PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso:	ICS1113 - Optimización
Semestre:	2024 - 1
Profesores:	G. Angulo - C. Balbontin R. Cuadrado - G. Pérez

Examen

Duración: 120 minutos.

Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- Deben responder cada **pregunta en hojas separadas**.
- La evaluación es **individual**.
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Examen". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después de terminar el tiempo de desarrollo de la prueba.
- **Debe entregar la prueba física antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad**.
- Está **prohibido el uso de dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la prueba. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su prueba a CANVAS.
- Está **prohibido el uso de calculadora**.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.
- Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2024 - 1
Profesores: G. Angulo - C. Balbontin
R. Cuadrado - G. Pérez

Examen
Duración: 120 minutos.

Pregunta 1 (15 puntos)

Se le ha asignado la tarea de determinar dónde y cuántas antenas de telecomunicaciones instalar en la isla Campbell. Sus asesores le han entregado el conjunto I con los puntos de interés que requieren tener cobertura con las nuevas antenas, en donde los parámetros $\alpha_i > 0$ y $\beta_i > 0$ determinan las coordenadas en el plano X-Y en kilómetros del punto de interés $i \in I$. Por temas de seguridad y redundancia en los datos, usted requiere que cada punto de interés esté dentro de la cobertura de al menos dos antenas, en donde cada antena genera un radio de cobertura de r kilómetros a la redonda. A su vez, por temas de interferencia, cada antena no puede estar a menos de ϵ kilómetros de otra antena. Considere que cada antena instalada tiene un costo de instalación de γ pesos. Construya un modelo de programación no lineal en variables mixtas, con el cual pueda minimizar los costos totales y cumplir con las restricciones anteriormente planteadas.

Nota: Usted puede calcular como parámetro la cantidad máxima de antenas a instalar.

Solución:

Asignación Puntaje:

- **(0,5 puntos)**: Definición de cada variable incluyendo su naturaleza en la modelación.
- **(1 puntos)**: Cálculo cantidad máxima de antenas en peor escenario
- **(2 puntos)**: Función objetivo
- **(2 puntos)**: Por restricción (R1 a R5)

Variables de decisión:

- X_j: Coordenada en el eje X de la antena j
- Y_j: Coordenada en el eje Y de la antena j
- $W_j \in \{0, 1\}$: 1 si la antena j es instalada, 0 e.o.c.
- $Z_{ij} \in \{0, 1\}$: 1 si el punto i esta dentro del radio de cobertura de la antena j, 0 e.o.c.

Parametros Auxiliar

- M: número positivo entero grande
- J: cantidad máxima de antenas, calculado como 2*card(I)

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^{J} W_j \cdot \gamma$$

s.a.

$$\sqrt{(X_j - \alpha_i)^2 + (Y_j - \beta_i)^2} \leq Z_{ij} \cdot r + M(1 - Z_{ij}) \quad \forall i \in I, j = 1...J \quad \text{(R1: Chequeo radio de cobertura ante}$$

$$\sum_{j=1}^{J} Z_{ij} \geq 2 \quad \forall i \in I \quad \text{(R2: asignacion antena-punto)}$$

$$X_j + Y_j \leq M \cdot W_j \quad \forall j = 1...J \quad \text{(R3: activación antena)}$$

$$\sqrt{(X_j - X_{j'})^2 + (Y_j - Y_{j'})^2} \geq \epsilon \cdot W_j \cdot W_{j'} \quad \forall j = 1...J, j' = 1...J : j \neq j' \quad \text{(R4: Distancia mínima entre ante}$$

$$Z_{ij} \leq W_j \quad \forall i \in I, j = 1...J \quad \text{(R5: Asignar antena solo si esta instalada)}$$

