PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2026 - 1
Profesores: M. Castro - R. Cuadrado - C. Toro
M. Villafranca - J. Villavicencio

Interrogación 1
Duración: 150 minutos.

Instrucciones

- **Durante la prueba se exigirá una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También deberá firmar la lista de asistencia a la prueba.
- **Escriba su nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja.** Además, escriba número de lista en cada hoja. No seguir estas instrucciones será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- **Al finalizar la prueba**, cada estudiante debe:
  (a) **Escanearla y entregarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Interrogación 1" que estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Procure que el escaneo sea legible, pues se corregirá sobre el documento escaneado. Un escaneo ilegible o incompleto no será corregido.
  (b) **Entregarla físicamente** como respaldo al equipo de ayudantes. Si no se recibe el respaldo físico de la prueba, esta será calificada con nota 1.
- La prueba es estrictamente individual.
- Escribir respuestas en la prueba después de su término se penalizará con nota mínima en la pregunta o, incluso, en toda la prueba a criterio del equipo docente.
- **Está prohibido el uso de dispositivos electrónicos** (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) **durante la prueba**. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS. El uso de un dispositivo en otra circunstancia se considera una **falta a la ética y se penaliza con nota mínima** en la prueba.
- Si termina antes de tiempo, entonces favor avisar a un miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.

Pregunta 1 (20 puntos)

El Servicio Electoral de Chile (SERVEL) debe organizar una elección nacional. El país está dividido en un conjunto de comunas C. Para llevar a cabo la elección, se deben instalar mesas de votación en locales habilitados. Existe un conjunto de locales candidatos L, donde cada local $l \in L$ pertenece a exactamente una comuna de C y tiene una capacidad máxima de M_l mesas de votación. Se denota como $a_{lc} \in \{0, 1\}$ el parámetro que indica si el local l pertenece a la comuna c. Habilitar el local l tiene un costo fijo de f_l pesos, y cada mesa instalada en dicho local tiene un costo adicional de m_l pesos.

Cada comuna $c \in C$ tiene una población de p_c votantes. Cada mesa puede atender como máximo a Q votantes. La normativa exige que la cantidad total de mesas habilitadas en la comuna c sea suficiente para atender a toda su población. Además, por razones de accesibilidad, cada comuna debe tener al menos dos locales habilitados distintos.

Para operar las mesas se dispone de un conjunto de vocales V. Cada vocal $v \in V$ puede trabajar únicamente en locales del subconjunto $W_v \subseteq L$ (determinado por su lugar de residencia). Cada mesa requiere exactamente ρ vocales, y cada vocal puede ser asignado a lo sumo a una mesa. Convocar a un vocal v tiene un costo de g_v pesos. No todos los vocales deben ser convocados necesariamente, pero todas las mesas instaladas deben tener sus vocales completos.

(a) **(16 puntos)** Formule un modelo de programación lineal entera mixta que le permita al SERVEL minimizar el costo total de la elección.

Solución: Conjuntos:

- C: comunas
- L: locales candidatos
- V: vocales disponibles
- $W_v \subseteq L$: locales donde puede trabajar el vocal v

Parámetros:

- M_l: capacidad máxima de mesas del local l
- a_{lc}: 1 si el local l pertenece a la comuna c, 0 en otro caso.
- f_l: costo fijo de habilitar local l
- m_l: costo por mesa instalada en local l
- p_c: población de la comuna c
- Q: votantes máximos por mesa

- ρ: vocales requeridos por mesa
- g_v: costo de convocar al vocal v

Variables de decisión:

- $y_l \in \{0,1\}$: 1 si se habilita el local l, 0 en otro caso.
- $n_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: número de mesas instaladas en el local l
- $x_{vl} \in \{0,1\}$: 1 si el vocal v es asignado al local l, 0 en otro caso.

