PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso:	ICS1113 - Optimización
Semestre:	2024 - 1
Profesores:	G. Angulo - C. Balbontin R. Cuadrado - G. Pérez

Interrogación 2
Duración: 150 minutos.

Instrucciones

- **Deben rellenar sus datos en cada hoja de su prueba**.
- Deben responder cada **pregunta en hojas separadas**.
- La evaluación es **individual**.
- Está **prohibido escribir respuestas después de finalizar el tiempo de desarrollo**. Se penalizará con puntaje de la prueba a los estudiantes que no cumplan con esta regla.
- Al finalizar, cada estudiante debe **escanear su prueba y cargarla** en formato PDF a CANVAS en el buzón "Interrogación 2". El buzón estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 10 minutos después de terminar el tiempo de desarrollo de la prueba.
- **Debe entregar la prueba física antes de irse: esta es la versión que será corregida. El PDF subido a CANVAS es una copia de seguridad**.
- Está **prohibido el uso de dispositivos electrónicos** durante el desarrollo de la prueba. Solo pueden ocupar un dispositivo electrónico al momento de escanear y subir su prueba a CANVAS.
- Si un estudiante termina antes de finalizar el tiempo de desarrollo, debe avisar a algún miembro del equipo docente para escanear y subir su prueba.
- Favor acercarse a un miembro del equipo docente en caso de cualquier inconveniente técnico durante el escaneo de la prueba.
- Se aplicará un descuento a la nota final de la evaluación por el incumplimiento de una o más de las instrucciones anteriores.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2024 - 1
Profesores: G. Angulo - C. Balbontin
R. Cuadrado - G. Pérez

Interrogación 2
Duración: 150 minutos.

Pregunta 1 (20 puntos)

(a) **(16 puntos)** Miguel tiene un emprendimiento de paseo de perros, en donde dispone del conjunto J con el listado de perros que requieren ser paseados diariamente. Para organizarse, Miguel ha definido 3 bloques o espacios de tiempo para pasear a los perros, en donde ha logrado establecer cuál es el tiempo mínimo, máximo y tiempo ideal de paseo de cada perro en minutos, los cuales los ha registrado en los parámetros a_j, b_j y c_j respectivamente, con $j \in J$. Miguel sabe que si el paseo se desvía en más de 10 minutos respecto de la duración ideal c_j del perro j, los dueños lo evaluarán con una calificación negativa.

Por otro lado, Miguel sabe que por un tema operacional, a lo más puede pasear Θ perros de manera simultánea en cada bloque. Adicionalmente, una vez iniciado el bloque, Miguel no puede agregar más perros ni liberar perros antes, es decir, todos los perros asignados a ese bloque pasean la misma cantidad de minutos. Por último, cada perro puede ser paseado solamente en 1 bloque y una única vez.

Escriba un problema de programación lineal en variables mixtas con el cual Miguel pueda minimizar la cantidad de calificaciones negativas que recibirá por parte de los dueños, garantizando que se cumplan las restricciones anteriormente descritas.

Solución: Variables de decisión:

- $X_{jk} \in \{0,1\}$: 1 si se asigna al perro j al bloque k, 0 e.o.c.
- Y_k: duración en minutos del bloque k.
- U_{jk} cantidad de minutos faltantes respecto paseo ideal para el perro j en el bloque k.
- V_{jk} cantidad de minutos sobrantes respecto paseo ideal para el perro j en el bloque k.
- $W_{jk} \in \{0,1\}$: 1 si la duración del paseo del perro j en el bloque k se encuentra a más de 10 minutos de su duración ideal c_j, 0 e.o.c.

Parametros Auxiliar

- M: número positivo entero grande

Min $\sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{3} W_{jk}$

s.a.

