FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Industrias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Curso: Optimización
Semestre: Primavera 2010
Profesor: Alejandro Cataldo C.
Auxiliar: Mauricio Varas V.

Pauta Interrogación 3

Duración: 3 horas.

Cada pregunta será evaluada con una nota entre 1.0 y 7.0. La prueba cuenta con una ponderación total de 110 %. No se permite el uso de calculadora o celulares de ningún tipo.

Pregunta 1 (40 %)

Cada una de las cinco partes de esta pregunta vale lo mismo, y es independiente de las otras. La nota de la pregunta se obtendrá considerando sólo las 4 mejores notas de las 5 partes de la pregunta.

Parte A

Un proyecto puede ser representado usando una red dirigida en donde cada arco está asociado a una actividad, y cada nodo representa el término o inicio de las actividades que llegan o salen de él, respectivamente. Por ejemplo, en la red de la figura, las actividades $(1, 2)$ y $(1, 3)$ son las que se deben realizar al inicio del proyecto. El nodo 1 representa el inicio. Por otro lado, el nodo 5 representa el término de las actividades $(3, 5)$ y $(2, 5)$, y el comienzo de las actividades $(5, 6)$ y $(5, 7)$. Estas dos últimas no se pueden realizar mientras no se hayan completado las actividades (2,5) y (3,5). Cada actividad tiene una duración estimada, denotada por d_{ij}, y que aparece sobre cada arco de la figura 1 que se muestra a continuación.

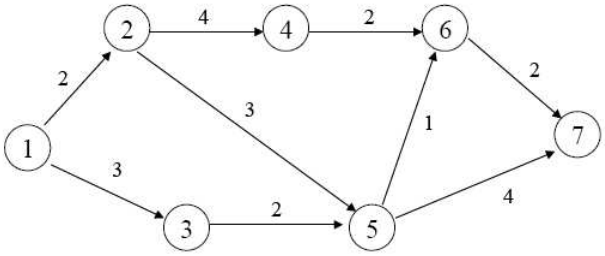


Figura 1: Grafo de actividades

Más formalmente y en general, el proyecto se puede representar con un grafo dirigido $G = (N, A)$ donde un nodo r representa el inicio y un nodo s representa el final del proyecto. Los arcos son las actividades y los nodos son inicios y términos de ellas, p_{ij} es la duración de la actividad (i, j).

Denote por t_i la variable de decisión que representa el instante de tiempo en que pueden comenzar las actividades cuyos arcos salen del nodo i.

a) (4.0 puntos) Plantee un modelo de programación lineal que minimice la duración total de un proyecto respetando las relaciones de precedencia.

b) (2.0 puntos) Para el ejemplo representado por la red que aparece más arriba, indique cuál es la duración mínima del proyecto y cuáles son los arcos que componen esa ruta crítica.

Pauta Parte A

a) Primero, se construirá un modelo de programación lineal genérico, asociado al problema antes expuesto. Para ello, se utilizará la variable t_i tal y como fue definida en el enunciado.

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & t_s - t_r \\
\text{s.a.} \quad & \\
& t_j \geq t_i + p_{ij} \quad \forall\, i,j \in N \text{ tal que } (i,j) \in A. \quad (1) \\
& t_i \geq 0 \qquad\qquad \forall\, i \in N. \qquad\qquad (2)
\end{aligned}
$$

donde la función objetivo considera la diferencia entre el instante de termino del proyecto (t_s) y el instante de inicio del mismo (t_r), lo que efectivamente entrega el tiempo de duración del proyecto. Cabe destacar que a pesar de que en el modelo no se exige explícitamente que el proyecto comience en el instante 0, la estructura del mismo lo asegurará. El grupo de restricciones (1) permite asegurar que la actividad i se pueden comenzar a realizar una vez que todas las actividades predecesoras de ésta hayan terminado. Finalmente, el grupo de restricciones (2) asegura la naturaleza continua y no negativa del instante de inicio de cualquier actividad.

Ahora, la formulación particular de la instancia entregada en la pregunta es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & t_7 - t_1 \\
\text{s.a.} \quad & \\
& t_2 \geq t_1 + p_{12} \\
& t_3 \geq t_1 + p_{13} \\
& t_4 \geq t_2 + p_{24} \\
& t_5 \geq t_2 + p_{25} \\
& t_5 \geq t_3 + p_{35} \\
& t_6 \geq t_4 + p_{46} \\
& t_6 \geq t_5 + p_{56} \\
& t_7 \geq t_5 + p_{57} \\
& t_7 \geq t_6 + p_{67} \\
& t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

b) Encontrar el tiempo de duración mínima del proyecto, se debe encontrar la ruta crítica -que es la ruta que toma mayor tiempo-. La forma más simple de encontrarla es enumerar las rutas y calcular su tiempo de ejecución:

Ruta	Tiempo de Ejecución
1-2-4-6-7	10
1-2-5-6-7	8
1-2-5-7	9
1-3-5-6-7	8
1-3-5-7	9

Luego, la ruta crítica es la compuesta por los arcos (1,2), (2,4), (4,6), (6,7) que toma 10 unidades de tiempo.