Función objetivo: Minimizar los costos totales, entendidos como (costo de habilitación de locales + costo de mesas instaladas + costo de convocar vocales) (3 puntos: 1 punto por cada sección del costo correcto)

$$\text{mín} \sum_{l \in L} f_l y_l + \sum_{l \in L} m_l n_l + \sum_{v \in V} \sum_{l \in W_v} g_v x_{vl}$$

Restricciones:

$$\sum_{l \in L} n_l \cdot a_{lc} \cdot Q \geq p_c \qquad \forall c \in C \qquad (1)$$

$$\sum_{l \in L} a_{lc} \cdot y_l \geq 2 \qquad \forall c \in C \qquad (2)$$

$$n_l \leq M_l \cdot y_l \qquad \forall l \in L \qquad (3)$$

$$\sum_{l \in W_v} x_{vl} \leq 1 \qquad \forall v \in V \qquad (4)$$

$$x_{vl} \leq y_l \qquad \forall v \in V,\ l \in W_v \qquad (5)$$

$$\sum_{v \in V : l \in W_v} x_{vl} = \rho \cdot n_l \qquad \forall l \in L \qquad (6)$$

$$y_l \in \{0,1\} \qquad \forall l \in L \qquad (7)$$

$$n_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \qquad \forall l \in L \qquad (8)$$

$$x_{vl} \in \{0,1\} \qquad \forall l \in L,\ v \in V \qquad (9)$$

Descripción de restricciones:

(1): La cantidad total de mesas en la comuna c es suficiente para cubrir a toda su población. (2 puntos)

(2): Cada comuna tiene al menos dos locales habilitados. (2 puntos)

(3): Solo se pueden instalar mesas en locales habilitados, respetando la capacidad máxima M_l. (2 puntos)

(4): Cada vocal es asignado a lo sumo a una mesa. (2 puntos)

(5): Un vocal solo puede ser asignado a un local si este está habilitado. (2 puntos)

(6): Cada mesa instalada en el local l tiene exactamente ρ vocales asignados. (2 puntos)

(7), (8) y (9): Naturaleza de las variables. (1 punto)

(b) **(4 puntos)** Un analista del SERVEL señala que tener restricciones (una o más) que impiden instalar mesas en locales no habilitados es innecesario en el modelo, argumentando lo siguiente: "Como habilitar un local tiene un costo fijo positivo $f_l > 0$, al minimizar costos el modelo nunca habilitará un local a menos que sea estrictamente necesario. Por lo tanto, si en la solución óptima se instalan mesas en el local l, este necesariamente estará habilitado, y las restricciones que vinculan ambas decisiones no aportan nada al modelo." Indique si este argumento es correcto o incorrecto y justifique su respuesta utilizando su modelo del inciso (a).

Solución:

El argumento es incorrecto. Sin la restricción (3), el modelo puede encontrar soluciones en las que $n_l > 0$ con $y_l = 0$, es decir, instalar mesas en un local sin haberlo habilitado. Esto ocurre porque, desde el punto de vista del modelo, asignar $y_l = 0$ mientras $n_l > 0$ es factible y, además, reduce el costo objetivo al ahorrarse f_l. Por lo tanto, lejos de evitar el error, la minimización de costos incentiva precisamente la solución incorrecta que el analista cree que se evitará implícitamente. En consecuencia, la restricción $n_l \leq M_l \cdot y_l$ es indispensable en el modelo, ya que es la única manera de garantizar formalmente que no se instalen mesas en locales no habilitados.

Pregunta 2 (20 puntos)

Considera que eres el dueño de un cine, en donde existe un listado I de películas que puedes exhibir en las próximas $t \in \{1, \ldots, T\}$ semanas. El precio de comprar los derechos para exhibir una película $i \in I$ a partir de la semana t es de c_{it} pesos, donde, una vez realizada la compra, puedes exhibirla en la cantidad de salas y semanas que quieras. Por otro lado, has estimado que, por cada una de tus salas $j \in J$ en las que decidas exhibir la película i durante la semana t, recibirás la suma de d_{it} pesos en concepto de ventas de entradas. No obstante, por restricciones con las productoras, al estrenar una película por primera vez, esta debe exhibirse durante al menos u_i semanas consecutivas desde la fecha en que la estrenas en tu cine, independientemente de las salas que uses. Naturalmente, cada una de las $j \in J$ salas puede exhibir una única película a la vez cada semana. Por último, existe un costo fijo de β pesos asociado al servicio de limpieza del cine, que solo debe pagarse si decides exhibir una o más películas durante la semana.

Construya un modelo de programación lineal con variables enteras mixtas que maximice las utilidades (ingresos menos costos) del cine.

