PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2016
Profesores: G.Angulo - A.Lorca - A.Cataldo
R.Cuadrado - S.Encina
JT.Marquínez - F.Palominos

Interrogación 3

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) Sea $X = \{x \in \{0,1\}^7 : \ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 8x_7 \leq 10\}$

(i) **(4 puntos)** Muestre que las desigualdades $x_2 + x_3 + x_5 \leq 2$ y $x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 2$ son válidas para X.

Solución: Como $C := \{2, 3, 5\}$ es un cubrimiento, tenemos que $x_2 + x_3 + x_5 \leq 2$ es válida para X. Ahora, como los objetos 6 y 7 tienen un peso mayor que el elemento más pesado de C, tenemos que $x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 2$ es válida para X.

(ii) **(3 puntos)** Si tuviese que agregar solamente una de las desigualdades anteriores a la relajación lineal de X, ¿cuál eligiría? Argumente.

Solución: Como las variables son no negativas, tenemos que la segunda desigualdad implica la primera. Por lo tanto, la segunda desigualdad es más fuerte y por lo tanto es preferible con respecto a la primera.

(b) (i) **(3 puntos)** Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ -y \leq -1, \ x + 2y \leq 4, \ -x + 2y \leq 4\}$. Analíticamente, muestre que $x \leq 2$ es válida para P y por lo tanto no existe solución en P con $x = 3$.

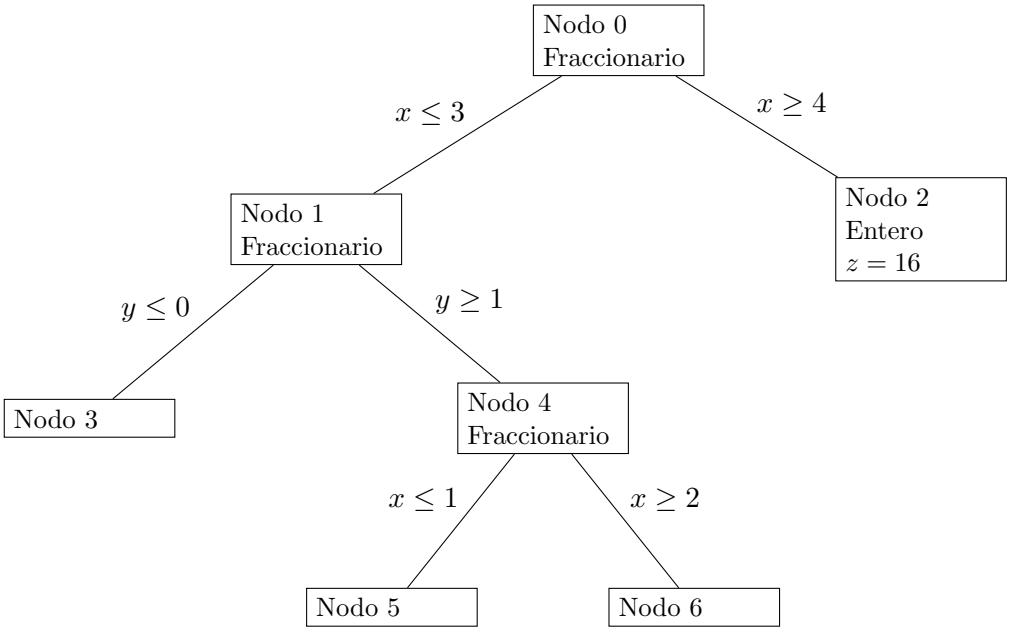
Solución: Multiplicando la primera desigualdad por 2 y sumándola a la segunda, obtenemos $x \leq 2$. Luego, todas las soluciones en P deben cumplir esta desigualdad, y en particular, no hay soluciones con $x = 3$.

(ii) **(5 puntos)** Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : \ Tx + Wy \leq h\}$ un poliedro no vacío y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que no existe solución en P con $x = \bar{x}$. Muestre que existe $\pi \geq 0$ con $\pi^\top W = 0$ tal que la desigualdad $\pi^\top Tx \leq \pi^\top h$ es violada si $x = \bar{x}$. Como indicación, note que maximizar la función cero sobre un poliedro vacío es infactible.