Parte B

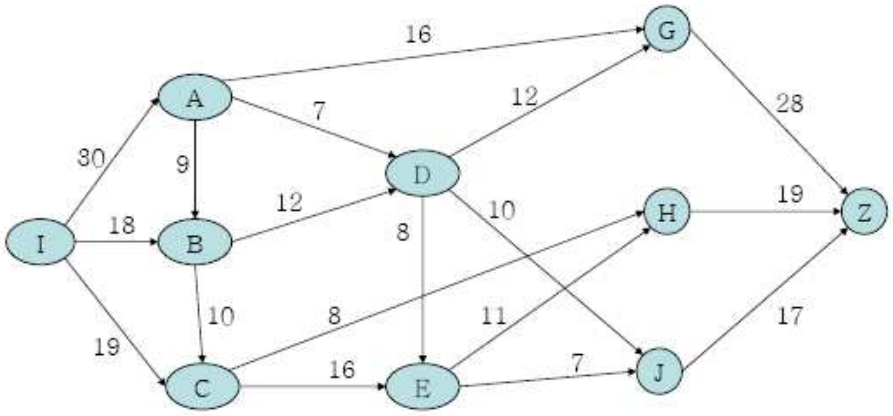
En la oficina de telégrafos de la ciudad I hay 126 telegramas urgentes, todos de igual duración en términos del tiempo que tomará su transmisión a la localidad Z. En la ciudad Z son recibidos en tres centrales: G, H y J. Cada una de estas centrales puede recibir (simultáneamente) 28, 19 y 17 telegramas, respectivamente. La transmisión de los telegramas se realiza a base de conexiones con centrales de otras ciudades. Dependiendo de las características de cada una de estas conexiones las posibilidades de enviar varios mensajes simultáneamente a través de ellas cambian. En la tabla que se muestra a continuación se recogen las distintas posibilidades (una casilla en blanco indica la imposibilidad de transmisión para los efectos que nos interesan).

Orígenes	A	B	C	D	E	G	H	J
I	30	18	19					
A		9		7		16		
B			10	12				
C					16		8	
D					8	12		10
E							11	7

Si la duración de la transmisión de un telegrama es de 77 segundos, independientemente de las conexiones realizadas para ello, ¿cómo se podría determinar cuánto tiempo se tardaría en transmitir los 126 mensajes? Sin obtener la solución óptima del problema, ¿se puede entregar una cota inferior para el tiempo mínimo necesario para completar la transmisión de los 126 mensajes?

Pauta Parte B

Para resolver el problema se debe calcular el flujo máximo de la siguiente red que representa el problema propuesto, que permitirá saber el número máximo de telegramas que se pueden enviar simultáneamente.



Digamos que F es el flujo máximo que puede atravesar esta red desde I a Z. En ese caso, hará falta hacer, al menos, $\lceil \frac{126}{F} \rceil$ envíos de manera que el tiempo mínimo necesario para enviar todos los mensajes será $t = 77 \lceil \frac{126}{F} \rceil$ segundos.

La capacidad de cualquier corte en el grafo nos va a dar una cota superior del flujo máximo, y por lo tanto, permite deducir una cota inferior del tiempo necesario de transmisión. Por ejemplo, el corte $S = \{I, A, B, C, D, E, G, H, J\}$ y $N \backslash S = \{Z\}$ tiene capacidad 64. Por tanto, sabemos que como $F \leq 64$ entonces $t > 77 \lceil \frac{126}{64} \rceil = 154$ Esto permite argumentar que en un sólo envío no se pueden mandar más de 64 mensajes, y por lo tanto, no es posible mandar todos los mensajes en menos de 2 envíos. Por tanto, no se pueden mandar en menos de 154 segundos.

