PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2025 - 2
Profesores: M. Castro - R. Cuadrado
M. Klapp - M. Villafranca

Interrogación 2
Duración: 150 minutos.

Instrucciones

- **Durante la prueba se exigirá una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También deberá firmar la lista de asistencia a la prueba.
- **Escriba su nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja.** Además, escriba número de lista en cada hoja. No seguir estas instrucciones será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- **Al finalizar la prueba**, cada estudiante debe:
  (a) **Escanearla y entregarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Interrogación 2" que estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Un escaneo ilegible o incompleto no será corregido.
  (b) **Entregar la copia física** como respaldo al equipo de ayudantes. Una prueba sin respaldo físico será calificada con nota 1.
- **Sistema de Calificación:** La prueba tiene 60 puntos. Sean P y P_1 los puntajes obtenidos en toda la prueba y solamente en la pregunta 1, respectivamente. La Nota de la Interrogación será igual a:

$$\text{Nota Interrogación} = \begin{cases} \text{mín}\{P/10+1,\, 3\}, & \text{si } P_1 \in [0,4], \\ \text{mín}\{P/10+1,\, \frac{1}{2}P_1+1\}, & \text{si } P_1 \geq 4 \end{cases}$$

  donde P_1 es el puntaje obtenido en dicha pregunta.
- **Otras consideraciones:**
  - La prueba es estrictamente individual.
  - Escribir respuestas en la prueba después de su término se penalizará con nota mínima en la pregunta o, incluso, en toda la prueba a criterio del equipo docente.
  - Se prohíbe el uso de dispositivos electrónicos (celular, calculadoras, computador, smart watch, etc.) durante la prueba. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS.
  - Si termina antes de tiempo, entonces favor avisar a un miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.

Pregunta 1: Modelación (20 puntos)

Desde una tienda comercial le han pedido ayuda para gestionar el inventario de productos. La tienda se abastece de proveedores en pedidos que usted debe planificar para un periodo de T semanas. Específicamente, la tienda maneja en su bodega P SKUs (*stock keeping units* o, en español, tipos de producto diferentes) y atienda a una demanda conocida por $d_{it} \geq 0$ unidades del SKU $i \in \{1, ..., P\}$ en cada periodo $t \in \{1, ..., T\}$ que debe satisfacer completamente. Cada unidad del SKU $i \in \{1, ..., P\}$, además, posee volumen v_i, en metros cúbicos.

El proceso de revisión de inventario ocurre al finalizar cada semana $t \in \{1, ..., T\}$ y consiste en registrar la cantidad remanente de productos por SKU, verificar que no se sobrepase una capacidad de almacenaje de V metros cúbicos en total y pagar un costo de inventario f_{it} por unidad almacenada del SKU $i \in \{1, ..., P\}$ hasta la siguiente semana. Al inicio de la semana 1, hay h_i productos disponibles para cada SKU $i \in \{1, ..., P\}$.

Además, al final de la semana $t \in \{1, ..., T\}$ usted puede ejecutar (o no) pedidos a los proveedores de la tienda para que repongan el inventario de algunos SKUs. Si usted decide reponer el inventario del SKU $i \in \{1, ..., P\}$ al final de la semana t, entonces recibirá r_i unidades (constante e independiente de la semana) al inicio de la semana $t + 1$ y pagará un costo igual a c_{it} por la orden. El objetivo es minimizar los costos de ordenamiento e inventario de la tienda para el horizonte de planificación de T semanas.

(a) **(7 puntos)** A continuación se propone un modelo de optimización lineal entera mixta que representa este problema. El modelo considera la variable de decisión binaria x_{it} que toma el valor 1 si se ordena reponer el SKU $i \in \{1, ..., P\}$ al final de la semana $t \in \{1, ..., T\}$, y la variable continua $y_{it} \geq 0$ que representa el inventario del SKU $i \in \{1, ..., P\}$ almacenado al final de la semana $t \in \{1, ..., T\}$. Asuma que estas variables son suficientes para modelar adecuadamente la situación descrita.