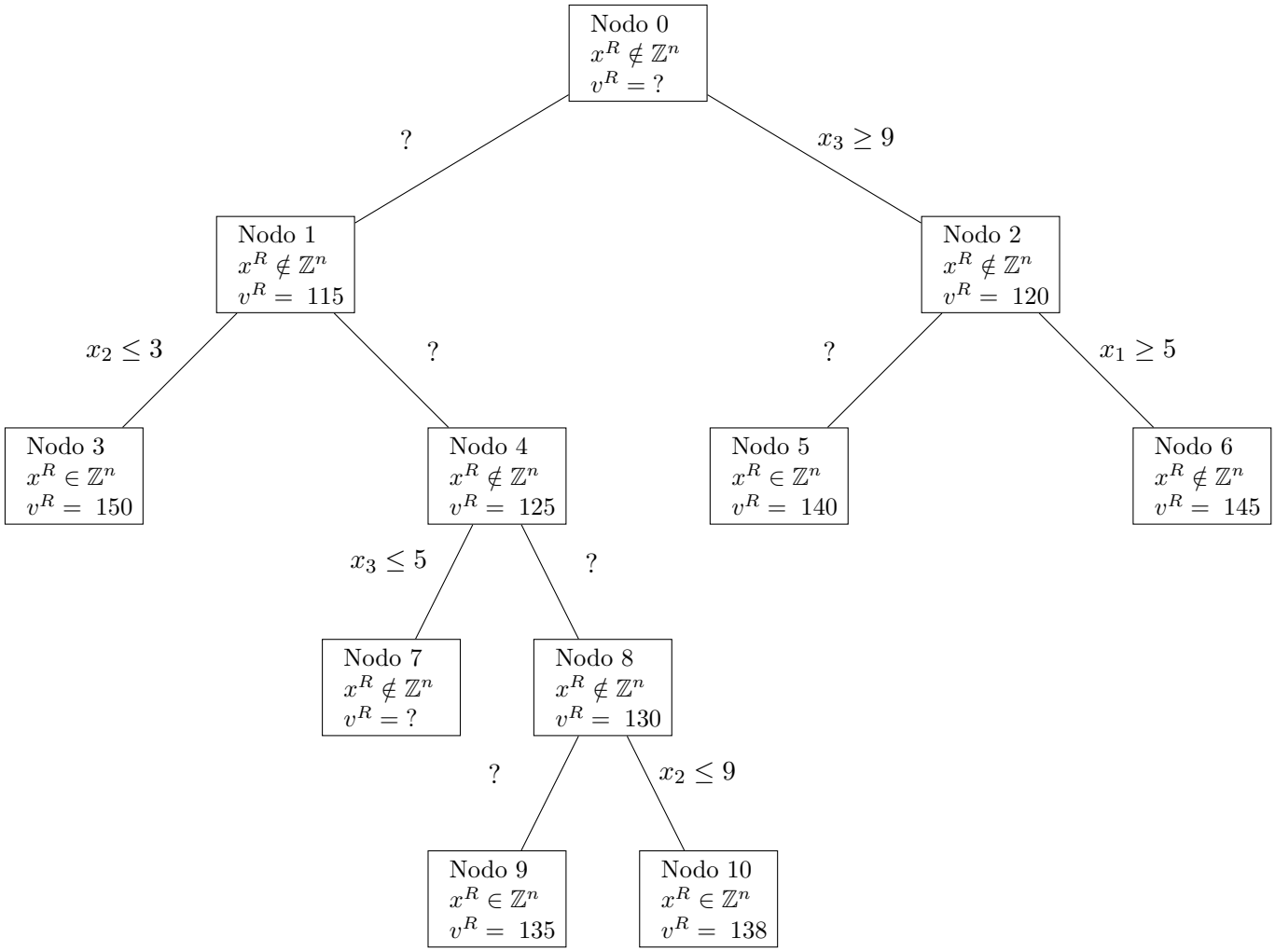
$$X_j, Y_j \geq 0 \quad \forall j = 1...J$$

$$W_j \in \{0, 1\} \quad \forall j = 1...J$$

$$Z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j = 1...J$$

Pregunta 2 (15 puntos)

(a) **(10 puntos)** Considere un problema de programación lineal entera. El árbol asociado al algoritmo de *branch & bound* ejecutado hasta encontrar su solución óptima se presenta a continuación. El número de cada nodo corresponde al orden en el que el nodo fue explorado. Es decir que el nodo 0 se exploró primero, luego se exploró el nodo 1, luego el 2 y así sucesivamente.