Parte C

Usted está en un parque de entretenciones y entra al "Camino de los Millones". Este juego consiste en una red de calles dirigidas como la que se muestra en la figura 3. Cada calle tiene un cierto valor que usted recolectará cuando las recorra. Usted debe partir desde el inicio, ubicado en el nodo 1 y llegar hasta el destino, ubicado en el nodo 5, usando un camino formado por las calles de la red. Al final recolectará la cantidad total de valor de cada una de las calles por las que pasó. Una regla del juego es que, obviamente, el recorrido escogido debe ser un camino: no podemos quedarnos dando vueltas dentro del juego y recolectar ganancias permanentemente.

En la figura 3 se muestra el beneficio (valor) asociado a cada calle. A usted le interesa encontrar el camino dirigido desde el nodo 1 al nodo 5 que maximice sus beneficios. Esto lo hará resolviendo un problema de "flujo a beneficio máximo", que consiste en poner una oferta de 1 en el nodo 1 y una demanda de 1 en el nodo 5, y resolver el correspondiente problema de flujo en el que en vez de minimizar costos va a maximizar beneficios. Considere la siguiente solución factible: $f_{13} = 1$, $f_{35} = 1$, y $f_{ij} = 0$ para todos los demás arcos.

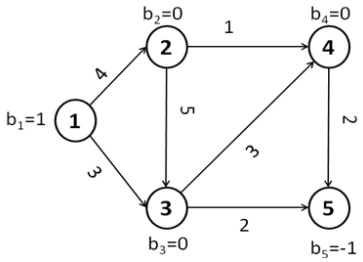


Figura 2: Grafo del Camino de los Millones

a) (3.0 puntos) Sobre la base de la solución factible entregada, construya una solución básica factible al problema de "flujo a beneficio máximo" correspondiente.

b) (3.0 puntos) Determine si esta solución es óptima o no y en caso de no serlo, haga una iteración del algoritmo simplex especializado en redes para este problema en cuestión. ¿Es su siguiente solución óptima?

Pauta Parte C

a) Las cotas del problema descrito son $l_{ij} = 0$ y $u_{ij} = \infty$ para todo arco (i, j) que existe. Para describir la solución básica factible de la solución básica entregada, se tiene construir un árbol generador. Los flujos f_{13} y f_{35} pertenecen a la base, pero faltan 2 flujos más (el grafo tiene 5 nodos, luego el árbol generador debe tener 4 arcos). Las bases que representan está solución factible son:

Bases posibles
(1,3); (3,5); (1,2); (2,4)
(1,3); (3,5); (1,2); (4,5)
(1,3); (3,5); (1,2); (3,4)
(1,3); (3,5); (2,4); (2,3)
(1,3); (3,5); (2,4); (3,4)
(1,3); (3,5); (2,4); (4,5)
(1,3); (3,5); (2,3); (3,4)
(1,3); (3,5); (2,3); (4,5)

b) Para desarrollar esta parte se debe escoger cualquiera de las bases descritas en la parte a). Consideremos la base compuesta por los flujos $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$ y $(3, 5)$. Luego, para obtener el valor de las variables duales $(\pi' s)$ se construye el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lllllllll} \bar{c_{12}} & = & c_{12} - \pi_1 + \pi_2 & = & 0 & \mapsto & -4 & = & \pi_1 - \pi_2 \\ \bar{c_{13}} & = & c_{13} - \pi_1 + \pi_3 & = & 0 & \mapsto & -3 & = & \pi_1 - \pi_3 \\ \bar{c_{34}} & = & c_{34} - \pi_3 + \pi_4 & = & 0 & \mapsto & -3 & = & \pi_3 - \pi_4 \\ \bar{c_{35}} & = & c_{35} - \pi_3 + \pi_5 & = & 0 & \mapsto & -2 & = & \pi_3 - \pi_5 \end{array}$$

donde se fijará $\pi_1 = 0$, y se tiene:

$$\begin{array}{lll} \pi_1 & = & 0 \\ \pi_2 & = & 4 \\ \pi_3 & = & 3 \\ \pi_4 & = & 6 \\ \pi_5 & = & 5 \end{array}$$

Ahora, el costo reducido de las variables no básicas es:

$$\begin{array}{llllllll} (CI) & \bar{c_{23}} & = & c_{23} - \pi_2 + \pi_3 & = & -5 - (4) + (3) & = & -6 \\ (CI) & \bar{c_{24}} & = & c_{24} - \pi_2 + \pi_4 & = & -1 - (4) + (6) & = & 1 \\ (CI) & \bar{c_{45}} & = & c_{45} - \pi_4 + \pi_5 & = & -2 - (6) + (5) & = & -3 \end{array}$$

Luego, como existen costos reducidos de flujos no básicos negativos, la solución no es óptima. Entra a la base f_{23}.