Solución: Tenemos que no existe $y \in \mathbb{R}^p$ tal que $Wy \leq h - T\bar{x}$. Luego, el problema máx$\{0^\top y : \ Wy \leq h - T\bar{x}\}$ es infactible. Por dualidad, el problema mín$\{\pi^\top(h - T\bar{x}) : \ \pi^\top W = 0, \ \pi \geq 0\}$ es infactible o no acotado. Como $\pi = 0$ es factible para el dual, tenemos que el dual necesariamente es no acotado. Luego, existe $\pi \geq 0$ con $\pi^\top W = 0$ tal que $\pi^\top(h - T\bar{x}) < 0$, y por lo tanto la desigualdad $\pi^\top Tx \leq \pi^\top h$ es violada por $x = \bar{x}$.

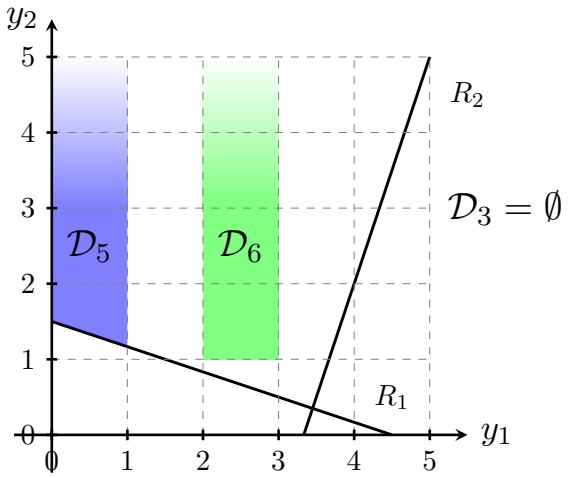
Pregunta 2 (15 puntos)

(a) Considere el problema mín$\{x + 6y : \ 2x + 6y \geq 9, \ 3x - y \leq 10, x \in \mathbb{Z}_+, y \in \mathbb{Z}_+\}$. Al resolver mediante branch-and-bound, se llega al siguiente árbol parcial, donde los nodos 3, 5 y 6 aún no han sido resueltos.



(i) **(3 puntos)** En un mismo gráfico, dibuje los poliedros asociados a los nodos 3, 5 y 6 (note que la restricción $3x - y \leq 10$ es redundante si $y \geq 0$ y $x \leq 3$).

Solución: El dominio del nodo i se presenta graficado como $\mathcal{D}_i$ en el gráfico a continuación. Notar que $\mathcal{D}_3$ es un poliedro vacío.



(ii) **(3 puntos)** Sin generar más nodos, determine el valor óptimo del problema. Justifique su razonamiento.