Algunas informaciones del árbol han sido removidas (no se muestran o aparecen con el símbolo "?"). Considerando la información disponible y sabiendo que todas las podas fueron por cota o por integralidad, responda las siguientes preguntas.

(i) **(1 punto)**¿El problema es de maximización o minimización? ¿Por qué?

Solución: Minimización porque los valores óptimos de las relajaciones van aumentando.

Asignación Puntaje:

- ◇ 0.5 puntos por indicar el sentido.
- ◇ 0.5 puntos por el argumento (en base al valor óptimo de las relajaciones).

(ii) **(1 punto)**¿Qué rango de valores puede tomar x_2 en la relajación lineal del problema del nodo 10?

Solución: $4 \leq x_2 \leq 9$

Asignación Puntaje:

- ◇ 1 punto por determinar el rango.

(iii) **(3 puntos)** ¿Cómo se fue actualizando el valor incumbente? Detalle el valor del incumbente en cada nodo.

Solución: En los nodos 0,1,2,3,5,6,7,8,9 y 10: $+\infty, +\infty, +\infty, 150, 150, 140, 140, 140, 140, 135, 135$.

Asignación Puntaje:

- ◇ 3 puntos por indicar claramente el valor de los incumbentes en cada nodo.

◇ Aplicar un descuento gradual (0.5 puntos por error) an base a errores en los valores. Queda a criterio del corrector la asignación de puntaje parcial dependiendo de si hay un error de arrastre.
En caso de haber hecho el cálculo "antes" de explorar los nodos, ponerlo correcto también. En ese caso la solución es $+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, 150, 150, 140, 140, 140, 140, 135$.

(iv) **(2 puntos)** ¿En qué rango puede estar el valor óptimo de la relajación lineal asociada al problema del nodo 7?

Solución: Debe haber sido un valor igual o superior a 140 para que haya sido podado por cota.

Asignación Puntaje:

◇ 2 puntos por el valor (no es necesario haber puesto el argumento).

(v) **(1 punto)**¿En qué rango puede estar el valor óptimo de la relajación lineal del problema original?

Solución: Su valor debe haber sido menor o igual a 115. Por otro lado, notar que su valor debe haber sido finito dado que se tiene solución óptima y estamos trabajando con parámetros con valores racionales.

Asignación Puntaje:

◇ 1 punto por el valor (no es necesario haber puesto el argumento).

(vi) **(2 puntos)** ¿Cuánto vale la mejor cota inmediatamente después de haber explorado el nodo 8?

Solución: 130

Asignación Puntaje:

◇ 2 puntos por el valor (no es necesario haber puesto el argumento). Ponerlo correcto también si se hizo considerando el "antes" de resolver el nodo. En ese caso la cota es 125.

(b) **(5 puntos)** Considere el siguiente problema:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{6} c_i x_i$$

s. a:

$$8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + 7x_6 \leq 10$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(i) **(1 punto)**Construya la relajación lineal de este problema.

Solución:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{6} c_i x_i$$

s. a:

$$8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 + 7x_6 \leq 10$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Asignación Puntaje:

- ◇ 1 punto por formular la relajación lineal correctamente. Considerar correcto también si escriben que es el mismo problema pero indican claramente que el único cambio es relajar las restricciones de que sean binarias y se indican las restricciones nuevas asociadas.

(ii) **(4 puntos)** Construya una desigualdad válida para el problema entero que corte alguna solución fraccionaria de la relajación lineal.

Solución:

Podemos generar el cover $C = \{1, 6\}$ y así tenemos la desigualdad de cubrimiento $x_1 + x_6 \leq 1$, la cual es una desigualdad válida y podemos notar que, por ejemplo, corta la solución $x^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$ del dominio de la relajación lineal.