Para determinar que variable abandona la base, se tiene que el flujo f_{23} forma un ciclo con los flujos básicos f_{12} y f_{13}. Luego, se tienen las siguiente reasignación posibles para cada arco del ciclo: $\varepsilon_{12} = \infty$, $\varepsilon_{13} = 1$ y $\varepsilon_{45} = \infty$. Luego, $\varepsilon = 1$, y por lo tanto, sale f_{13} de la base. La nueva solución factible es $f_{12} = 1$, $f_{23} = 1$ y $f_{35} = 1$, siendo todos los demás flujos iguale a 0.

Parte D

Considere el siguiente problema de programación lineal en variables enteras:

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & x_1 + 4x_2 & & & (P) \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 10 & (1) \\ & -3x_1 + x_2 & \leq & 3 & (2) \\ & x_1, \quad x_2 & \geq & 0 \text{ enteros} & \end{array}$$

a) (3.0 puntos) Realice una ramificación, en la variable x_2, del algoritmo de ramificación y acotamiento al problema antes mencionado.

b) (3.0 puntos) Utilice el método de generación de cortes de Gomory para obtener desigualdades válidas para este problema.

Pauta Parte D

a) La relajación lineal del problema es:

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & x_1 + 4x_2 & & & (P) \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 10 & (1) \\ & -3x_1 + x_2 & \leq & 3 & (2) \\ & x_1, \quad x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Cuya solución (que se puede obtener fácilmente de forma gráfica) es: $x_1^0 = \frac{4}{7}$ y $x_2^0 = \frac{33}{7}$, con una función objetivo $z^0 = \frac{136}{7}$.

Como ambas variables son fraccionarias se debe ramificar. Como se pide ramificar en la variable x_2, se deben generar dos subproblemas que son:

SP1)

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & x_1 + 4x_2 & & & \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 10 & (1) \\ & -3x_1 + x_2 & \leq & 3 & (2) \\ & x_2 & \leq & 4 & (2) \\ & x_1, \quad x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

SP2)

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & x_1 + 4x_2 & & & \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 10 & (1) \\ & -3x_1 + x_2 & \leq & 3 & (2) \\ & x_2 & \geq & 5 & (2) \\ & x_1, \quad x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

b) Para construir los cortes de Gomory construyamos la forma estándar de la relajación lineal del problema original:

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & x_1 + 4x_2 & & & (P) \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 10 & (1) \\ & -3x_1 + x_2 + x_4 & = & 3 & (2) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & \geq & 0 & \end{array}$$

La base de la solución de la relajación lineal está compuesta por las variables x_1 y x_2. Luego se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

las variables no básicas definen la matriz R, entonces:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Luego, se pueden construir dos cortes:

$$\left(\frac{1}{7} - \left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor\right) x_3 + \left(-\frac{2}{7} - \left\lfloor -\frac{2}{7} \right\rfloor\right) x_4 = \left(\frac{1}{7} - 0\right) x_3 + \left(-\frac{2}{7} - (-1)\right) x_4 = \frac{1}{7}x_3 + \frac{5}{7}x_4 \geq \left(\frac{4}{7} - \left\lfloor \frac{4}{7} \right\rfloor\right) = \left(\frac{4}{7} - 0\right) = \frac{4}{7}$$

$$\left(\frac{3}{7} - \left\lfloor \frac{3}{7} \right\rfloor\right) x_3 + \left(\frac{1}{7} - \left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor\right) x_4 = \left(\frac{3}{7} - 0\right) x_3 + \left(\frac{1}{7} - 0\right) x_4 = \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \geq \left(\frac{33}{7} - \left\lfloor \frac{33}{7} \right\rfloor\right) = \left(\frac{33}{7} - \frac{28}{7}\right) = \frac{5}{7}$$

Parte E

Un servicio de ambulancias está estudiando si la localización de su base dentro de la comuna es la más adecuada. Este estudio busca determinar si la localización actual de la base permite llegar en un máximo de 25 minutos a cualquiera de las 4 zonas que componen a la comuna. Los tiempos de viaje, en minutos, desde la base actual a todas las zonas de interés, y entre todas las zonas de interés se muestran en la siguiente tabla.

	Destino				
Origen	Base	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4
Base	-	24	10	16	25
Zona 1	24	-	10	18	4
Zona 2	10	10	-	8	16
Zona 3	16	18	8	-	11
Zona 4	25	4	16	11	-

a) (4.0 puntos) Determine las ruta más corta, en términos de tiempo, entre la base actual y las distintas zonas utilizando el algoritmo de Dijkstra.

b) (2.0 puntos) Se está analizando la posibilidad de trasladar la base a una nueva ubicación. Esta nueva ubicación se encuentra a 6 minutos de la localización actual. Además, desde allá, el tiempo de viaje hasta la Zona 1 se reduce a 21 minutos, mientras que el tiempo de viaje a la Zona 2 aumenta a 12 minutos. Con esta información y sin aplicar nuevamente el algoritmo Dijkstra responda y justifique si es posible trasladar la base al nuevo local y cumplir la meta de tiempo máximo de 25 minutos a todas las zonas.