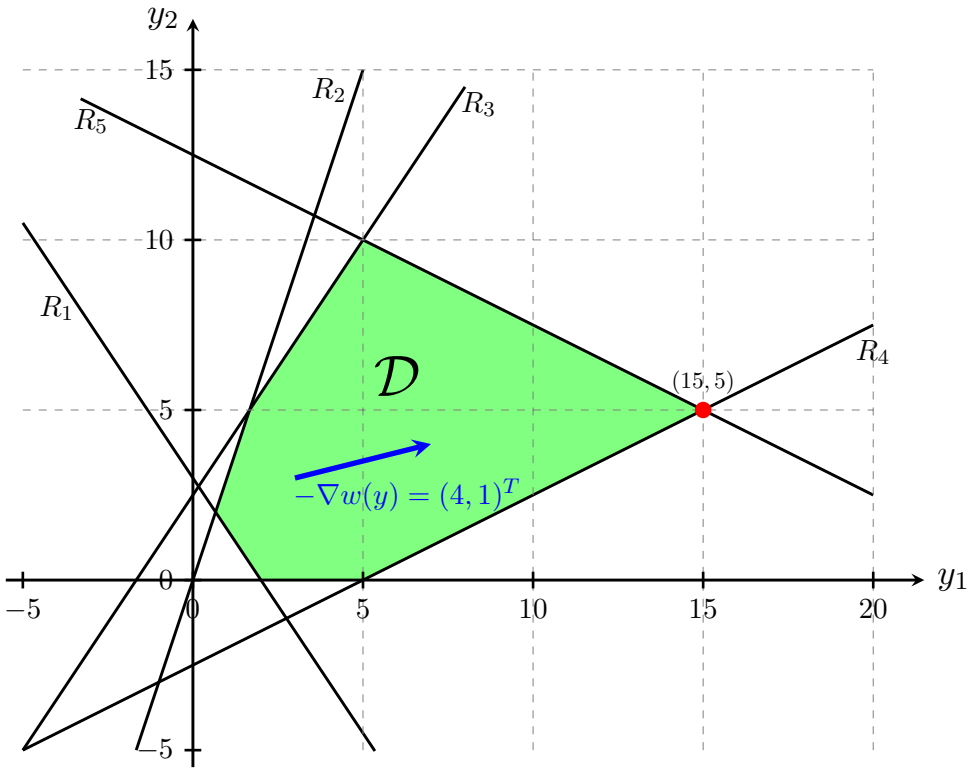
Solución: El nodo 3 es infactible, por lo que se poda. El valor óptimo de los nodos 5 y 6 es 8. Sin embargo, la solución óptima del nodo 6 es integral, por lo que pasa a ser el incumbente y provoca la poda del nodo 5. Finalmente, el valor óptimo del problema es 8.

(b) Considere el siguiente problema de optimización P).

$$
\begin{array}{lll}
P) \quad \text{máx} & 6x_1 + 5x_3 - 5x_4 + 25x_5 & \\
\text{s.a.} & 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 & \leq -4 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 & \leq -1 \\
& x_1, x_4 & \geq 0 \\
& x_2, x_3, x_5 & \leq 0
\end{array}
$$

(i) **(3 puntos)** Encuentre el valor óptimo de este problema.
Solución: El problema dual corresponde a:

$$
\begin{array}{lll}
D) \quad \text{mín} & -4y_1 - 1y_2 & \\
\text{s.a.} & 3y_1 + 2y_2 & \geq 6 \\
& -6y_1 + 2y_2 & \leq 0 \\
& -3y_1 + 2y_2 & \leq 5 \\
& -y_1 + 2y_2 & \geq -5 \\
& y_1 + 2y_2 & \leq 25 \\
& y_1, y_2 & \geq 0
\end{array}
$$



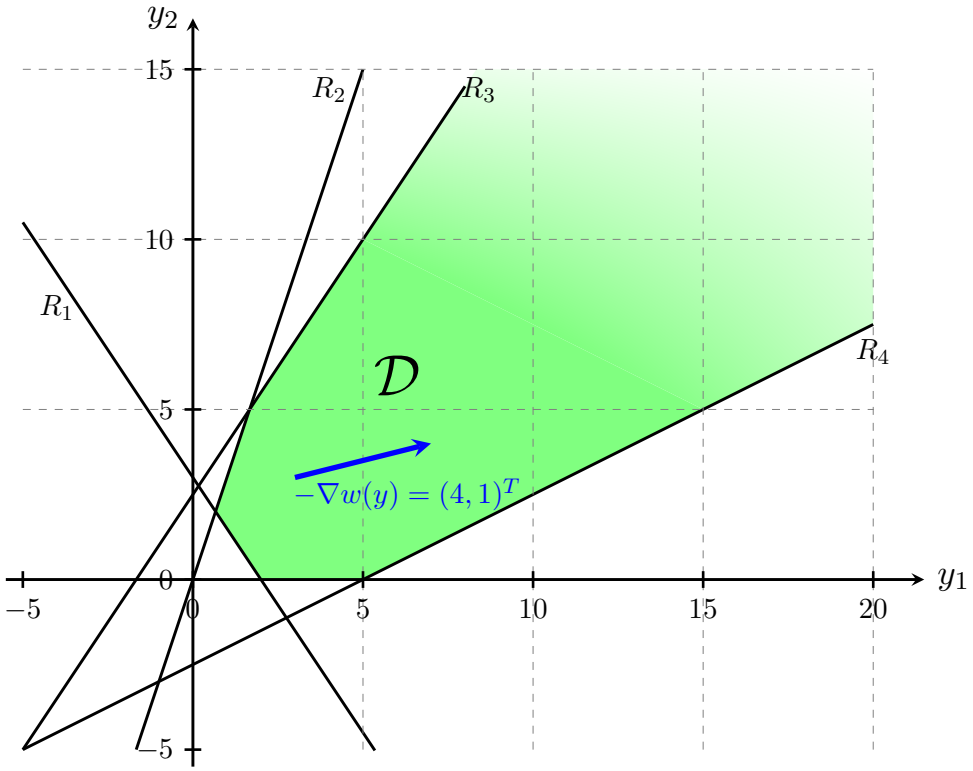
Gráficamente nos damos cuenta que el óptimo se encuentra en el punto que intersecta las restricciones (4) y (5). Esto se da en el punto (15,5), alcanzando el valor óptimo de -65. Luego como el problema dual es acotado, y el problema primal es factible, por el teorema fuerte de dualidad podemos garantizar que el valor óptimo del problema primal es de -65.

