Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Profesores: Margarita Castro, Raimundo Cuadrado,
Camila Balbontín, Gonzalo Pérez
Ayudante Coordinador de Tareas: Juan Enrique Hurtado

ICS1113 - Optimización
1er semestre del 2025

Tarea 1 ICS1113

Entrega 07/04/2025 a las 23:59 hrs

Reglas:

- El desarrollo y entrega de esta tarea es individual o en pareja (entre dos estudiantes de cualquier sección), por lo que cada individuo o pareja debe entregar sus propias soluciones. No se recomienda repartir la tarea entre los integrantes, pues perjudica el aprendizaje y preparación de la interrogación asociada a esta tarea. Sí está permitido discutir los problemas con profesores y ayudantes del curso. Cualquier actitud deshonesta será calificada con nota 1.0 en la tarea, 1.0 en el curso, más un aviso de dicha actitud a la Dirección de Pregrado de la Escuela de Ingeniería.
- Si se opta por entregar en pareja, se debe inscribir la pareja en Canvas y un solo estudiante (representando a su pareja) debe entregar la tarea en Canvas antes del día 07/04/2025 a las 23:59 horas. Tareas atrasadas serán calificadas con nota 1.0 y no serán corregidas.
- El formato de entrega es un reporte en archivo .pdf (digitalizado o escrito a mano con los nombres de los integrantes) más un archivo opcional. Si opta por una respuesta escrita a mano, entonces debe ser legible o habrá descuentos a criterio del corrector. En el archivo opcional puede adjuntar el .tex o .zip del proyecto Latex o código de GUROBI si corresponde. Se bonificará con 3 décimas a quienes utilicen Latex (y entreguen el .tex además del .pdf) las cuales no son transferibles a otras actividades del curso y no permiten tener nota mayor a 7. Es decir una persona con 6.8 y con bono, obtendrá un 7.
- Se habilitará un foro en Canvas donde se responderá dudas del enunciado.

Pregunta 1 [20 Puntos]

La empresa pesquera *Pezch* es la única que tiene sus operaciones en una región del mar subdividida en un conjunto de N sectores. Tiene un único barco pesquero, que viaja como máximo una vez al día a la región desde su embarcadero, retornando siempre. El barco decide qué sectores visitar en un conjunto $\mathcal{T}$ de días, pudiendo visitarlos todos durante un día. Cada día, el barco puede pescar, por su tecnología, hasta un máximo de $\theta \in [0, 1]$ veces las toneladas de peces presentes en el sector al finalizar el día anterior. La capacidad del barco son K toneladas de pescado y vende a un precio de v_t dólares la tonelada el mismo día $t \in \mathcal{T}$ de pesca.

Las toneladas de peces presentes al final de un día en un sector $n \in N$ se determinan como la suma del tonelaje de peces del día anterior en todos los sectores $n' \in N$, ponderada por un coeficiente de transferencia $a_{n,n'}$ que representa el movimiento y crecimiento natural de peces, menos las toneladas extraídas por pesca ese día. Considere que cada sector $n \in N$ contiene ϵ_n toneladas de peces al inicio de la planificación. Por razones ambientales, se ha establecido que cada 7 días consecutivos, sólo se puede visitar como máximo 4 veces un mismo sector.

También considere que la empresa inicia con un presupuesto en caja de I_0 dólares y una deuda con el banco de D_0 dólares. Cada día $t \in \mathcal{T}$ la empresa utiliza f_t dólares en actividades y, si llega a ser necesario, tiene que solicitar dinero al banco, sin costo por solicitud. Cada día, el banco cobra como interés i veces la cantidad adeudada del día anterior, y cada día en que se disminuya la deuda con el banco se debe pagar un costo de ω dólares por el trámite, independiente de la cantidad saldada. El hecho de comenzar el viaje de pesca hasta la región le significa a la empresa un costo fijo diario de β dólares y viajar a la zona $n \in N$ agrega un costo de α_n dólares.

Formule un modelo de optimización lineal mixta que maximice el dinero en caja al final del período, asegurando que no quede deuda con el banco.