Pauta Parte E

a) La siguiente Figura muestra la red asociada al problema:

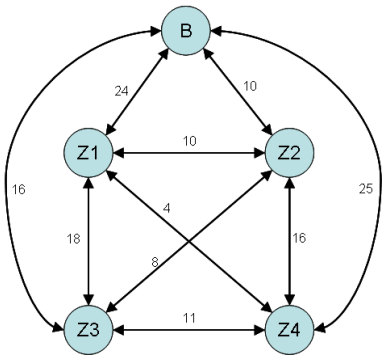


Figura 3: Grafo de la red entre Base-Zonas

Ahora aplicaremos el algoritmo de Dijkstra a la red anterior.

◇ Iteración 1:

Nodos	d_i	l_i	Pertenece a V
B	0	B	Si
$Z1$	24	B	No
$Z2$	10	B	No
$Z3$	16	B	No
$Z4$	25	B	No

Se escoge $Z2$ para que ingrese a V.

◇ Iteración 2:

Nodos	d_i	l_i	Pertenece a V
B	0	B	Si
$Z1$	20	$Z2$	No
$Z2$	10	B	Si
$Z3$	16	B	No
$Z4$	25	B	No

Se escoge $Z3$ para que ingrese a V.

◇ Iteración 3:

Nodos	d_i	l_i	Pertenece a V
B	0	B	Si
$Z1$	20	$Z2$	No
$Z2$	10	B	Si
$Z3$	16	B	Si
$Z4$	25	B	No

Se escoge $Z1$ para que ingrese a V.

◇ Iteración 4:

Nodos	d_i	l_i	Pertenece a V
B	0	B	Si
$Z1$	20	$Z2$	Si
$Z2$	10	B	Si
$Z3$	16	B	Si
$Z4$	24	$Z1$	No

Se escoge $Z4$ para que ingrese a V.

◇ Iteración 5:

Nodos	d_i	l_i	Pertenece a V
B	0	B	Si
$Z1$	20	$Z2$	Si
$Z2$	10	B	Si
$Z3$	16	B	Si
$Z4$	24	$Z1$	Si

Luego, termina el algoritmo, y se ha encontrado el árbol de rutas más cortas desde la Base a todas las zonas. Este se muestra en la siguiente figura.

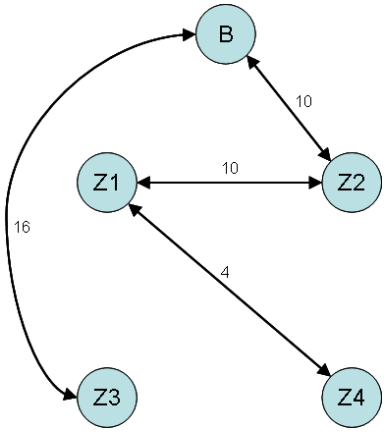


Figura 4: Árbol de rutas más cortas desde la Base a todas las Zonas

b) A pesar de los cambios en el tiempo de desplazamiento que produce la nueva ubicación de la Base se puede cumplir con la meta de a demorar a lo más 25 minutos desde la base a cualquier zona.

Esto queda representado en el siguiente árbol de rutas más corta modificado por los nuevos tiempos de desplazamiento.

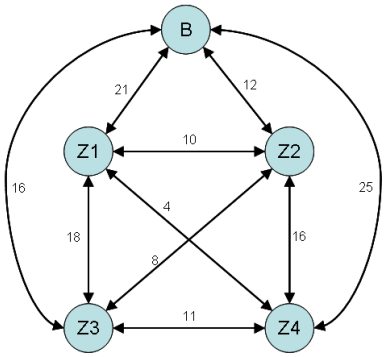


Figura 5: Grafo modificado de la red entre la Base-Zonas

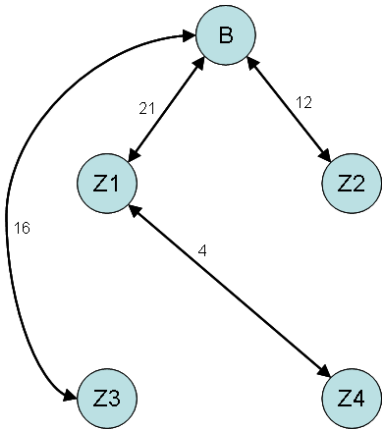


Figura 6: Árbol modificado de rutas más cortas desde la Base a todas las Zonas

Pregunta 2 (30 %)