Asignación Puntaje:

- ◇ 2 puntos por poner una desigualdad válida. En caso de que hayan puesto más de una, considerar la primera solamente.
- ◇ 2 puntos por mostrar que se corta una solución fraccionaria.

Pregunta 3 (15 puntos)

Considere el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 4. \end{aligned}$$

(a) **(5 puntos)** Explique si el problema tiene solución óptima usando alguno de los teoremas vistos en el curso y escriba las condiciones de KKT.

Solución: TBW: La función es continua sobre el dominio, el dominio es cerrado y no vacío, y es una función coercitiva, por lo que admite al menos una solución óptima.

La función de Lagrange es la siguiente:

$$L_{x_1 \geq 0}(x, \mu) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 + \mu_1(x_1 - x_2 - 2) + \mu_2(x_2 - 4)$$

Las condiciones de KKT son las siguientes:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x_1} = 2(x_1 - 2) + \mu_1 \geq 0$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x_1} x_1 = (2(x_1 - 2) + \mu_1)x_1 = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x_2} = 2(x_2 - 6) - \mu_1 + \mu_2 = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mu_1} = x_1 - x_2 - 2 \leq 0$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mu_1} \mu_1 = (x_1 - x_2 - 2)\mu_1 = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mu_2} = x_2 - 4 \leq 0$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mu_2} \mu_2 = (x_2 - 4)\mu_2 = 0$$
$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Nota: Sería igual de correcto si consideran la restricción de no-negatividad como parte del problema y definen un μ_3.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 puntos)**: Explicación correcta de existencia de solución con TBW
- ◇ **(1 puntos)**: Función Lagrange correcta (igualmente bien si agregan la no-negatividad en el L)
- ◇ **(1 puntos)**: Derivadas con respecto a x_1. Asignar mismo puntaje en caso que hayan agregado la no-negatividad como restricción en L y hayan derivado correctamente con respecto a x_1 (es decir, $= 0$) y a μ_3 (que sería equivalente a las derivadas de μ_1 o μ_2 de arriba).
- ◇ **(0,5 puntos)**: Derivadas con respecto a x_2
- ◇ **(0,5 puntos)**: Derivadas con respecto a μ_1
- ◇ **(0,5 puntos)**: Derivadas con respecto a μ_2
- ◇ **(0,5 puntos)**: μ_1, $\mu_2 \geq 0$. En caso de haber agregado la no-negatividad al L, entonces además que $\mu_3 \geq 0$

(b) **(7 puntos)** La solución óptima se encuentra donde solamente la tercera restricción está activa (las otras dos no están activas). Encuentre la solución óptima e identifique los multiplicadores asociados.

Solución: Si R3 está activa solamente, esto implica que: $x_2 = 4, \mu_2 > 0, \mu_1 = 0, x_1 > 0$.
Despejando en las condiciones llegamos a la solución óptima de: $(x_1, x_2) = (2, 4)$, donde los multiplicadores de Lagrange son $(\mu_1, \mu_2) = (0, 4)$.
En el caso que hayan agregado la restricción de no-negatividad en la función de Lagrange, el μ_3 asociado a ella sería igual a 0 porque no está activa.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(2 puntos)**: Identificar adecuadamente que $x_2 = 4$, por lo que $\mu_2 > 0$
- ◇ **(2 puntos)**: Identificar adecuadamente que si $x_1 > 0$, entonces $\mu_1 = 0$.

- ◇ **(1,5 puntos)**: Despejar y obtener la solución óptima (2,4)
- ◇ **(1,5 puntos)**: Identificar los multiplicadores (0,4). En caso de tener definido el μ_3 representando no-negatividad, debería también ser igual a 0.

(c) **(3 puntos)** Identifique si la solución (0,4) es regular, factible y si cumple las condiciones KKT. A partir de esta información, identifique si es un mínimo local.