Solución

Variables: [8 ptos] en total. [1 pto] por cada variable bien definida. Si falta la naturaleza de las variables 0 ptos en cada variable que falte.

- $z_t = \begin{cases} 1, & \text{Si se zarpa a pescar en el día } t \in \mathcal{T}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- $y_{nt} = \begin{cases} 1, & \text{Si se visita el sector } n \in N \text{ en el día } t \in \mathcal{T}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- x_{nt} = Toneladas de peces que se pescan en el sector $n \in N$ en el día $t \in \mathcal{T}$
- w_{nt} = Toneladas de peces existentes en el sector $n \in N$ al final del día $t \in \mathcal{T}$
- E_t = Cantidad de dólares presentes en la caja al final del día $t \in \mathcal{T}$
- D_t = Cantidad de dólares que se le debe al banco al final del día $t \in \mathcal{T}$
- L_t = Cantidad de dólares que se le entrega (+) o pide (-) al banco en el día $t \in \mathcal{T}$.
- $s_t = \begin{cases} 1, & \text{Si se le entrega plata al banco en el día } t \in \mathcal{T}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Objetivo: [1 pto]

$$\max E_T \tag{1}$$

Restricciones: [11 pts] en total. [2 pts] por cada conjunto de restricciones bueno. Errores pequeños asignan 1 punto al conjunto de restricciones. Errores mayores asignan 0 puntos. El conjunto de restricciones 1 es el único de [1 pto]. Se permitirá una interpretación del problema en que el interés de la deuda se acumule sobre la deuda.

1. Condiciones para salir a pescar [1 pto]:

$$\sum_{n \in N} y_{nt} \leq M \cdot z_t, \qquad \forall t \in \mathcal{T}, \tag{2}$$

$$x_{nt} \leq M \cdot y_{nt}, \qquad \forall n \in N, t \in \mathcal{T}, \tag{3}$$

M := parámetro suficientemente grande.

2. Límites de pesca [2 pts] :

$$\sum_{t=c}^{t=c+6} y_{nt} \leq 4, \qquad \forall n \in N, c \in \mathcal{T}, c \leq T-6 \tag{4}$$

$$\sum_{n \in N} x_{nt} \leq K, \qquad \forall t \in \mathcal{T} \tag{5}$$

$$x_{nt} \leq \theta \cdot w_{n,t-1}, \qquad \forall t \in \mathcal{T}, t \geq 2, \qquad \forall n \in N \tag{6}$$

$$x_{n1} \leq \theta \cdot \epsilon_n, \qquad \forall n \in N \tag{7}$$

3. Cantidades de peces por sector [2 pts]:

$$w_{n1} = \sum_{n \in N} a_{nn} \cdot \epsilon_n - x_{n1} \qquad \forall n \in N, \tag{8}$$

$$w_{nt} = \sum_{n \in N} a_{nn} \cdot w_{n(t-1)} - x_{nt} \qquad \forall n \in N, t \in \mathcal{T}, t \geq 2, \tag{9}$$

4. Flujo de deuda en el banco [2 pts]:

$$D_1 = D_0 - L_1 \qquad \forall n \in N, \tag{10}$$

$$D_t = D_{t-1} - L_t \qquad \forall n \in N, t \in \mathcal{T}, \tag{11}$$

5. Transacciones deuda en el banco y condición final [2 pts]:

$$L_t \leq M \cdot s_t \qquad \forall t \in \mathcal{T}, \tag{12}$$

$$D_T = 0 \qquad , \tag{13}$$

6. Flujo de caja [2 pts]:

$$E_1 = I_0 + \sum_{n \in N} v_1 \cdot x_{n1} - f_1 - i \cdot D_0 - \beta \cdot z_1 - \sum_{n \in N} \alpha_n \cdot y_{n1} - \omega \cdot s_1 - L_1, \tag{14}$$

$$E_t = E_{t-1} + \sum_{n \in N} v_t \cdot x_{nt} - f_t - i \cdot D_{t-1} - \beta \cdot z_t - \sum_{n \in N} \alpha_n \cdot y_{nt} - \omega \cdot s_t - L_t \qquad \forall t \in \mathcal{T}, t \geq 2, \tag{15}$$