(ii) **(3 puntos)** ¿En cuánto varía el valor óptimo del problema si modificamos el valor del lado derecho de la primera restricción de -4 a -3?

Solución: En el óptimo del problema dual, la variable dual asociada a la primera restricción toma el valor de 15, por lo tanto el valor óptimo del problema primal se ve modificado en $15 \cdot 1 = 15$ unidades. Gráficamente nos podemos dar cuenta que en el problema dual,

la solución óptima del problema no varía, por lo que nos encontraríamoss dentro de los límites de sensibilidad.

(iii) **(3 puntos)** Demuestre que, al forzar la variable $x_5 = 0$, el problema queda infactible.
Solución: Al forzar $x_5 = 0$ es lo mismo que eliminar la variable x_5 del sistema inicial, con lo que en el problema dual la restricción (5) desaparecería. Con ello gráficamente se demuestra que el problema queda no acotado.



Luego como el problema dual es no acotado, por corolario del teorema débil de la dualidad, el problema primal necesariamente debe ser infactible.

Pregunta 3 (15 puntos)

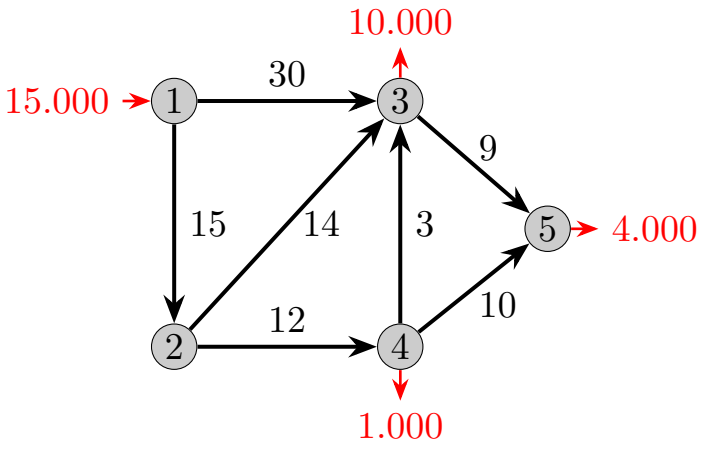
La Aerolínea MATAL está analizando los costos existentes de diversas rutas entre 5 ciudades (enlistadas del 1 al 5), en busca de determinar cómo sería la mejor manera de distribuir a los pasajeros entre estas ciudades a menor costo posible. A partir de todos los tramos dirigidos existentes entre esas ciudades, definieron el vector variable x asociado al problema. Así, al considerar la demanda de vuelos desde la ciudad 1 hacia todas las otras ciudades para un período en particular, han llegado al siguiente problema de optimización, asociado a un problema de flujo a costo mínimo:

$$
\begin{array}{llrrrrrrrcrl}
\textit{PFCM}) & \text{mín} & \multicolumn{7}{l}{15x_{12} + 30x_{13} + 14x_{23} + 12x_{24} + 9x_{35} + 3x_{43} + 10x_{45}} & & & \\
\text{s.a.} & & x_{12} & +x_{13} & & & & & & = & 15.000 & \text{(Ciudad 1)} \\
 & & -x_{12} & & +x_{23} & +x_{24} & & & & = & 0 & \text{(Ciudad 2)} \\
 & & & -x_{13} & -x_{23} & & +x_{35} & -x_{43} & & = & -10.000 & \text{(Ciudad 3)} \\
 & & & & & -x_{24} & & +x_{43} & +x_{45} & = & -1.000 & \text{(Ciudad 4)} \\
 & & & & & & -x_{35} & & -x_{45} & = & -4.000 & \text{(Ciudad 5)} \\
 & & x_{12}, & x_{13}, & x_{23}, & x_{24}, & x_{35}, & x_{43}, & x_{45} & \geq & 0 & \text{(N.V. y cotas).}
\end{array}
$$

Como sugerencia, construya la red $G(N, A)$ asociada a este problema.

(a) (2 puntos) Considere la solución dada por $x_{12} = 15.000, x_{13} = 0, x_{23} = 10.000, x_{24} = 5.000, x_{35} = 0, x_{43} = 0$ y $x_{45} = 4.000$. ¿Es esta la base óptima? Argumente adecuadamente sin considerar la pregunta (b).

Solución: El grafo asociado al problema es el siguiente, en que los costos se muestran sobre los arcos y los flujos exógenos en rojo:



En esta solución, las variables básicas (que generan el árbol básico) son x_{12}, x_{23}, x_{24} y x_{45}. Así, las variables no básicas son x_{13}, x_{35} y x_{43}.

Calculemos el valor de las variables duales, para luego calcular los costos reducidos de los arcos no básicos:

$$\begin{array}{l} \bar{c}_{12} = 15 - \pi_1 + \pi_2 = 0 \\ \bar{c}_{23} = 14 - \pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \bar{c}_{24} = 12 - \pi_2 + \pi_4 = 0 \\ \bar{c}_{45} = 10 - \pi_4 + \pi_5 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -14 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{lll} \bar{c}_{13} = & 30 - (15) + (-14) = 1 & \geq 0 \quad (l) \\ \bar{c}_{35} = & 9 - (-14) + (-22) = 1 & \geq 0 \quad (l) \\ \bar{c}_{43} = & 3 - (-12) + (-14) = 1 & \geq 0 \quad (l) \end{array}$$

Dado que todos los arcos no básicos cumplen con el criterio de optimalidad de Simplex, se tiene que la solución entregada corresponde a la base óptima.

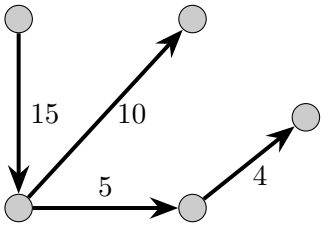
(b) (2 puntos) Considere el árbol generador que considera los arcos (1,2), (1,3), (4,3), y (3,5). ¿Está asociado a la base óptima? Argumente adecuadamente sin considerar lo que sabe de la pregunta (a).

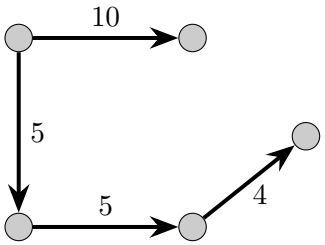
Solución: Si bien se podría decir que la base óptima se encontró en (b) y que, por lo tanto, este árbol no podría corresponder a la base óptima por eso mismo, esa respuesta no es válida porque estaríamos usando información de (b).