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{P} (x_{it} c_{it} + y_{it} f_{it}) & & \\
\text{s.a.} \quad & y_{i1} = h_i - d_{i1} & \forall i \in \{1, ..., P\} \quad & \text{(1a)} \\
& y_{it} = y_{i,t-1} + r_i - d_{it} & \forall i \in \{1, ..., P\},\ t \in \{2, ..., T\} \quad & \text{(1b)} \\
& \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{P} y_{it} \leq V & & \text{(1c)} \\
& y_{it} \geq 0, x_{it} \in \{0, 1\} & \forall i \in \{1, ..., P\},\ t \in \{1, ..., T\} &
\end{aligned}$$

La función objetivo está correctamente modelada, pero se desconoce si las restriccio-

nes modelan bien las siguientes relaciones entre variables:

(1a) : Inventario al final de la semana 1.

(1b) : Evolución del inventario a partir de la semana 2.

(1c) : Cumplir con la capacidad de bodegaje.

Para cada restricción del modelo (es decir, (1a), (1b) y (1c)), responda si representa (o no) correctamente lo solicitado (justifique brevemente su respuesta). En caso de ser negativa su respuesta, proponga una alternativa correcta a la restricción.

Solución:

La restricción (1a) está **correcta** ya que considera el inventario inicial y la demanda de dicha semana. La restricción (1b) está **incorrecta** ya que omite la variable x_{it}, por lo que supone que siempre se pide del producto i en la semana $t-1$. La restricción (1c) está **incorrecta** porque la capacidad de la bodega es por semana y no incluye el volumen de los productos.

Modelo con las correcciones a las restricciones incorrectas.

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{P} x_{it}c_{it} + y_{it}f_{it} & \\
\text{s.a.} \quad & y_{i1} = h_i - d_{i1} & \forall i \in \{1,...,P\} \\
& y_{it} = y_{i,t-1} + r_i x_{i,t-1} - d_{it} & \forall i \in \{1,...,P\},\ t \in \{2,...,T\} \\
& \sum_{i=1}^{P} v_i y_{it} \leq V & \forall t \in \{1,...,T\} \\
& y_{it} \geq 0, x_{it} \in \{0,1\} & \forall i \in \{1,...,P\},\ t \in \{1,...,T\}
\end{aligned}
$$

Nota de corrección:

- (1a) 1 punto. No dar puntos si no hay justificación.
- (1b) 3 puntos: 1 por decir que está mala y justificar correctamente el error. 2 puntos por corrección a la restricción.
- (1c) 3 puntos: 1 por decir que está mala y justificar correctamente el error. 2 puntos por corrección a la restricción.

(b) Asumiendo que tiene un modelo correcto y completo para las restricciones de la parte (a), agregue o modifique restricciones (y posiblemente variables) que modelen las siguientes condiciones adicionales. Además, modifique la función objetivo si es necesario. Responda cada caso de forma independiente.

(i) **(2 puntos)** Al final de cada semana $t \in \{1, ..., T\}$, no puede haber más de K reposiciones para diferentes SKUs (asuma $K < P$).

Solución:

$$\sum_{i=1}^{P} x_{it} \leq K \qquad \forall t \in \{1, ..., T\}$$

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por errores menores
- ◇ 2 puntos todo bueno

(ii) **(2 puntos)** No se puede solicitar reposición del mismo SKU en semanas consecutivas.

Solución:

$$x_{it} + x_{i,t+1} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1, ..., P\},\ t \in \{1, ..., T-1\}$$

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por errores menores
- ◇ 2 puntos todo bueno

(iii) **(4 puntos)** Existe un costo fijo adicional g_t a pagar si ordena reponer más de 4 SKUs en la misma semana.