7. Naturaleza de las variables.

$$\begin{aligned}
&z_t \in \{0,1\}, && \forall t \in \mathcal{T} \\
&y_{nt} \in \{0,1\}, && \forall n \in N, t \in \mathcal{T} \\
&s_t \in \{0,1\}, && \forall t \in \mathcal{T} \\
&x_{nt} \geq 0, && \forall n \in N, t \in \mathcal{T} \\
&w_{nt} \geq 0, && \forall n \in N, t \in \mathcal{T} \\
&E_t \geq 0, && \forall t \in \mathcal{T} \\
&D_t \geq 0, && \forall t \in \mathcal{T} \\
&L_t \in \mathbb{R}, && \forall t \in \mathcal{T}
\end{aligned}$$

Problema 2 [20 Puntos]

Un alumno de una carrera de ingeniería debe planificar la toma de cursos para todos los siguientes semestres hasta completar el conjunto de C cursos que debe tomar para completar la carrera. El alumno se fue de intercambio el segundo semestre del año anterior, desordenando en gran medida su malla oficial. Hasta ese semestre, había cursado el conjunto $U_0 \subseteq C$ de cursos y él ha decidido que nunca tomará más de 5 cursos ni menos de 2 por semestre. Se sabe que cada curso $c \in C$ tiene un conjunto de requisitos $R_c \subseteq C$ y un conjunto de correquisitos $\Omega_c \subseteq C$, los cuales deben considerarse al tomar cursos. Un curso que es requisito debe haberse aprobado en semestres anteriores, mientras que un curso que es correquisito debe haberse aprobado en semestres anteriores o ser tomado en paralelo durante el mismo semestre. Además, la universidad cuenta con un conjunto H de horarios, y prohíbe el prohíbe la inscripción de cursos con horarios conflictivos. Los conjuntos $J_h \subseteq C$ contienen todos los cursos que tienen clases en cada horario $h \in H$. Por razones de la universidad, un conjunto de cursos $I \subseteq C$ solo se dicta los primeros semestres de cada año, y otro conjunto de cursos $P \subseteq C$ solo se dicta los segundos semestres. Considere que no se permite bajo ningún concepto repetir un curso aprobado.

La universidad cuenta con un sistema de puntajes (números enteros) para priorizar sus tomas de cursos. Estos dependen de los créditos y de las notas. El alumno terminó su semestre de intercambio con un puntaje igual a b_0 puntos, y siempre se requiere al menos γ_c puntos para tomar el curso $c \in C$ en un próximo semestre. Por cada curso $c \in C$ tomado, por razones de avance y notas, se agregan $\beta_c \in \mathbb{N}$ puntos, permitiendo desbloquear nuevos cursos.

Considere que el alumno aprueba siempre todos los cursos que toma, y que por ningún motivo puede existir un semestre en medio de su carrera sin que tome cursos. Formule un modelo de optimización lineal mixta que permita al alumno minimizar la cantidad de semestres en que saldrá de la carrera considerando todas las condiciones.
Hint: Considere definir un conjunto de semestres suficientemente grande.

Solución

Variables: [4 ptos] en total. [1 pto] por cada variable bien definida. Si falta la naturaleza de las variables 0 ptos en cada variable que le falte.

- $x_{c,t} = \begin{cases} 1, & \text{si el curso } c \in C \text{ es tomado en el semestre } t \in \mathcal{T}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- $y_t = \begin{cases} 1, & \text{si el semestre } t \in \mathcal{T} \text{ es utilizado para tomar cursos,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- $b_t =$ Puntaje acumulado al finalizar el semestre $t \in \mathcal{T}$.
- $\theta =$ Número del semestre en que se finalizan todos los cursos.

Función objetivo: [1 pto]

$$\min \theta \tag{16}$$

Restricciones: [15 ptos] En total. Puntaje distribuido en los tipos de restricciones.