Solución: En este punto las restricciones activas serían la segunda y tercera, por lo que la matriz Jacobiana es igual a:

$$J(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es de rango 2 (completo), por lo que es un punto regular. Es factible porque satisface las restricciones. Sin embargo, no cumple las condiciones de KKT por lo que podríamos decir que no es un mínimo local.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(0,5 puntos)**: Identificar cuáles restricciones están activas en este punto (si no lo explicitan pero definen adecuadamente la matriz Jacobiana estaría bien porque implícitamente ponen cuáles restricciones están activas)
- ◇ **(1 puntos)**: Definir adecuadamente la matriz Jacobiana y decir que es un punto regular.
- ◇ **(0,5 puntos)**: Decir que es factible porque satisface las restricciones
- ◇ **(1 puntos)**: Decir que no cumple las condiciones de KKT por lo que no es mínimo local.

Pregunta 4 (15 puntos)

(a) **(4 puntos)** Considere un problema de optimización donde el lado derecho de una de sus restricciones de desigualdad disminuye. Sin necesidad de justificar, complete la siguiente tabla indicando el sentido de la desigualdad de dicha restricción ($\leq$ ó $\geq$), según el cambio en el valor óptimo y el sentido de la optimización.

Cambio en el valor óptimo	Maximizar	Minimizar
≤ 0		
≥ 0		

Solución:

Cambio en el valor óptimo	Maximizar	Minimizar
≤ 0	$\leq$	$\geq$
≥ 0	$\geq$	$\leq$

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 punto)**: por cada desigualdad correcta

(b) **(3 puntos)** Explique por qué en general no se consideran desigualdades estrictas en las restricciones que definen la región factible de un problema de optimización.

Solución: En general, es deseable que la región factible sea cerrada para evitar situaciones donde el valor óptimo sea finito, pero no sea alcanzado por ninguna solución factible. En particular, cuando las funciones que definen las restricciones son continuas, las igualdades y desigualdades no estrictas definen conjuntos cerrados a menos que sea todo el espacio.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1,5 puntos)**: explicar relevancia de dominio cerrado
- ◇ **(1,5 puntos)**: explicar el caso de funciones continuas en la restricciones

(c) **(3 puntos)** Indique cómo se define el valor óptimo de un problema de maximización. Por convención, ¿cuál debería ser dicho valor si el problema es infactible o no acotado?

Solución: En este caso, el valor óptimo es la menor cota superior para el valor objetivo de cualquier solución factible. Si el problema es infactible, se define como $-\infty$. Si el problema es no acotado, se define como $+\infty$.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(2 puntos)**: Definición valor óptimo
- ◇ **(0,5 puntos)**: Cada convención

(d) **(3 puntos)** Suponga que después de haber resuelto un problema de optimización, usted agrega una restricción que elimina la solución óptima encontrada. ¿Es verdad que el valor óptimo del problema modificado cambia? Justifique claramente.

Solución: No necesariamente, en particular, cuando hay múltiples soluciones óptimas. Por ejemplo, $\text{mín}\{x_2 : \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0\}$ admite a $(0, 0)$ como solución óptima con valor 0. Si agregamos la restricción $x_1 + x_2 \geq 1$, la solución anterior es eliminada, pero el valor óptimo se mantiene.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 punto)**: Indicar que es falso
- ◇ **(2 puntos)**: Contraejemplo específico o justificación detallada en el caso general de múltiples soluciones.

(e) **(2 puntos)** En el contexto de branch-and-bound, explique qué trata de estimar el gap de optimalidad, independientemente de la fórmula utilizada, y cuál es su utilidad práctica.

Solución: El gap de optimalidad acota superiormente la diferencia relativa entre el valor incumbente y la mejor cota dual. Así, permite detener la ejecución del algoritmo cuando dicha diferencia sea suficientemente pequeña considerando el problema y su aplicación.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 punto)**: Indicar diferencia relativa
- ◇ **(1 punto)**: Indicar detención temprana del algoritmo