Solución: Necesitamos una variable adicional, $z_t \in \{0, 1\}$, que indique si se pidieron 5 o más SKUs en la semana $t \in \{1, .., T\}$. Con esto, se debe modificar la función objetivo y agregar una restricción adicional al problema. La nueva función objetivo es:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{P} (x_{it} c_{it} + y_{it} f_{it}) + \sum_{t=1}^{T} g_t z_t$$

Y la restricción que modele la activación de la variable z_t dependiendo del número de pedidos hechos:

$$\sum_{i=1}^{P} x_{it} \leq 4 + (P - 4) \cdot z_t \qquad \forall t \in \{1, .., T\}$$

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto si define bien la variables
- ◇ 1 punto por corregir correctamente la función objetivo
- ◇ 2 puntos por la restricción

Notar que NO se puede modelar esta condición correctamente sin una variable auxiliar. Dar a lo más 1 punto si intenta algo "razonable" que no incluya una variable binaria auxiliar. La restricción descrita arriba puede ser modelada con una big-M genérica y suficientemente grande. La pauta muestra la big-M más ajustada.

(iv) **(5 puntos)** Es posible no cumplir la demanda en su totalidad. Específicamente, considere que existe un costo q_{it} a pagar por unidad demandada e insatifecha del SKU $i \in \{1, ..., P\}$ en la semana $t \in \{1, ..., T\}$.

Solución: Necesitamos una nueva variable $w_{it} \geq 0$ que representa la cantidad de unidades del SKU $i \in \{1, ..., P\}$ insatisfechas en la semana $t \in \{1, ..., T\}$. La nueva función objetivo es:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{P} (x_{it} c_{it} + y_{it} f_{it} + w_{it} q_{it})$$

Además, debemos ajustar las restricciones de inventario y asegurarnos que w_{it} no supere la demanda.

$$\begin{aligned} y_{i1} &= h_i - d_{i1} + w_{i1} && \forall i \in \{1, ..., P\} \\ y_{it} &= y_{i,t-1} + r_i x_{i,t-1} - d_{it} + w_{it} && \forall i \in \{1, ..., P\},\ t \in \{1, ..., T\} \end{aligned}$$

Alternatviamente se puede modelar con una variables que respresente lo vendido. Sea $s_{it} \geq 0$ lo vendido del producto i en la semana t , donde $w_{it} = d_{it} - s_{it}$. la función objetivo es:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{P} (x_{it} c_{it} + y_{it} f_{it} + (d_{it} - s_{it}) q_{it})$$

y las restricciones:

$$\begin{aligned} y_{i1} &= h_i - s_{i1} && \forall i \in \{1, ..., P\} \\ y_{it} &= y_{i,t-1} + r_i x_{i,t-1} - s_{it} && \forall i \in \{1, ..., P\},\ t \in \{1, ..., T\} \\ 0 &\leq s_{it} \leq d_{it} && \forall i \in \{1, ..., P\},\ t \in \{1, ..., T\} \end{aligned}$$

Nota de corrección: No se puede modelar correctamente la situación sin la variable adicional, en particular porque no se puede representar adecuadamente la función objetivo. Las restricciones sí pueden estar correctas si se reemplaza la igualdad por una desigualdad ($\geq$). Si alguien intenta esto, dar a lo más 3 puntos.

- ◇ 1 punto por definir nueva variable

- 1 punto por función objetivos
- 3 puntos para las restricciones. Para el primer modelo, 1 punto por la primera restricción y 2 puntos por la segunda. Para el segundo modelo, 1 punto por cada restricción.

Pregunta 2 (20 puntos):

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c_1x_1 + 10x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = b_1 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = b_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Como puede notar, en este problema se desconocen tres valores del vector de costos $c = (c_1, 10, c_3, c_4)$, así como los datos asociados al lado derecho $b = (b_1, b_2)$ de las restricciones. Sin embargo, usted sabe que el vértice $x^0 = (0, 8, 3, 0)$ es factible y que posee un valor objetivo igual a 140. Además, sus costos reducidos son $r = (-1, 0, 0, 5)$.