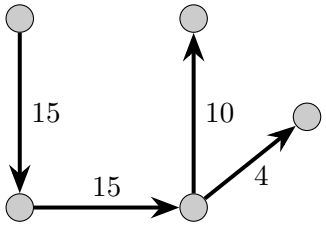
Sin embargo, es fácil darse cuenta de que este árbol generador no corresponde a una base factible, dado que no hay arco que lleve flujo hacia 4. Para satisfacer las ecuaciones, x_{43} tendría que ser -1.000, lo que no es factible.

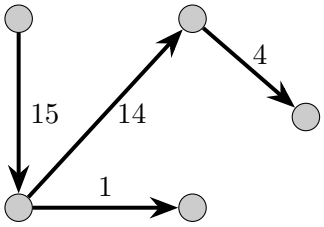
(c) (3 puntos) Muestre una base factible no óptima que se encuentre a dos cambios de base de distancia de la base óptima. Justifique claramente su desarrollo.

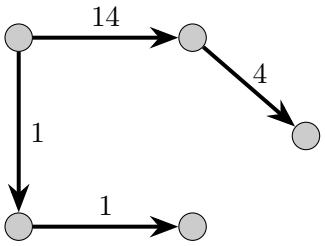
Solución: Una vez que se descubre que los arcos (1,2) y (1,4) deben estar en la base para la factibilidad, existen en total 6 bases factibles, de las cuales podrían utilizar 2 como respuesta (el resto están a menos de dos cambios de base de distancia). Todos los flujos presentados se encuentran divididos en 1.000:

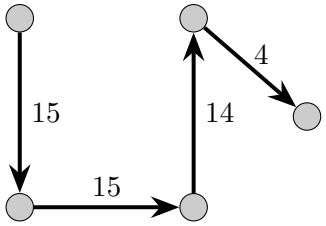
<table>
<tr>
<td>

Esta es la base óptima: 0 cambios de base de distancia.</td>
<td>

1 cambio de base de distancia: x_{23} por x_{13}</td>
<td>

1 cambio de base de distancia: x_{23} por x_{43}</td>
</tr>
<tr>
<td>

1 cambio de base de distancia: x_{45} por x_{35}</td>
<td>

2 cambios de base de distancia: x_{23} por x_{13} y x_{45} por x_{35}. Posible respuesta correcta.</td>
<td>

2 cambios de base de distancia: x_{23} por x_{43} y x_{45} por x_{35}. Posible respuesta correcta.</td>
</tr>
</table>

(d) (2 puntos) ¿En cuánto debe disminuir c_{35} (el costo asociado al tramo (3,5)) para que la solución cambie? Justifique con cálculos.

Solución: Para ello, lo primero es notar que se trata de un costo no básico, por lo que los valores de las variables π calculadas en (a) se mantienen. Así, sólo es necesario calcular el costo reducido del arco asociado, buscando que la solución cambie:

$$\bar{c}_{35} = c_{35} - (-14) + (-22) = c_{35} - 8 < 0 \ (l).$$

Entonces, c_{35} debe ser menor a 8 para que la solución cambie, lo que indica que c_{35} debe disminuir en más de 1 unidad para que cambie.

(e) (2 puntos) MATAL está considerando ingresar un nuevo tramo aéreo, que va directo de la ciudad 1 a la ciudad 5. ¿Cuánto debe ser el costo de este tramo para que los pasajeros prefieran utilizarla? Argumente adecuadamente.

Solución: Al agregar un nuevo arco ante la solución óptima, ese nuevo arco está llevando 0 pasajeros (flujo). Así, debe tratarse como un arco no básico. El costo reducido del arco (1,5) es