Solución: Variables de decisión:

- $X_{i,t} \in \{0,1\}$: 1 si se compra el derecho de la película $i \in I$ en la semana $t \in \{1, \ldots, T\}$, 0 e.o.c.
- $Y_{i,j,t} \in \{0,1\}$: 1 si se exhibe la película $i \in I$ en la sala $j \in J$ durante la semana $t \in \{1, \ldots, T\}$, 0 e.o.c.
- $V_{i,t} \in \{0,1\}$: 1 si se inicia la exhibición de la película $i \in I$ en alguna sala durante la semana $t \in \{1, \ldots, T\}$, 0 e.o.c.
- $W_{i,t} \in \{0,1\}$: 1 si se exhibe la película $i \in I$ en alguna sala durante la semana $t \in \{1, \ldots, T\}$, 0 e.o.c.
- $Z_t \in \{0,1\}$: 1 si se exhibe alguna película durante la semana $t \in \{1, \ldots, T\}$, 0 e.o.c.

Objetivo: maximizar la utilidad total = ingresos de exhibición menos los costos de derechos y limpieza. (3 puntos: 1 punto por cada sección del costo correcto)

$$\max_{(x,y,v,w)} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{T} d_{it} Y_{ijt} - \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} c_{it} X_{it} - \sum_{t=1}^{T} \beta Z_t$$

Restricciones:

$$\sum_{i \in I} Y_{ijt} \leq 1 \qquad \forall j \in J, \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2a)$$

$$V_{it} \leq \sum_{t'=1}^{t} X_{it'} \qquad \forall i \in I, \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2b)$$

$$\sum_{j \in J} Y_{ijt} \leq M \cdot W_{it} \qquad \forall i \in I, \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2c)$$

$$W_{it} \leq \sum_{t'=1}^{t} V_{it'} \qquad \forall i \in I, \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2d)$$

$$u_i \cdot V_{it} \leq \sum_{t'=t}^{\min\{T, t+u_i-1\}} W_{it'} \qquad \forall i \in I, \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2e)$$

$$Z_t \cdot |I| \geq \sum_{i \in I} W_{it} \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2f)$$

$$W_{it}, V_{it}, X_{it} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I, \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2g)$$

$$Y_{ijt} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2h)$$

$$Z_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\} \qquad (2i)$$

- Las restricciones (2a) garantizan que a lo mas se exhibe una película por sala. (2 pts)
- Las restricciones (2b) garantizan que no se pueda exhibir una película sin tener los derechos comprados en alguno de los períodos anteriores. (3 pts)
- Las restricciones (2c)–(2d) generar la relación entre las variables Y_{ijt}, W_{it}, V_{it}, de esa forma la (2c) genera que que si exhibo en una sala implica que estoy exhibiendo a nivel general (para el conteo de semanas), y la (2d) fuerza que para estar exhibiendo de manera general debo haber iniciado la exhibición en alguna sala en algún período anterior. (6 pts: 3 pts para (2c) y 3 pts para (2d))
- Las restricciones (2e) fuerzan a que, al momento de iniciar una exhibición para la película i, la exhiba por al menos u_i semanas consecutivas. (3 pts)
- Las restricciones (2f) determinan la activación del pago por la limpieza del cine. (2 pts)
- Por último, las restricciones (2g)–(2i) establecen la naturaleza binaria de las variables (1 pts).