Con respecto a este problema, responda justificando adecuadamente cada inciso:

(a) **(2 puntos)** ¿Es x^0 una solución óptima?

Solución: x^0 no es óptimo, pues posee un costo reducido negativo (ojo para el corrector: podría ser en un problema degenerado con el lado derecho igual a cero pero no es el caso).

(b) **(7 puntos)** Identifique los valores de b y c.

Solución:

$$b_1 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 20$$
$$b_2 = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 30$$

Nota de corrección: Dos puntos por b

El valor $c_3 = 20$ y se puede obtener del objetivo $c_1 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + c_3 \cdot 3 + c_4 \cdot 0 = 140$.

Nota de corrección: Un punto por c_3

Luego, la base asociada al vértice x^0 es $B = \{2, 3\}$. Se puede obtener el resto de los costos desde la fórmula para costos reducidos de variables fuera de base $D = \{1, 4\}$:

$$r_D^T = c_D^T - c_B^T \bar{A}_D, \text{ con } \bar{A}_D = A_B^{-1} A_D$$

Nota de corrección: Dos puntos por identificar base e identificar que deben salir de la fórmula de costos red.

La inversa de la matriz básica es:

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\bar{A}_D = A_B^{-1} A_D = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$[-1, 5] = [c_1, c_4] - [10, 20] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

obteniendo que $c_1 = 9$ y $c_4 = 15$.

Nota de corrección: Dos puntos c_1 y c_4.

(c) **(7 puntos)** Utilice el algoritmo simplex e identifique todas las soluciones óptimas y valor óptimo del problema.

Solución: Ingresemos x_1 a la base, sale mín$\{8/0, 3/0.5\} = 6$, es decir, x_3. La nueva base es $B = \{1, 2\}$ con solución $x_1 = 6$ y $x_2 = 8$ (su tasa de cambio con respecto a x_1 era 0). Los nuevos costos reducidos no básicos son $r_D^T = [20, 15] - [9, 10]\bar{A}_D$ donde

$$\bar{A}_D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego se obtiene un vector de costos reducidos no básicos estrictamente positivo

$$r_D^T = [20, 15] - [9, 10] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [2, 6].$$

Por lo tanto, la solución óptima es única e igual a $x^* = (6, 8, 0, 0)$ con valor óptimo $v^* = 140 - 1 \cdot 6 = 134$.

Nota de corrección: Solo se otorgará puntaje si el ejercicio se resuelve utilizando Simplex. 2p por cambio de base (identificar índices de nueva base), 2p por recalcular solución y valor, 2p por costos reducidos y 1p por identificar qué solución es óptima y única.

(d) **(2 puntos)** ¿Cuánto cambia el valor óptimo del problema si el lado derecho de la primera restricción baja en una unidad (es decir, cambia a $b_1 - 1$).

Solución: Dos formas de contestar:

◇ Forma eficiente con precios sombra:

$$[y_1 y_2] = c_B^T A_B^{-1} = [9, 10] \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} = [17/5, 11/5].$$

El cambio de objetivo es $\Delta v^* = -1 \cdot y_1 = -17/5 = -3.4$.

◇ Recalculando solución y valor desde nuevo lado derecho:

$$\Delta v^* = v^*_{\text{new}} - 134 = c_B^T A_B^{-1} b_{\text{new}} - 134 = [9, 10] \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 30 \end{bmatrix} - 134 = -3.4$$

Nota de corrección: 1p por idea, 1p por ejecutar ok.

(e) **(2 puntos)** ¿En qué rango de valores puede estar c_3 para no alterar el conjunto de soluciones óptimas del problema identificado en (d)?

Solución: Debe bajar menos que su costo reducido, es decir: $\Delta c_3 < 2$. Luego, $c_1 > 20 - 2 = 18$.

Nota de corrección: 1p por idea, 1p por ejecutar ok.