Considere que el gobierno de un pequeño país del caribe implementará algunas medidas que buscan aumentar el bienestar global del país. Para ello, ha definido las siguientes medidas posibles: 1) modificar el presupuesto de una ciudad (subirlo o bajarlo); 2) hacer desfiles alegóricos desde una ciudad a otra; 3) transportar basura desde una ciudad a otra mediante camiones.

Asuma que si aumentamos (disminuimos) en una unidad de presupuesto a la ciudad i produce un aumento (disminución) de b_i unidades de bienestar global, la realización de un desfile desde la ciudad i a la ciudad j produce $h_{ij} \geq 0$ unidades de bienestar global en el país y, finalmente, un camión que transporta basura desde la ciudad i a la ciudad j genera un una pérdida de bienestar global de $k_{ij} \geq 0$ unidades para el país.

El gobierno debe cumplir una sola condición que debe cumplir cada par de ciudades (i, j) que produzca alteraciones en el bienestar global del país. Esta es la condición: la diferencia entre la modificación presupuestaría de la ciudad i y la ciudad j, más el número total de defiles y menos el número total de camiones transportando basura que salen de la ciudad i a la ciudad j, debe ser igual a un parámetro preestablecido igual a $r_{ij} \geq 0$.

Asuma que el gobierno puede modificar tanto como quiera (aumentando o disminuyendo) el presupuesto de cada ciudad y, que puede realizar todos los defiles alegóricos que desee y, que puede contar con todos los camiones que necesite para transportar la basura.

La Figura 4 muestran las 4 ciudades que deben ser consideradas en este problema y la red de caminos dirigidos (importa el sentido del camino) del pequeño país del caribe.

a) (1.0 puntos) Formule un modelo de programación lineal con variables continuas que permita al gobierno definir qué medidas tomar con tal de maximizar el bienestar global del país. Asuma que los valores de estas variables pueden ser fraccionarios.

b) (5.0 puntos) Considere ahora la instancia presentada en las siguientes tablas.

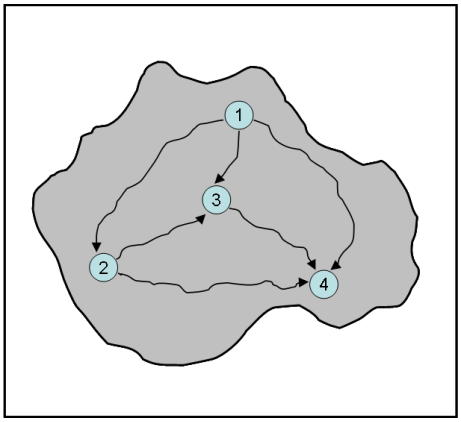


Figura 7: País caribeño, sus 4 ciudades y los caminos existentes

(i,j)	h_{ij}	k_{ij}	r_{ij}
(1,2)	0	4	5
(1,3)	1	5	1
(1,4)	3	5	6
(2,3)	0	7	8
(2,4)	1	8	5
(3,4)	1	3	2

i	b_i
1	8
2	0
3	0
4	8

Con esta información el gobierno ha obtenido una solución factible que implica aumentar el presupuesto en 10, 5, 9 y 4 para las ciudades 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Esta solución también considera la realización de 12 desfiles alegóricos entre la ciudad 2 y la ciudad 3 y, de 4 desfiles alegóricos entre la ciudad 2 y la ciudad 4. Además, esta solución contempla 3 camiones con basura que serán enviados desde la ciudad 3 a la ciudad 4.

Utilizando el algoritmo de simplex especializado en redes compruebe si la solución obtenida por el gobierno es o no la solución óptima del problema. Si requiere una solución factible inicial para el problema de flujo a costo mínimo asociado obténgala por inspección visual.