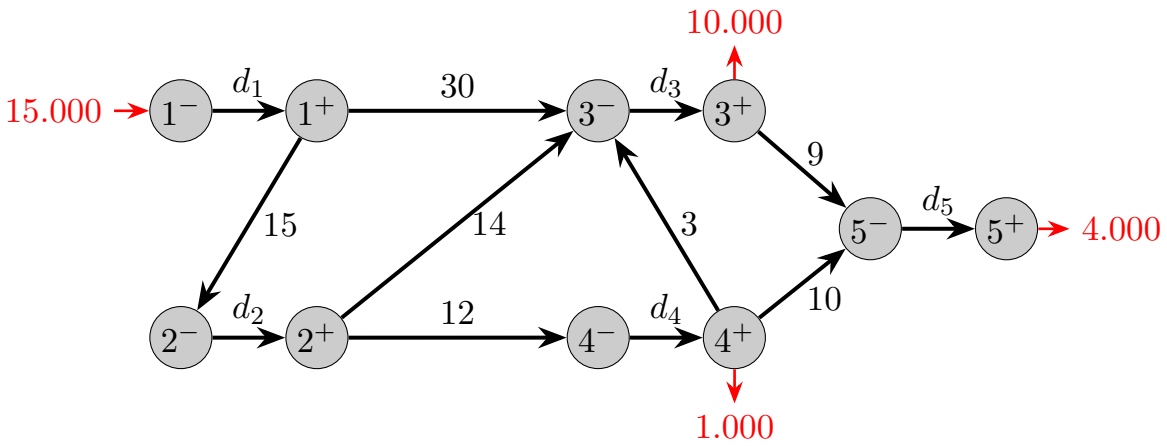
$$\bar{c}_{15} = c_{15} - (15) + (-22) = c_{15} - 37,$$

que debe ser < 0 para que esta base no sea óptima y sea necesario que entre a la base, aumentando su flujo (aumentando la cantidad de pasajeros que la usarían). Entonces, el costo debe ser menor que 37.

El gerente desea que el modelo sea más fiel a la realidad. Para ello, pidió modificar el problema considerando las tasas de embarque que cobran los aeropuertos en cada una de las ciudades. Es decir, ahora el hecho de que un pasajero pase por un nodo implicaría un costo mayor en su viaje y, por lo tanto, para la aerolínea. Este costo es conocido, y es d_i el total que debe pagar MATAL por cada pasajero que pasa por el nodo i.

(f) (4 puntos) Modele la situación anterior **diseñando un grafo o red** que permita resolver esta nueva situación como un problema de flujo a costo mínimo. Para ello, explicite todos los nodos, arcos, flujos exógenos y costos en la red a diseñar. Puede asumir que las cotas se mantienen en $(l_{ij}, u_{ij}) = (0, \infty), \forall (i, j)$.

Solución: Partimos aclarando que esta modelación no es la única posible. Dado que los costos están asociados a arcos en el problema de flujo a costo mínimo, los costos d_i deben estar asociados a arcos nuevos. Para ello, cada nodo i será dividido en dos nodos (i^- e i^+). Así, cada arco que entraba a i, ahora entrará a i^-; y cada arco que sale de i, ahora saldrá de i^+. La misma lógica sigue para los flujos exógenos. Finalmente, se unirán los nodos i^- con los i^+, $\forall i$, con un arco que tenga costo d_i. El grafo queda así:



Pregunta 4 (15 puntos)

La Asociación Internacional de Fútbol (AIF) está organizando un torneo conmemorativo, y por lo tanto, debe confeccionar los grupos y el calendario de partidos para la fase de grupos.

Para este torneo la AIF ha invitado a I selecciones nacionales, pues debe formar G grupos con exactamente K equipos cada uno (y entonces, $K \cdot G = I$), asegurando que cada una de estas selecciones es incluida en exactamente un grupo.

Para efectos de la conformación de los grupos, la AIF construyó un puntaje para cada equipo, de modo que mientras más alto es este puntaje mejor resulta ser el equipo. Este puntaje se encuentra en el parámetro P_i, que dice el puntaje que alcanzó la selección i (el puntaje va de 1 a 100). El puntaje total de cada grupo es calculado como la suma simple de los puntajes de las selecciones que integran ese grupo. En este sentido, la AIF quiere asegurarse de que la diferencia de puntaje total entre cualquier par de grupos no supere un valor predeterminado por ellos (digamos que este valor es igual a Δ).