1. Cada curso se toma una sola vez [2 ptos]:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{c,t} = 1, \qquad \forall c \in C, c \notin U_0 \tag{17}$$

$$x_{c,t} = 0, \qquad \forall c \in U_0 \tag{18}$$

2. Cumplimiento de requisitos previos [2 ptos]:

$$x_{c,t} \leq \sum_{t'=1}^{t-1} x_{c',t'}, \qquad \forall c \in C, \forall c' \in R_c, c' \notin U_0, \forall t \in \mathcal{T} \geq 2 \tag{19}$$

$$x_{c,1} = 0, \qquad \forall c \in C, if \quad R_c \nsubseteq U_0, \tag{20}$$

3. Cumplimiento de co-requisitos [1 pto]:

$$x_{c,t} \leq \sum_{t'=1}^{t} x_{c',t'}, \qquad \forall c \in C, \forall c' \in R_c, c' \notin U_0, \forall t \in \mathcal{T} \tag{21}$$

4. Número de cursos por semestre [2 ptos]:

$$2y_t \leq \sum_{c \in C} x_{c,t}, \qquad \forall t \in \mathcal{T} \tag{22}$$

$$\sum_{c \in C} x_{c,t} \leq 5y_t, \qquad \forall t \in \mathcal{T} \tag{23}$$

5. Construcción de θ [1 pto]:

$$t \cdot y_t \leq \theta, \qquad \forall t \in \mathcal{T} \tag{24}$$

6. No puede haber semestres en que no se tomen ramos en medio de la carrera [1 pto]:

$$y_t \leq y_{t-1}, \qquad \forall t \in \mathcal{T}, t \geq 2 \tag{25}$$

7. Restricción de horarios sin tope [1 pto]:

$$\sum_{c \in J_h} x_{c,t} \ \leq 1, \quad \forall t \in \mathcal{T}, \forall h \in H \tag{26}$$

8. Cursos dictados en semestres específicos [1 pto]:

$$x_{c,t} = 0, \quad \forall c \in I, \quad \forall t \text{ par} \tag{27}$$

$$x_{c,t} = 0, \quad \forall c \in P, \quad \forall t \text{ impar} \tag{28}$$

9. Puntaje mínimo para tomar un curso [2 ptos]:

$$-M \cdot (1 - x_{c,t}) \leq b_{t-1} - \gamma_c, \quad \forall c \in C, \quad \forall t \in \mathcal{T}, t \geq 2 \tag{29}$$

$$-M \cdot (1 - x_{c,1}) \leq b_0 - \gamma_c, \quad \forall c \in C \tag{30}$$

10. Evolución del puntaje del alumno [2 ptos]:

$$b_t = b_{t-1} + \sum_{c \in C} \beta_c \cdot x_{c,t}, \quad \forall t \in \mathcal{T}, t \geq 2 \tag{31}$$

$$b_1 = b_0 + \sum_{c \in C} \beta_c \cdot x_{c,1} \tag{32}$$

11. Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned} & x_{c,t} \in \{0,1\}, \quad \forall c \in C, t \in \{1, \ldots, T\} \\ & y_t \in \{0,1\}, \quad \forall t \in \{1, \ldots, T\} \\ & \theta \geq 0, \\ & b_t \geq 0, \quad \forall t \in \{1, \ldots, T\} \end{aligned}$$

Problema 3 [20 Puntos]

La empresa *Circuitos* es la única empresa generadora eléctrica de un país. Los nodos generadores y de consumo forman parte de una red eléctrica interconectada por cables que definen un grafo dirigido con nodos N y arcos A. La empresa cuenta con un conjunto $G \subseteq N$ de nodos generadores eólicos, y busca maximizar sus ganancias al vender energía a un conjunto $C \subseteq N$ de nodos de consumo en un día que tiene un conjunto $H := \{1, ..., 24\}$ de horas. El conjunto de nodos N está conformado exclusivamente por los conjuntos disjuntos $G \subseteq N$ y $C \subseteq N$. Cada nodo generador $g \in G$ tiene una generación máxima conocida de s_{gh} MWh en la hora $h \in H$, mientras que la demanda de un nodo de consumo $c \in C$ es d_{ch}. La empresa puede decidir estratégicamente cuánta demanda satisfacer en cada nodo de consumo, ya que los precios marginales son p_{ch} USD/MWh en el horario $h \in H$.

