendo π el beneficio total, solamente si el beneficio total supera cierto monto estipulado B.

Ayude a Enrique a modelar matemáticamente la situación completa con un modelo de Programación No Lineal Mixto que maximice el beneficio final [3] (ahora considerando el pago a Enrique) del **agricultor**. Intente que la mayor cantidad de restricciones posibles sean lineales.

Solución Problema 4.

El modelo a continuación representa la situación de manera matemática: Variables de Decisión:

x_{jkt}	:	1 si se planta el cultivo k en la hectárea j el período t, 0 en otro caso.
y_{jkt}	:	1 si la hectárea j está ocupada con el cultivo k en el período t, 0 en otro caso.
z	:	1 si se le hará el pago a Enrique por sus servicios, 0 en otro caso.
π	:	Beneficio total logrado solamente por el cultivo.

Denotaremos los cultivos como:

$$\begin{aligned} k = 1 &\rightarrow \text{Cultivo de blueberry} \\ k = 2 &\rightarrow \text{Cultivo de biliberry} \\ k = 3 &\rightarrow \text{Cultivo de frambuesa roja} \\ k = 4 &\rightarrow \text{Cultivo de frambuesa negra} \\ k = 5 &\rightarrow \text{Cultivo de mora} \end{aligned}$$

Restricciones:

[3] Beneficio **total** por cultivo − Pago a Enrique = Beneficio **final**

(a) Si se planta el cultivo k en la hectárea j en el período t, no se puede cultivar ninguna otra planta durante los períodos correspondientes a la capacidad productiva de dicha planta.

Sea $\tau = \{t, \ldots, \text{mín}\{t + t_k - 1, T\}\}$.

$$x_{jkt} \leq 1 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} \sum_{\theta \in \tau} x_{jl\theta} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall k = 1, \ldots, K$$

(b) Si se planta el cultivo k en la hectárea j en el período t, no se puede cultivar el mismo cultivo k durante los períodos que corresponden a la capacidad productiva de dicha planta.

Sea $\bar{\tau} = \{t + 1, \ldots, \text{mín}\{t + t_k - 1, T\}\}$.

$$x_{jkt} \leq 1 - \sum_{\theta \in \bar{\tau}} x_{jk\theta} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall k = 1, \ldots, K$$

(c) Si la hectárea j está ocupada por el cultivo k en el período t, no puede estar ocupada por ningún otro cultivo.

$$y_{jkt} \leq 1 - y_{jlt} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall k, l = 1, \ldots, K \ : \ l \neq k$$

(d) Si se cultiva la planta k en la hectárea j en el período t, la hectárea j estará ocupada por el cultivo k durante los períodos correspondientes a su capacidad productiva.

Sea $\tau = \{t, \ldots, \text{mín}\{t + t_k - 1, T\}\}$.

$$x_{jkt} \leq y_{jk\theta} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall k = 1, \ldots, K \qquad \forall \theta \in \tau$$

(e) Si la hectárea j en el período t está ocupada por el cultivo k, no se puede cultivar ninguna otra planta.

$$y_{jkt} \leq 1 - x_{jlt} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall k, l = 1, \ldots, K \ : \ l \neq k$$

(f) La cantidad de hectáreas de biliberry debe superar el 30 % del total de hectáreas plantadas.

$$\sum_{j=1}^{H} y_{j2t} \geq 0{,}3 \cdot \sum_{j=1}^{H} \sum_{k=1}^{K} y_{jkt} \qquad \forall t = 1, \ldots, T$$

(g) Si se planta blueberry, al final de su etapa productiva es necesario dejar la tierra en reposo por un período. Por lo mismo, no se puede cultivar en esa hectárea.

$$x_{j1t} = 1 - \sum_{k=1}^{K} x_{jk\beta} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall \beta : \beta = t + t_1 \text{ y } \beta \leq T$$

(h) Si se planta blueberry, al final de su etapa productiva es necesario dejar la tierra en reposo por un período. Por lo mismo, esa hectárea no puede estar ocupada.

$$x_{j1t} = 1 - \sum_{k=1}^{K} y_{jk\beta} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall \beta : \beta = t + t_1 \text{ y } \beta \leq T$$

(i) Si se planta biliberry en una hectárea, al final de su etapa productiva es necesario plantar mora en tal hectárea.

$$x_{j2t} \leq x_{j5\beta} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall \beta : \beta = t + t_2 \text{ y } \beta \leq T$$

(j) Si se planta frambuesa roja en una hectárea, al final de su etapa productiva puedo cultivar sólo frambuesa negra, mora o bluberry en dicha hectárea.

$$x_{j3t} \leq \sum_{k \in \{1,4,5\}} x_{jk\beta} \qquad \forall j = 1, \ldots, H \qquad \forall t = 1, \ldots, T \qquad \forall \beta : \beta = t + t_3 \text{ y } \beta \leq T$$

(k) Construcción de la variable de beneficio total.

$$\pi = \sum_{j=1}^{H}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}(B_k - C_k)y_{jkt} - \sum_{j=1}^{H}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T}R(H - y_{jkt}) - \sum_{j=1}^{H}\sum_{t=1}^{T}F_j y_{j4t}$$

(l) Activación de la variable que indica si se le hará pago a Enrique o no.

$$\frac{\pi - B}{M} \leq z$$

con $M \gg 0$.

(m) Naturaleza de las variables.

$$\begin{aligned}
x_{jkt} &\in \{0,1\} \qquad \forall j = 1,\ldots,H \qquad \forall t = 1,\ldots,T \qquad \forall k = 1,\ldots,K \\
y_{jkt} &\in \{0,1\} \qquad \forall j = 1,\ldots,H \qquad \forall t = 1,\ldots,T \qquad \forall k = 1,\ldots,K \\
\pi &\geq 0 \\
z &\in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Función Objetivo:

Se quiere maximizar el beneficio final del agricultor, considerando el beneficio total y el pago a Enrique.

$$\text{máx}\,(\text{Beneficio final}) = \pi - z \cdot E(\pi)$$