Para efectos de la confección del calendario de partidos, se deben programar las $K-1$ fechas. Para esto, se debe tener claro que, en cada fecha, deben jugar todas las selecciones y que cada selección juegue un único partido con cada una de las selecciones que integran su grupo. Adicionalmente, y a modo de hacer las fechas igual de atractivas, la AIF quiere que el peor partido de cada fecha (el más desigual) tenga una diferencia de puntaje entre las selecciones que juegan ese partido de a lo más Θ puntos.

Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal entera mixta que le permita a la AIF confeccionar los grupos y el calendario de los partidos de cada grupo minimizando la diferencia máxima de puntaje que exista entre las selecciones integrantes de algún grupo.

Solución: Partimos aclarando que esta modelación no es la única posible.

- ◇ Variables:

  x_i^g: variable binaria que toma valor 1 si la selección i es incluida en el grupo g, y que toma valor 0 en cualquier otro caso.

  y_{ij}^g: variable binaria que toma valor 1 si la selección i y la selección j, con $j > i$, son incluidas en el grupo g, y que toma valor 0 en cualquier otro caso.

  z_{ij}^{kg}: variable binaria que toma valor 1 si la selección i y la selección j, con $j > i$, que pertenecen al grupo g, tiene su partido programado para la fecha k, y que toma valor 0 en cualquier otro caso.

  α: diferencia máxima de puntaje que exista entre las selecciones integrantes de algún grupo.

- ◇ Restricciones:

(R1): Cada selección es colocada en un único grupo.

$$\sum_{g=1}^{G} x_i^g = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, I.$$

(R2): Cada grupo cuenta con exactamente K equipos.

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^g = K \qquad \forall g = 1, \ldots, G.$$

(R3): Construcción de la variable y_{ij}^g.

$$y_{ij}^g \geq x_i^g + x_j^g - 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j > i; g = 1, \ldots, G.$$

$$y_{ij}^g \leq \frac{x_i^g + x_j^g}{2} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j > i; g = 1, \ldots, G.$$

(R4): Asegurar que si dos selecciones son del mismo grupo, entonces deben tener su partido en alguna de las $K-1$ fechas.

$$\sum_{k=1}^{K-1} z_{ij}^{kg} = y_{ij}^g \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j > i; g = 1, \ldots, G.$$

(R5): Asegurar que en cada fecha cada selección juega exactamente un partido.

$$\sum_{g=1}^{G} \left(\sum_{j:j<i} z_{ji}^{kg} + \sum_{j:j>i} z_{ij}^{kg} \right) = 1 \qquad \forall i = 1, \ldots, I; k = 1, \ldots, K-1.$$

(R6): Asegurar que la diferencia de puntaje total entre grupos no supera el valor de Δ.

$$\sum_{i=1}^{I} P_i x_i^g - \sum_{i=1}^{I} P_i x_i^h \leq \Delta \qquad \forall g = 1, \ldots, G; h = 1, \ldots, G : h \neq g.$$

(R7): Construcción de la variable α.

$$\alpha \geq P_i x_i^g - P_j x_j^g - M\left(1 - y_{ij}^g\right) \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j > i; g = 1, \ldots, G.$$

$$\alpha \geq P_j x_j^g - P_i x_i^g - M\left(1 - y_{ij}^g\right) \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j > i; g = 1, \ldots, G.$$

(R8): Asegurar que el peor partido de cada fecha cumple con el valor Θ definido.

$$z_{ij}^{kg}\left(P_i - P_j\right) \leq \Theta \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j \neq i; k = 1, \ldots, K-1; g = 1, \ldots, G.$$

$$z_{ij}^{kg}\left(P_j - P_i\right) \leq \Theta \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j \neq i; k = 1, \ldots, K-1; g = 1, \ldots, G.$$

(R9): Naturaleza de variables.

$$x_i^g \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; g = 1, \ldots, G.$$

$$y_{ij}^g \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j > i; g = 1, \ldots, G.$$

$$z_{ij}^{kg} \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; j = 1, \ldots, I : j > i; k = 1, \ldots, K-1; g = 1, \ldots, G.$$

$$\alpha \geq 0$$

$\diamond$ Función Objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad \alpha$$