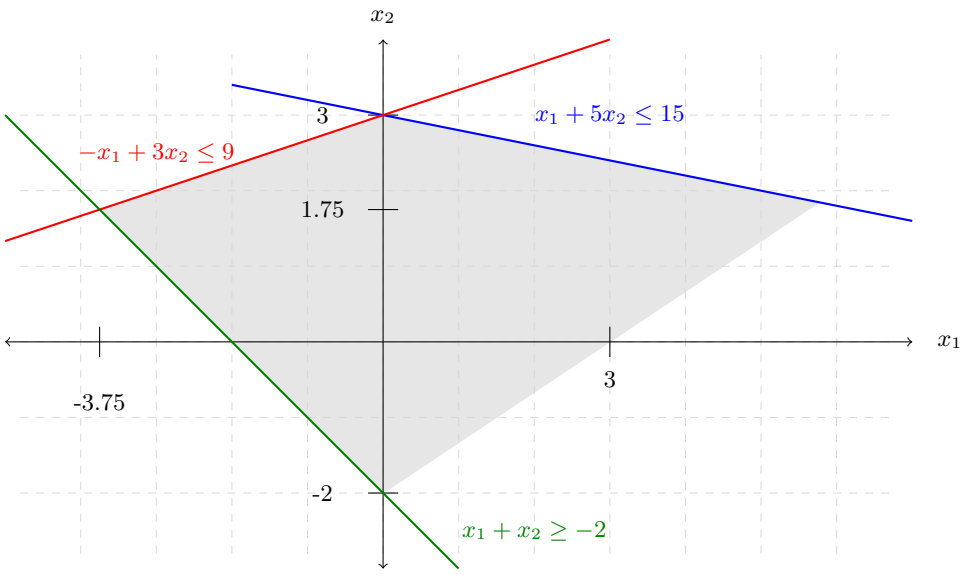
Pregunta 3 (20 puntos)

(a) **(9 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización :

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & -(x_1-2)^2-(x_2-3)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1+x_2 \geq -2 \\ & x_1+5x_2 \leq 15 \\ & -x_1+3x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(i) **(3 puntos)** Grafique la región de soluciones factibles. Identifique si el conjunto es cerrado y/o acotado. Justifique su respuesta.

Solución:



De la figura podemos ver que el conjunto no es acotado ya que se "abre" hacia el cuadrante $x_1 \geq 0$ y $x_2 \leq 0$. Por otro lado, el conjunto sí es cerrado ya que está definido por desigualdades lineales estrictas (es decir, de $\leq$ y $\geq$).

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por hacer correctamente el gráfico
- ◇ 1 pto por argumentar correctamente que es cerrado
- ◇ 1 pto por argumentar correctamente que NO es acotado

- ◇ No es necesario que los argumentos sean muy formales ni idénticos a los de la pauta, pero deben ser consistentes con la materia vista en clases. No dar puntos si no presentan ningún argumento.

(ii) **(3 puntos)** Demuestre que este problema admite solución óptima.

Solución: Para esto, hay que aplicar el teorema de Bolzano-Weierstrass. Por simpleza, escribiré el modelo equivalente con minimización (no es obligatorio, pero ayuda a aplicar correctamente el teorema):

$$\begin{aligned} \text{mín } & (x_1-2)^2+(x_2-3)^2 \\ \text{s.a. } & x_1+x_2 \geq -2 \\ & x_1+5x_2 \leq 15 \\ & -x_1+3x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Primero, es fácil ver que el conjunto de soluciones no es vacío (ver gráfico), además de que es cerrado y no acotado (inciso anterior). Además, la función objetivo es claramente continua (una función cuadrática). Finalmente la función es coercitiva ya que $f(x) = (x_1-2)^2+(x_2-3)^2 \to \infty$ cuando $x_1 \to \pm\infty$ y/o $x_2 \to \pm\infty$

Nota de corrección:

- ◇ 1 pto identificar que hay que ocupar el Teo. de B-W
- ◇ 1 pto por argumentar que se cumplen las condiciones de cerrado, no vació y función continua. Si faltan uno o dos argumentos, poner solo 0.5 puntos.
- ◇ 1pto por demostrar/argumentar que la función objetivo es coercitiva
- ◇ Ojo que si el problema es de maximización, necesitamos que $f(x) \to -\infty$ cuando $||x|| \to \infty$

(iii) **(3 puntos)** Demuestre que todo óptimo local de este problema es óptimo global.

Solución: Para esto debemos demostrar que el problema es convexo. Por las propiedades vistas en clase, la región factible es convexa, ya que está definida por un conjunto de restricciones lineales.

Para demostrar que la función objetivo es convexa, podemos ocupar su matriz hessiana y ver que es semidefinida positiva (SDP). La función es:

$$f(x) = (x_1-2)^2+(x_2-3)^2 = x_1^2-4x_1+4+x_2^2-6x_2+9$$

Su gradiente y matriz Hessiana es:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 - 6 \end{bmatrix} \qquad H_f(x) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$H_f(x)$ es una matriz diagonal con valores positivos, por lo que es fácil ver que es SDP y con valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Concluimos que el problema es convexo. Finalmente, por el teorema visto en clases, todo óptimo local será óptimo global del problema.