$\sum_{k=1}^{3} X_{jk} = 1 \quad \forall j \in J$ (R1: todos los perros paseados 1 vez)

$\sum_{j\in J} X_{jk} \leq \Theta \quad \forall k = 1..3$ (R2: cantidad máxima perros por bloque)

$X_{jk} \cdot a_j \leq Y_k \quad \forall j \in J, k = 1..3$ (R3: garantizar duración mínima paseo)

$Y_k \leq X_{jk} \cdot b_j + (1 - X_{jk})M \quad \forall j \in J, k = 1..3$ (R4: no sobrepasar duración paseo máxima)

$X_{jk} \cdot c_j \leq Y_k + U_{jk} \quad \forall j \in J, k = 1..3$ (R5: desviación hacia abajo respecto paseo ideal)

$Y_k - (1 - X_{jk})M \leq X_{jk} \cdot c_j + V_{jk} \quad \forall j \in J, k = 1..3$ (R6: desviación hacia arriba respecto paseo idea

$\frac{U_{jk}}{10} - 1 \leq W_{jk} \quad \forall j \in J, k = 1..3$ (R7: cálculo de bloque de 10 minutos para desviación hacia abajo)

$\frac{V_{jk}}{10} - 1 \leq W_{jk} \quad \forall j \in J, k = 1..3$ (R8: cálculo de bloque de 10 minutos para desviación hacia arriba)

$X_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, k = 1..3$

$Y_k \geq 0 \quad k = 1...3$

$U_{jk}, V_{jk} \geq 0 \quad \forall j \in J, k = 1..3$

$W_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, k = 1..3$

Asignación Puntaje:

- ◇ **(4 puntos)**: Definición de variables y naturaleza de restricciones:
  - **(0,5 puntos)**: (c/u) Variables X e Y
  - **(1 puntos)**: (c/u) Variables U , V y W
- ◇ **(1 puntos)**: Función Objetivo
- ◇ **(1 puntos)**: R1
- ◇ **(1 puntos)**: R2
- ◇ **(1 puntos)**: R3
- ◇ **(2 puntos)**: R4
- ◇ **(2 puntos)**: R5
- ◇ **(2 puntos)**: R6
- ◇ **(2 puntos)**: R7 y R8 (podría ser modelado como una sola restricción)
- ◇ Errores de escritura matemática en la restricción se castigan con el 50 % asociado a ese item. Si existe un error más profundo, se castiga ese item completo dando 0 puntos.

(b) **(4 puntos)** Dados un entero n, vectores $a, c \in \mathbb{R}^n$ y escalares $b, d \in \mathbb{R}$, considere el problema

$$\text{mín}\left\{\text{máx}\{a^\top x + b,\ c^\top x + d\} :\ x \in \{0,1\}^n\right\}.$$

Determine un problema lineal entero-mixto equivalente con una variable adicional z e indique cómo implementarlo en Python/Gurobi. Suponga que los datos anteriores han sido instanciados junto a un modelo vacío `m` de Gurobi.

Solución: El problema equivalente es

$$\text{mín}\left\{z : a^\top x + b \leq z,\ c^\top x + d \leq z,\ x \in \{0,1\}^n,\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Luego, la implementación queda

```
x = m.addVars(range(n), vtype = GRB.BINARY)
z = m.addVar(lb = -GRB.INFINITY)
m.addConstr(sum(a[j]*x[j] for j in range(n)) + b <= z)
m.addConstr(sum(c[j]*x[j] for j in range(n)) + d <= z)
m.setObjective(z)
```

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1,5 puntos)**: Problema equivalente
- ◇ **(0,5 puntos)**: Cada línea de código

Pregunta 2 (20 puntos)

(a) **(14 puntos)** Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min_{x\geq 0} \quad & 8x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 15. \end{aligned}$$

(i) **(8 puntos)** Resuelva utilizando Simplex Fase I y Fase II. En cada iteración, debe identificar la base, solución, valor de la función objetivo de Fase I o Fase II, y si es solución óptima del problema auxiliar (Fase I) o del problema original. En la solución óptima de Fase II indique cuáles restricciones están activas.

Solución: Problema auxiliar para comenzar con Fase I:

$$\begin{aligned} \min_{x,y\geq 0} \quad & y \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + y = 6 \\ & x_1 + 5x_2 + x_4 = 15 \end{aligned}$$

Iteración 1 Fase I B $= (y, x_4)$, N $= (x_1, x_2, x_3)$

$$A_B = A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c_B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_N = A_N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, c_N^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$z_B = 0, r_D^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que entra x_2 en: mín $\left\{\frac{6}{3}, \frac{15}{5}\right\} = 2$
Lo que significa que sale y. Ya que y sale de la base no es necesario hacer otra iteración - ya que sería solución óptima del problema auxiliar - por lo que podríamos pasar a Fase II con la nueva Base $= (x_2, x_4)$.