Existe un conjunto A de arcos de la forma (i, j) que indican la existencia de una línea para transmitir energía desde el nodo $i \in N$ al nodo $j \in N$. Existen líneas de transmisión entre nodos de distinto y mismo tipo. Cada arco $a \in A$ posee una capacidad máxima de transmisión equivalente a L_a MWh en cada hora, y un costo de transmisión variable de c_{ah} USD/MWh en el horario $h \in H$. Por último, debido a no linealidades en las cajas transformadoras, se ha establecido que, en caso de usarse un arco $a \in A$, el flujo de energía en la línea correspondiente debe ser de al menos m_a MWh en cada hora.

Formule un modelo de optimización lineal mixta que permita obtener el flujo de energía óptimo que maximice las ganancias de la empresa y que cumpla con todas las condiciones descritas.

Solución

Variables: [8 ptos] Por definir variables que permitan modelar el problema.(Pueden prescindir de la variable E)

- x_{ch} = MWh de energía consumida por el nodo de consumo $c \in C$ en la hora $h \in H$.
- z_{gh} = MWh de energía entregada por el nodo de generación $g \in G$ en la hora $h \in H$.
- f_{ah} = MWh de energía transportada a través del arco $a \in A$ en la hora $h \in H$.
- $y_{ah} = \begin{cases} 1, & \text{si el arco } a \text{ es utilizado en la hora } h, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
- E_h = Ganancias acumuladas de la empresa al final de la hora $h \in H$.

Función Objetivo: [4 ptos] Funcion objetivo correctamente modelada. (Pueden prescindir de la variable E).

$$\max E_{24} \tag{33}$$

Restricciones: [8 ptos] En total. Distribución de puntaje por grupo de restricciones.

1. Límites de generación [1 pto]:
$$z_{gh} \leq s_{gh}, \quad \forall g \in G, h \in H \tag{34}$$
2. Límites de consumo [1 pto]:
$$x_{ch} \leq d_{ch}, \quad \forall c \in C, h \in H \tag{35}$$
3. Restricciones de flujo en la red [4 pts]:
$$\sum_{a \in A: a=(i,j)} f_{ah} - \sum_{a \in A: a=(j,i)} f_{ah} = \begin{cases} z_{ih}, & \text{si } i \in G, \\ -x_{ih}, & \text{si } i \in C, \end{cases} \quad \forall i \in N, h \in H \tag{36}$$
4. Capacidad de transmisión en los arcos [2 pts]:
$$y_{ah} \cdot m_a \leq f_{ah}, \quad \forall a \in A, h \in H \tag{37}$$
$$f_{ah} \leq y_{ah} \cdot L_a, \quad \forall a \in A, h \in H \tag{38}$$
5. Cálculo de ganancias: [0 pts] (Pueden prescindir de la variable E)
$$E_1 = \sum_{c \in C} p_{c1} \cdot x_{c1} - \sum_{a \in A} c_{a1} \cdot f_{a1} \tag{39}$$
$$E_h = E_{h-1} + \sum_{c \in C} p_{ch} \cdot x_{ch} - \sum_{a \in A} c_{ah} \cdot f_{ah}, \quad \forall h \in H, h \geq 2 \tag{40}$$

6. Naturaleza de las variables:

$$
\begin{aligned}
&x_{ch} \geq 0, \quad \forall c \in C, h \in H \\
&z_{gh} \geq 0, \quad \forall g \in G, h \in H \\
&f_{ah} \geq 0, \quad \forall a \in A, h \in H \\
&y_{ah} \in \{0,1\}, \quad \forall a \in A, h \in H \\
&E_h \in \mathbb{R}, \quad \forall h \in H
\end{aligned}
$$