Nota de corrección:

- ◇ 1 pto por idendificar que se debe demostar que tanto la función como el conjunto debe ser convexo
- ◇ 0.5 puntos por argumentar que el conjunto el convexo
- ◇ 1.5 ptos por demostrar que la función es convexa. Aquí solo se muestra una forma, pero hay otras (por definición de convexidad, y varias formas de demostrar que el hessiano es SDP).
- ◇ Dar a lo más 2 puntos si solo demuestran que la función es convexa, pero no dicen nada sobre el conjunto.

(b) **(6 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea $a \in \mathbb{R}$ y A el conjunto asociado
$A = \{x \in D, f(x) \leq a\}$.

(i) **(4 puntos)** Muestre que si f es una función convexa, entonces A es un conjunto convexo.

Solución: Sea $x, y \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$. Como D es convexo, entonces $\lambda x + (1-\lambda)y \in D$. Como f es convexa:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq (1-\lambda)a + \lambda a = a.$$

Es decir, $\lambda x + (1-\lambda)y \in A, \forall \lambda \in [0, 1]$. Luego A es convexo

(ii) **(2 puntos)** Dé un ejemplo en el que A es un conjunto convexo para todo $a \in \mathbb{R}$, pero f **no** es convexa.

Solución: Por ejemplo: $f(x) = x^3$, $f(x) = -e^x$

(c) **(5 puntos)** Encuentre un modelo lineal equivalente de **minimización** al siguiente

problema de optimización:

$$\begin{aligned}
\max_{x} \ & \prod_{i=1}^{n} e^{3x_i+4} \\
\text{s.t. } & \min\{3x_i + x_{i+2},\ x_{i+1} + 4\} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| \qquad \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Solución: Ocupando propiedades de la exponencial y que la función es siempre creciente tenemos:

$$\begin{aligned}
\max_{x} \ & \sum_{i=1}^{n} 3x_i + 4n \\
\text{s.t. } & \min\{3x_i + x_{i+2},\ x_{i+1} + 4\} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| \qquad \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Cambiando de máx a mín para el problema general , nos queda:

$$\begin{aligned}
\min_{x} \ & \sum_{i=1}^{n} -3x_i - 4n \\
\text{s.t. } & \min\{3x_i + x_{i+2},\ x_{i+1} + 4\} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| \qquad \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Linearizamos el mín de las restricciones:

$$\begin{aligned}
\min_{x} \ & \sum_{i=1}^{n} -3x_i - 4n \\
\text{s.t. } & 3x_i + x_{i+2} \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| \qquad \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x_{i+1} + 4 \geq |x_{i+1} - x_{i+2}| \qquad \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Linearizamos los valores absolutos y nos queda:

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & \sum_{i=1}^{n} -3x_i - 4n \\
\text{s.t. } & 3x_i + x_{i+2} \geq x_{i+1} - x_{i+2} && \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& 3x_i + x_{i+2} \geq -x_{i+1} + x_{i+2} && \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x_{i+1} + 4 \geq x_{i+1} - x_{i+2} && \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x_{i+1} + 4 \geq -x_{i+1} + x_{i+2} && \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Finalmente, simplificando y ordenando las variables de las restricciones, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & \sum_{i=1}^{n} -3x_i - 4n \\
\text{s.t. } & 3x_i - x_{i+1} + 2x_{i+2} \geq 0 && \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& 3x_i + x_{i+1} \geq 0 && \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x_{i+2} \geq -4 && \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& 2x_{i+1} - x_{i+2} \geq -4 && \forall i \in \{1, ..., n-2\} \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Nota de corrección:

- ◇ 1.5 por linealizar la función objetivo y pasarla de min a max
- ◇ 2 puntos por linealizar correctamente el min en la restricción.
- ◇ 1.5 puntos por linealizar el valor absoluto.
- ◇ Se pueden seguir los pasos en un orden distinto y obtener resultados similares. No es necesario que los alumnos lleguen a lo mismo, pero debe ser lineal y equivalente a la solución presentada aquí.
- ◇ Descontar 0.5 si hacen todo bien, pero no cambian de max a min.