Ayuda:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Pregunta 3 (10 puntos):

Identifique una solución óptima (como usted prefiera) del siguiente problema. Justifique.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -24x_1 - 20x_2 - 12x_3 + 20x_4 + 60x_5 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - x_2 - x_4 + 3x_5 \geq 1 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \leq 0 \\ & x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Tabla de dualidad:

Solución: El problema dual asociado es

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0 ≤ 0 Irrestrictas	$\leq$ $\geq$ $=$
Restricciones	Variables
$\leq$ $\geq$ $=$	≤ 0 ≥ 0 Irrestrictas

$$
\begin{aligned}
\text{máx } & y_1 + 10y_2 \\
\text{s.a. } & y_1 + 2y_2 \geq -24 \\
& -y_1 + y_2 \geq -20 \\
& y_2 \geq -12 \\
& -y_1 + 2y_2 \leq 20 \\
& 3y_1 + 4y_2 \leq 60 \\
& y_1 \geq 0 \\
& y_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Con ello, este es un problema en 2 variables que se puede graficar, encontrando la solución óptima en la intersección de la (4) y (5) restricción del problema dual, que es el punto $(y_1, y_2) = (4, 12)$ con valor de la función objetivo igual a $w = 124$. Con ello, usando el THC, podemos determinar que necesariamente en el óptimo tendremos que x_1, x_2 y x_3 son iguales a 0, ya que se encuentran asociadas a restricciones inactivas en el dual.

Luego el sistema a resolver para encontrar el valor del resto de las variables es:

$$
\begin{aligned}
-x_4 + 3x_5 - 1 &= 0 \\
2x_4 + 4x_5 - 10 &= 0
\end{aligned}
$$

El cual se resuelve de manera única con $x_4 = 2.6$ y $x_5 = 1.2$. Luego la solución óptima del problema es $x = (0, 0, 0, 2.6, 1.2)$ con valor óptimo $z = 124$.

Nota de corrección:

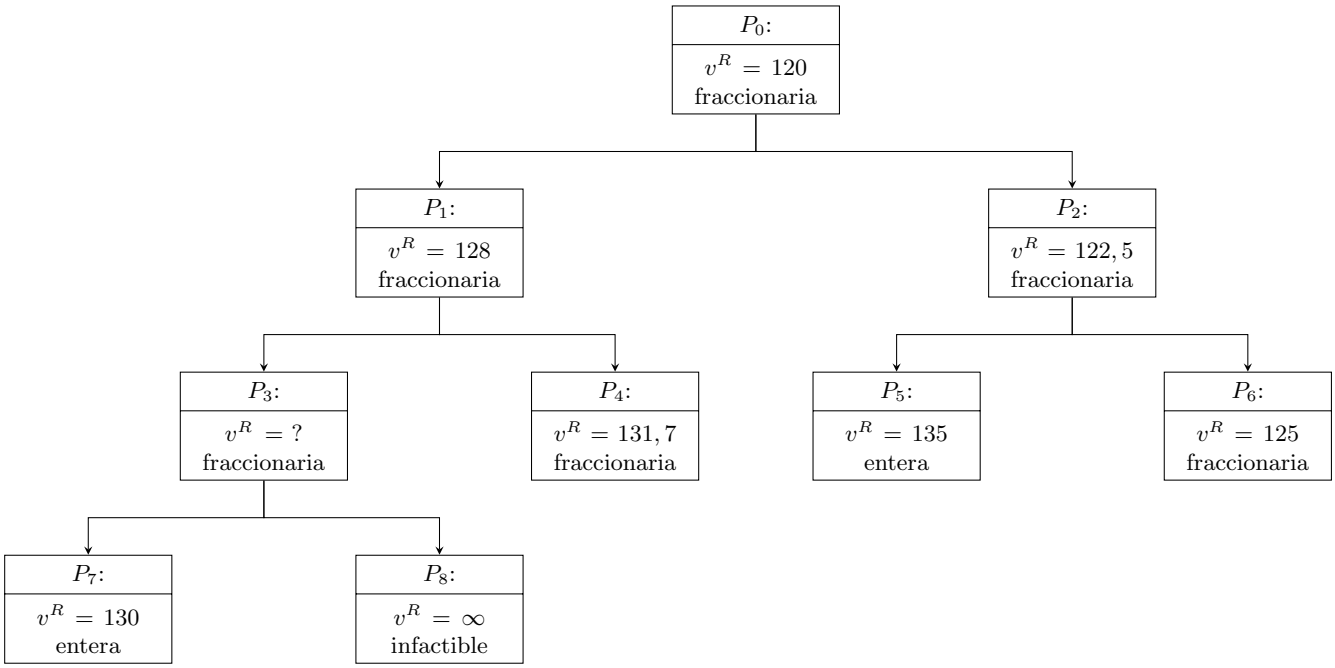
El problema puede ser resuelto por el método que el alumno prefiera. En la pauta se muestra mediante dualidad.

