PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-1
Profesores: G. Angulo, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

# Solución Tarea 2

Fecha de entrega: Jueves 15 de abril - 23:59:00

## Problema 1.

Debido a que el modelo que propusieron para la localización de campamentos en la tarea anterior fue de mucha utilidad para el municipio encargado de la planificación, en esta tarea se les pide resolver este modelo considerando algunas modificaciones. Esta vez el objetivo es minimizar la distancia máxima entre una localidad y su respectivo campamento de vacunación sin incurrir en un costo superior a $P$. El problema puede modelarse como:

$$\begin{aligned}
&\min \quad w \\
s.a: \\
& w \geq d_{ij} y_{ij} && \forall i \in I, j \in J \\
& x_j \geq y_{ij} && \forall i \in I, j \in J \\
& \sum_{j \in J} y_{ij} = 1 && \forall i \in I \\
& s_j \geq \sum_{i \in I} y_{ij} p_i && \forall j \in J \\
& \sum_{j \in J} x_j c_j + s_j f_j \leq P \\
& x_j \in \{0,1\} && \forall j \in J \\
& y_{ij} \in \{0,1\} && \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

donde $d_{ij} > 0$ la distancia desde el centro de la localidad $i \in I$ al sitio $j \in J$.

a) Utilizando alguno de los teoremas de existencia de soluciones y que $\min_{j \in J} c_j + \sum_{i \in I} p_i \max_{j \in J} f_j < P$, demuestre que el problema admite solución óptima.

b) Utilizando Python + Gurobi, encuentre la solución óptima de la instancia adjunta. Incluya en el reporte el código utilizado, valor óptimo y solución óptima.

**Solución Problema 1.**

a) Las hipótesis que se deben cumplir para que el problema admita solución óptima son:

**Función objetivo continua**: La función objetivo es lineal, por lo tanto es continua.

**Dominio cerrado**: No hay restricciones con desigualdades estrictas, por lo tanto el dominio es cerrado.

**Dominio no vacío**: Es fácil ver que para cualquier valor de $x$ e $y$ que cumplan con el segundo y tercer conjunto de restricciones, siempre existen $w$ y $s$ que cumplen con el primer y cuarto conjunto de restricciones. Luego, debemos verificar que siempre se podrá cumplir con la restricción de presupuesto.

A partir de la información del enunciado tenemos que $\min_{j \in J} c_j + \sum_{i \in I} p_i \max_{j \in J} f_j < P$, vale decir, el presupuesto es suficiente para construir el campamento con el menor costo fijo y para

asignar a todas las personas al campamento con el costo variable más alto. Como el presupuesto alcanza para el costo variable más alto para todas las personas, también alcanza para el costo variable del campamento con el menor costo fijo. Finalmente, la solución que consiste en levantar únicamente el campamento con el costo fijo más barato y asignar a todas las personas a él siempre es factible, por lo tanto el dominio no es vacío.

**Función objetivo acotada**: Como $w \geq d_{ij} y_{ij}$ y $d > 0$, entonces $w > 0$. Luego, la función objetido está acotada inferiormente.

Por lo tanto, el problema anterior admite solución óptima.

b) El script necesario para resolver la instancia adjunta es:

```
w = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS)
x = m.addVars(I, J, vtype=GRB.BINARY)
y = m.addVars(J, vtype=GRB.BINARY)
s = m.addVars(J, vtype=GRB.CONTINUOUS)

m.addConstrs(w >= d[i, j] * y[i, j] for i in I for j in J)
m.addConstrs(x[j] >= y[i, j] for i in I for j in J)
m.addConstrs(sum(y[i, j] for j in J) == 1 for i in I)
m.addConstrs(s[j] >= sum(p[i] * y[i, j] for i in I) for j in J)
m.addConstr(sum(c[j] * x[j] + f[j] * s[j] for j in J) <= P)

m.setObjective(w, GRB.MINIMIZE)

m.optimize()
```

Al resolver este problema obtenemos un valor óptimo de 11 asociado a múltiples soluciones óptima. Una posible solución es:

| Variable | Valor |
|---|---|
| $w$ | 11 |
| $x_0$ | 1 |
| $x_1$ | 1 |
| $x_2$ | 1 |
| $x_3$ | 1 |
| $x_7$ | 1 |
| $x_{11}$ | 1 |
| $x_{12}$ | 1 |
| $s_0$ | 45 |
| $s_1$ | 11 |
| $s_2$ | 223 |
| $s_3$ | 36 |
| $s_7$ | 147 |
| $s_{11}$ | 14 |
| $s_{12}$ | 72 |
| $y_{0,2}$ | 1 |
| $y_{1,11}$ | 1 |
| $y_{2,7}$ | 1 |
| $y_{3,2}$ | 1 |
| $y_{4,7}$ | 1 |
| $y_{5,1}$ | 1 |
| $y_{6,3}$ | 1 |
| $y_{7,2}$ | 1 |
| $y_{8,12}$ | 1 |
| $y_{9,0}$ | 1 |

## Problema 2.

a) ¿Es $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \leq a^T x \leq \beta\}$ un conjunto convexo? Justifique.

b) Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y $\alpha > 0$. Demuestre que $f(x) = \alpha g(x) + \beta$ es una función convexa.

c) Sea $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 + x_2}$ tal que $f : D \to \mathbb{R}$ con $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 0\}$. Demuestre, utilizando la definición de convexidad, que $f$ es una función convexa.

**Solución Problema 2.**

a) Como $\alpha \leq a^T x$ y $a^T x \leq \beta$ son funciones lineales (hiperplanos) estas definen conjuntos convexos. Finalmente, el conjunto es convexo pues esta conformado por la intersección de conjuntos convexos.

b) Dado $\lambda \in [0, 1]$, debemos demostrar que:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\
\alpha g(\lambda x + (1-\lambda)y) + \beta &\leq \lambda(\alpha g(x) + \beta) + (1-\lambda)(\alpha g(y) + \beta) \\
\alpha g(\lambda x + (1-\lambda)y) + \beta &\leq \lambda \alpha g(x) + (1-\lambda)\alpha g(y) + \lambda\beta - \lambda\beta + \beta \\
\alpha g(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda \alpha g(x) + (1-\lambda)\alpha g(y) \\
\alpha g(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \alpha(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)) \\
g(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)
\end{aligned}
$$

Como $g$ es una función convexa, la última desigualdad es verdadera. Por lo tanto, $f$ es una función convexa.

c) Sea $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x$ con $x_1 + x_2 > 0$. Partiremos demostrando que $f(g(x_1, x_2)) = \frac{1}{x}$ es una función convexa

Dados $x, y > 0$ y $\lambda \in [0, 1]$, queremos mostrar que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, es decir:

$$\frac{1}{\lambda x + (1-\lambda)y} \leq \lambda \frac{1}{x} + (1-\lambda)\frac{1}{y}$$

Como $x, y > 0$. esto es equivalente a mostrar:

$$xy \leq (\lambda y + (1-\lambda)x)(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

o equivalentemente:

$$xy \leq \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2) + xy(\lambda^2 + (1-\lambda)^2)$$

Para verificar que esta última expresión se cumple, basta con notar que $x^2 + y^2 \geq 2xy$, por lo tanto:

$$\lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2) + xy(\lambda^2 + (1-\lambda)^2) \geq 2\lambda(1-\lambda)xy + xy(\lambda^2 + (1-\lambda)^2) = xy$$

Finalmente, como $g(x_1, x_2)$ es una función convexa no decreciente, $f(g(x_1, x_2)) = \frac{1}{x_1 + x_2}$ es una función convexa.