Pauta Pregunta 3 (40 %)

a) Para la construcción del modelo definamos las siguiente variables:

π_i : cambio en el presupuesto en la ciudad i
ψ_{ij} : cantidad de desfiles que van desde la ciudad i a la ciudad j
ϕ_{ij} : cantidad de camiones con basura que van desde la ciudad i a la ciudad j

Con estas, el modelo queda:

$$\text{máx} \sum_{i \in N} b_i \pi_i + \sum_{(i,j) \in A} h_{ij} \psi_{ij} - \sum_{(i,j) \in A} k_{ij} \phi_{ij}$$

$$\begin{aligned} \pi_i - \pi_j + \psi_{ij} - \phi_{ij} &= r_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \quad (R1) \\ \psi_{ij}, \phi_{ij} &\geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \quad (R2) \\ \pi_i &\text{ son irrestrictos } \forall i \in N \quad (RNV) \end{aligned}$$

donde N define e conjunto de ciudades y A el conjunto de caminos entre estas ciudades. La restricción $(R1)$ es la condición a la que se deben atener todas las ciudades, la restricción $(R2)$ indica que las variables de movimiento -desfiles y basura- son no negativas y la restricción $(R3)$ indica que la variable de modificación presupuestaria es irrestricta.

b) El dual del problema formulado en $a)$ es un problema de flujo a costo mínimo:

$$\text{mín} \sum_{(i,j) \in A} r_{ij} f_{ij} \quad (P)$$

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} - \sum_{(k,i) \in A} f_{ki} &= b_i \quad \forall i \in N \quad (1) \\ -f_{ij} &\geq -k_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \quad (2) \\ f_{ij} &\geq h_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \quad (3) \end{aligned}$$

Luego, utilizando la información de las tablas se tiene:

$$
\begin{aligned}
\text{mín}\, & 5f_{12} + f_{13} + 6f_{14} + 8f_{23} + 5f_{24} + 2f_{34} \\
f_{12} + f_{13} + f_{14} &= 8 \\
f_{23} + f_{24} - f_{12} &= 0 \\
f_{34} - f_{13} - f_{23} &= 0 \\
f_{14} + f_{24} + f_{34} &= -8 \\
f_{12} &\leq 4 \\
f_{13} &\leq 5 \\
f_{14} &\leq 5 \\
f_{23} &\leq 7 \\
f_{24} &\leq 8 \\
f_{34} &\leq 4 \\
f_{12} &\geq 0 \\
f_{13} &\geq 1 \\
f_{14} &\geq 3 \\
f_{23} &\geq 0 \\
f_{24} &\geq 1 \\
f_{34} &\geq 1
\end{aligned}
$$

Por inspección visual se tiene que la solución $f_{12} = 1$, $f_{13} = 3$, $f_{14} = 4$, $f_{23} = 0$, $f_{24} = 1$ y $f_{34} = 3$ es solución básica factible del problema de flujo a costo mínimo.

Luego, las variables básicas son f_{12}, f_{13} y f_{14} y las variables no básicas son f_{23}, f_{24} y f_{34}.

El valor de las variables duales π_i se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\bar{c_{12}} & = & c_{12} - \pi_1 + \pi_2 & = & 0 & \mapsto & 5 & = & \pi_1 - \pi_2 \\
\bar{c_{13}} & = & c_{13} - \pi_1 + \pi_3 & = & 0 & \mapsto & 1 & = & \pi_1 - \pi_3 \\
\bar{c_{14}} & = & c_{14} - \pi_1 + \pi_4 & = & 0 & \mapsto & 6 & = & \pi_1 - \pi_4
\end{array}
$$

Luego al resolver este sistema (fijando alguno de los $\pi' s$) se obtiene (fijaremos $\pi_1 = 0$):

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= 0 \\
\pi_2 &= -5 \\
\pi_3 &= -1 \\
\pi_4 &= -6
\end{aligned}
$$

Ahora, el costo reducido de las variables no básicas es:

$$
\begin{array}{llllll}
(CI) & \bar{c_{23}} & = & c_{23} - \pi_2 + \pi_3 & = & 8 - (-5) + (-1) = 12 \\
(CI) & \bar{c_{24}} & = & c_{24} - \pi_2 + \pi_4 & = & 5 - (-5) + (-6) = 4 \\
(CS) & \bar{c_{34}} & = & -c_{34} + \pi_3 - \pi_4 & = & (-2) + (-1) - (-6) = 3
\end{array}
$$

La solución del problema de flujo a costo mínimo es óptima pues el costo reducido de todas las variables no básicas es > 0. El valor de la función objetivo es 43, que es igual al valor de la solución factible entregada por el gobierno, luego, ambas son óptimas de sus respectivos problemas (Teorema Fuerte de Dualidad).

Pregunta 3 (40 %)

Al terminar el año laboral, la empresa *Codelchi Ltda.* somete a sus empleados a una evaluación. Los empleados son clasificados por la compañía como: tipo A y tipo B. Actualmente la empresa cuenta con I trabajadores tipo A y J trabajadores tipo B (puede utilizar los parámetros I y J como conjunto y como número total de trabajadores de cada tipo).