- ◇ 2 puntos por plantear correctamente el problema dual asociado. En caso de tener errores penalizar con 1 punto cada error.
- ◇ 3 puntos por identificar la solución óptima del problema dual (método gráfico, simplex u otra método que valide la solución óptima).
- ◇ 3 puntos por plantear las ecuaciones del THC
- ◇ 2 puntos por encontrar la solución al sistema y concluir la solución óptima del problema primal.

Nota de corrección: En el caso que el alumno no haya planteado el problema dual, si no que intentó resolverlo con Simplex en el problema primal, los 10 puntos se entregarán únicamente si llega a la base óptima y lo demuestra. Se entregará un máximo de 4 puntos en caso de haber quedado en alguna iteración intermedia de simplex, en donde se castigará con 1 punto cada error que pueda tener en su desarrollo.

Pregunta 4: B&B (10 puntos)

Considere el siguiente árbol que detalla la ejecución parcial del algoritmo Branch & Bound (B&B) sobre un problema de optimización lineal con variables enteras. Cada nodo P_k indica el valor óptimo de su relajación lineal (v^R) y el tipo de solución óptima relajada obtenida (entera, fraccionaria o infactible). El número de cada nodo corresponde a su orden de revisión: primero se resolvió la relajación lineal del nodo P_0, luego P_1, después P_2, y así sucesivamente. No asuma coeficientes enteros en la función objetivo.



Responda las siguientes preguntas:

(a) **(2 puntos)** ¿Es el problema de maximización o minimización? Justifique.

Solución: Minimización, ya que los valores óptimos de las relajaciones aumentan a medida que el árbol se ramifica.

(b) **(2 puntos)** ¿Qué estrategia se utiliza al explorar los nodos del árbol B&B? Justifique.

Solución: Se utilizó una estrategia de búsqueda en amplitud (Breadth First Search o BFS), es decir, se resuelven primero los nodos de menor profundidad.

(c) **(2 puntos)** ¿En qué rango de valores está el valor óptimo relajado de P_3?

Solución: $128 \leq v^R \leq 130$. 1 punto por cada cota

(d) **(2 puntos)** Determine las mejores cotas (inferior y superior) al valor óptimo del problema entero después de haber resuelto P_8. ¿Podría el valor óptimo ser 124? Justifique.

Solución: La mejor cota inferior es $v_{LB} = 125$, mientras que la cota superior es $v^I = 130$. No, el valor óptimo no puede ser 124, debe estar entre 125 y 130.

(e) **(2 puntos)** ¿Qué nodos deben ser ramificados y podados después de resolver P_8? Justifique.

Solución: Los nodos P_4, P_5, P_7 y P_8 deben estar podados (valor relajado mayor al incumbente, por ser entero, por ser entero y por ser infactible, respectivamente).

El nodo P_6 debe seguir ramificándose.

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por identificar donde podar y ramificar.
- ◇ 1 punto por justificar correctamente.