Para la evaluación de este año la empresa decidió tomar 3 tests a cada empleado. Para efectos prácticos, la empresa determinó que la totalidad de los empleados deberá rendir estos 3 test durante los próximos 5 días, y

que cada día dispondrá de 4 módulos de evaluación. Estos 4 módulos de evaluación no se intersectan entre sí y cubren toda la jornada laboral. Se debe tener en cuenta que un empleado puede rendir solo un test por módulo.

Codelchi Ltda. realizará los tests de manera de que sus empleados tipo A no realicen más de 2 tests un mismo día, imponiendo además que si uno de estos empleados tipo A realiza 2 tests durante un mismo día, estos dos tests debe realizarlos en módulos seguidos. Por otra parte, para que los empleados tipo B realicen sus tests se les debe dar todo un día libre.

Las evaluaciones serán tomadas en una sala que tiene capacidad para que Q empleados estén simultáneamente siendo evaluados, y a cada empleado se le consultó los días y módulos en que prefiere rendir sus evaluaciones. Esta última información se encuentra en el parámetro δ_{pmd} que tiene valor 1 si el módulo m del día d es preferido por el empleado p, tanto para empleados tipo A como tipo B. Finalmente, la empresa quiere asegurar que en todo módulo cuenta con al menos R empleados en sus funciones diarias de trabajo.

Basado en la información anterior, construya un modelo de programación lineal que permita a la empresa *Codelchi Ltda.* planificar la evaluación de este año, considerando en lo posible maximizar la cantidad de tests que son tomados en módulos-días de preferencia de los empleados.

Tabla de transformación primal-dual:

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas

Pauta Pregunta 3 (40 %)

Variables

x_{jd} : binaria que toma valor 1 si el empleado $j \in J$ rendirá sus test el día d.
w_{jmd} : binaria que toma valor 1 si el empleado $j \in J$ rendirá un test durante el módulo m del día d.
y_{imd} : binaria que toma valor 1 si el empleado $i \in I$ rendirá un test durante el módulo m del día d.

Restricciones:

1) Asignar un sólo día libre a empleados tipo B.

$$\sum_{d=1}^{5} x_{jd} = 1 \qquad \forall\ j \in J.$$

2) Asignar 3 módulos de ese día libre para rendir test para empleados tipo B.

$$\sum_{m=1}^{4} w_{jmd} = 3 \cdot x_{jd} \qquad \forall\ j \in J,\ d = 1, ..., 5.$$

3) Asignar 3 módulos a empleados tipo A.

$$\sum_{d=1}^{5} \sum_{m=1}^{4} y_{imd} = 3 \qquad \forall\ i \in I.$$

4) Empleados tipo A no rinden más de 2 evaluaciones por día.

$$\sum_{m=1}^{4} y_{imd} \leq 2 \qquad \forall\ i \in I,\ d = 1, ..., 5.$$

5) Obligar a que si un empleado tipo A rinde 2 tests el mismo día, estos sean continuados.

$$y_{imd} + y_{ind} \leq 1 \qquad \forall\ i \in I,\ d = 1, ..., 5,\ m = 1, ..., 2,\ n = m + 2, ..., 4.$$

6) Respetar la capacidad de la sala de evaluación.

$$\sum_{j=1}^{J} w_{jmd} + \sum_{i=1}^{I} y_{imd} \leq Q \qquad \forall\ d = 1, ..., 5,\ m = 1, ..., 4.$$

7) Respetar los requerimientos por fuerza laboral.

$$\left(J - \sum_{j=1}^{J} x_{jd}\right) + \left(I - \sum_{i=1}^{I} y_{imd}\right) \geq R \qquad \forall\ d = 1, ..., 5,\ m = 1, ..., 4.$$

8) Naturaleza de las variables.

$$\begin{array}{rcll} x_{jd} & \in & \{0,1\} & \forall\ j \in J,\ d = 1, ..., 5. \\ w_{jmd} & \in & \{0,1\} & \forall\ j \in J,\ d = 1, ..., 5,\ m = 1, ..., 4. \\ y_{imd} & \in & \{0,1\} & \forall\ i \in I,\ d = 1, ..., 5,\ m = 1, ..., 4. \end{array}$$

Función Objetivo:

$$\text{máx}\, z = \sum_{i=1}^{I} \sum_{m=1}^{4} \sum_{d=1}^{5} \delta_{imd} \cdot y_{imd} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{m=1}^{4} \sum_{d=1}^{5} \delta_{jmd} \cdot w_{jmd}$$