Iteración 1 Fase II B $= (x_2, x_4)$, N $= (x_1, x_3)$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -5/3 & 1 \end{pmatrix}, c_B^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \overline{A}_N = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -7/3 & 5/3 \end{pmatrix}, c_N^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$z_B = 6, r_D^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Estamos en solución óptima que corresponde al vértice (0,2,0,5), con la restricción 1 del

problema original activa (ya que x_3 es igual a 0) y la restricción que representa la no-negatividad de x_1.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(0,5 puntos)**: Definición problema auxiliar
- ◇ **(0,5 puntos)**: Identificar base inicial
- ◇ **(1 punto)**: Solución y valor FO vértice I1 Fase I
- ◇ **(1 punto)**: Costos reducidos vértice I1 Fase I
- ◇ **(0,5 puntos)**: Identificar cuál variable entra I1 Fase I
- ◇ **(0,5 puntos)** Identificar cuál variable sale I1 Fase I
- ◇ **(1 punto)**: Solución y valor FO vértice I1 Fase II
- ◇ **(1 punto)**: Costos reducidos vértice I1 Fase II
- ◇ **(1 punto)**: Identificar solución óptima
- ◇ **(1 punto)**: Identificar restricciones activas
- ◇ Si usan dos variables auxiliares, no hay problema y deberían definir la base inicial con esas dos variables

(ii) **(6 puntos)** Suponga que la holgura de la segunda restricción tiene un costo asociado que debe ser considerado en la función objetivo. ¿Para qué valores de este costo seguiríamos en la base actual? Indique cómo cambiaría la(s) base(s) óptima(s) fuera de este rango y cuál sería la solución óptima (o conjunto de soluciones óptimas) en los bordes del rango. Considere que la base óptima está compuesta por x_2 y la holgura de la segunda restricción.

Solución: La holgura x_4 está en la base, por lo que necesitamos revisar para que valores de su costo asociado seguiríamos estándo en solución óptima (la factibilidad se seguiría cumpliendo).

$$r_D^T = c_N^T - c_B^T \overline{A}_N = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -7/3 & 5/3 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$8 - (2 - 7c/3) \geq 0 \ \rightarrow c \geq -18/7$$

$$0 - (-1 + 5c/3) \geq 0 \ \rightarrow c \leq 3/5$$

Es decir, la holgura x_4 debería tener un costo mayor a $-18/7$ y menor a $3/5$ para que siguiéramos en la misma base $(2, 4)$. En los bordes del rango, existirían múltiples soluciones donde el vértice actual seguiría siendo solución óptima. Fuera del rango, no estaríamos en una solución óptima y por ende tendríamos que seguir iterando.

- ◇ Para el rango inferior, si el costo fuera igual a $-18/7$, para que el vértice siga siendo factible, x_1 podría subir hasta: mín $\left\{ \frac{2}{2/3}, \bullet \right\} = 3$, en cuyo caso saldría de la base la variable x_2. Por lo que la nueva base sería $B = (1, 4)$ y representa el vértice: $(3, 0, 0, 12)$. Por lo que el conjunto de soluciones óptimas sería:

$$x^* = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} : \lambda \in [0, 1] \right\}$$

  Si el costo fuera menor a $-18/7$, entonces entraría x_1 y saldría x_2, es decir, la nueva base sería: $(1, 4)$.
- ◇ Para el rango superior, si el costo fuera igual a $3/5$, para que el vértice siga siendo factible, x_3 podría subir hasta: mín $\left\{ \bullet, \frac{5}{5/3} \right\} = 3$, en cuyo caso saldría de la base

la variable x_4. Por lo que la nueva base sería $B = (2,3)$ y representa el vértice: $(0,3,3,0)$. Por lo que el conjunto de soluciones óptimas sería:

$$x^* = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in [0,1] \right\}$$

Si el costo fuera mayor a 3/5, entonces x_4 tendría que salir de la base y entraría x_3, es decir, la nueva base sería: $(2,3)$.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(0,5 puntos)**: Identificar que hay que analizar las condiciones de optimalidad (costos reducidos) con este nuevo c
- ◇ **(1 puntos)**: Calcular rangos de c
- ◇ **(0,5 puntos)**: Identificar que hay múltiples soluciones en los bordes del rango
- ◇ **(1 puntos)**: Identificar nueva base si el costo fuera menor al rango inferior
- ◇ **(1 puntos)**: Encontrar nuevo vértice si el costo fuera igual al borde inferior del rango y escribir el conjunto de soluciones óptimas
- ◇ **(1 puntos)**: Identificar nueva base si el costo fuera mayor al rango
- ◇ **(1 puntos)**: Encontrar nuevo vértice si el costo fuera igual al borde superior del rango y escribir el conjunto de soluciones óptimas
- ◇ Si no encuentran los nuevos vértices pero identifican que las múltiples soluciones estarían entre dos vértices, dar 0,5 puntos
- ◇ Si no se indica la nueva base pero sí se indica qué variable entra y cuál sale de la base, dar puntaje completo

(b) **(6 puntos)** Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a_i^\top x \geq b_i \ \forall i = 1, \ldots, m\}$.

(i) **(3 puntos)** Demuestre que si $\hat{x} \in P$ es la única solución óptima de mín$\{c^\top x : \ Ax \geq b\}$, entonces $\hat{x}$ es vértice de P.

Solución: Si $\hat{x} \in P$ no es vértice de P, entonces existen $x_1, x_2 \in P \setminus \{\hat{x}\}$ y $\lambda \in [0,1]$ tales que $\hat{x} = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Por hipótesis, tenemos $c^\top \hat{x} < c^\top x_1$ y $c^\top \hat{x} < c^\top x_2$. Luego, $c^\top \hat{x} < \lambda c^\top x_1 + (1-\lambda) c^\top x_2 = c^\top \hat{x}$, lo cual es contradicción.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 punto)**: Definición de (no) vértice
- ◇ **(1 punto)**: Condición de solución única
- ◇ **(1 punto)**: Concluir

(ii) **(3 puntos)** Suponga que para cada $i = 1, \ldots, m$, existe un elemento de P que satisface la i-ésima restricción de forma estricta. Demuestre que existe un elemento de P que satisface todas las restricciones de forma estricta.

Solución: Para cada $i = 1, \ldots, m$, sea $x_i \in P$ tal que $a_i^\top x_i > b_i$. Sea $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$. Como P es convexo y $\bar{x}$ es combinación convexa de elementos de P, $\bar{x}$ pertenece a P. Además, para cada $j = 1, \ldots, m$ tenemos

$$a_j^\top \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_j^\top x_i = \frac{1}{m} \sum_{i \neq j} a_j^\top x_i + \frac{1}{m} a_j^\top x_j > \frac{1}{m}(m-1) b_j + \frac{1}{m} b_j = b_j,$$

donde la desigualdad estricta viene de $a_j^\top x_i \geq b_j$ para $i \neq j$ y $a_j^\top x_j > b_j$.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 punto)**: Definición de x_i con desigualdad estricta
- ◇ **(1 punto)**: Definición de $\bar{x}$ y pertenencia a P
- ◇ **(1 punto)**: Concluir

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) **(14 puntos)** Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^3} \quad & x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a:} \quad & -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) **(3 puntos)** Construya el problema dual asociado y determine una solución dual óptima.
Solución:
El dual es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 4y_1 + 5y_2 \\ \text{s.a:} \quad & -2y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ & y_1 + y_2 = 2 \\ & 2y_1 - y_2 = 5 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Podemos obtener la solución resolviendo el sistema de equaciones asociado a las restricciones 2 y 3 del problema dual, y verificar que satisface las restricciones restantes. Así obtenemos que la solución óptima dual es $y^{*T} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
Asignación Puntaje:

- ◇ **(1,5 puntos)**: Contruir el problema dual
- ◇ **(1,5 puntos)**: Determinar solución al problema dual

(ii) **(3 puntos)** Obtenga la solución óptima del problema primal.
Solución: Para obtener la solución óptima primal podemos usar el teorema de holguras complementarias. Tenemos que:
Como $y_1 > 0 \Longrightarrow (-2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4) = 0$.
Como $y_2 > 0 \Longrightarrow (5 - 3x_1 - x_2 + x_3) = 0$.
Como tenemos holgura en la primera restricción dual $\Longrightarrow x_1 = 0$.
Luego, tenemos:
$x_2 + 2x_3 = 4$
$x_2 - x_3 = 5$
Por lo que obtenemos que $x^{*T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{14}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
Asignación Puntaje:

- ◇ **(1 puntos)**: Argumentar resolución con holguras complementarias
- ◇ **(1 puntos)**: Plantear correctamente el sistema de ecuaciones
- ◇ **(1 puntos)**: Resultado correcto

(iii) **(2 puntos)** ¿Cómo cambia el valor óptimo si es que el lado derecho de la segunda restricción se aumenta en 3 unidades? Considere que la base óptima no cambia.
Solución: El cambio en el valor óptimo es proporcional al precio sombra asociado. Si se aumenta en 3 unidades el lado derecho de la segunda restricción, el cambio es de $3 \cdot y_2 = 3 \cdot -\frac{1}{3} = -1$. Es decir, el valor óptimo disminuiría en una unidad.
Asignación Puntaje Forma 1:

- ◇ **(1 puntos)**: Argumentar resolución con precio sombra
- ◇ **(1 puntos)**: Resultado correcto

Asignación Puntaje Forma Alternativa:

- ◇ **(2 puntos)**: Desarrollo alternativo correcto

(iv) **(3 puntos)** Considere que ahora la variable x_1 también es irrestricta. Demuestre que el nuevo problema primal es no acotado.

Solución: Podríamos buscar un rayo de escape que mejore la función objetivo:

Por ejemplo, podemos identificar que el vector $d^T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ pertenece al cono recesivo asociado al poliedro que define el dominio del problema. Además, se tiene que $c^T d = -1$ por lo que el problema es no acotado. Notar que, para mostrar esto, podríamos haber tomado cualquier vector no nulo que cumpla $Ax \leq 0$ y $c^T d < 0$.

También podemos deducir esto usando las relaciones entre el primal y el dual. Remover la restricción de no negatividad de x_1 se traduce en el que la primera restricción del dual pasa a ser de igualdad. Ahora, si sumamos la primera restricción dual con la tercera restricción dual obtenemos que $2y_2 = 6 \implies y_2 = 3$ pero se tiene que $y_2 \leq 0$ por lo que el dual es infactible.

Ahora, sabemos que la solución óptima anterior sigue siendo factible dado que solo hemos relajado una restricción. Por lo tanto, el nuevo primal es factible. Como el primal es factible y su dual es infactible, necesariamente, el nuevo primal es no acotado.

Asignación Puntaje Forma 1:

- ◇ **(1 puntos)**: Encontrar rayo de escape
- ◇ **(2 puntos)**: Argumentar correctamente no acotamiento y que $c^T d < 0$, concluir.

Asignación Puntaje Forma 2:

- ◇ **(1 puntos)**: Mencionar problema dual infactible
- ◇ **(0,5 puntos)**: Argumentar problema primal factible
- ◇ **(1,5 puntos)**: Argumentar con relaciones de dualidad

(v) **(3 puntos)** Considere que ahora ha agregado una nueva restricción al problema primal. El nuevo problema primal tiene una solución óptima $\hat{x}^*$.

Sea c el vector de costos primal, b el vector del lado derecho del primal original y $\hat{b}$ el vector del lado derecho del nuevo problema primal. Sea $\hat{y}^*$ la solución óptima del nuevo problema dual. Sea x^* la solución óptima del problema primal original e y^* la solución óptima del problema dual original. Sea x_0 una solución factible del problema primal original y $\hat{x}_0$ una solución factible del problema primal nuevo. Sea $\hat{y}_0$ una solución factible del problema dual nuevo.

Complete las relaciones que pueda deducir en la siguiente tabla con "=", "$\leq$", "$\geq$" según corresponda. Si no es posible deducir una relación, complete con "?".

Valor	**Relación**	**Valor**
$c^T x^*$		$c^T \hat{x}^*$
$c^T x^*$		$b^T y^*$
$c^T x_0$		$b^T y^*$
$b^T y^*$		$\hat{b}^T \hat{y}^*$
$c^T x_0$		$c^T \hat{x}_0$
$c^T \hat{x}^*$		$\hat{b}^T \hat{y}_0$

Solución: Usamos el concepto de relajación y dualidad débil/fuerte para obtener que:

Valor	Relación	Valor
$c^T x^*$	$\leq$	$c^T \hat{x}^*$
$c^T x^*$	$=$	$b^T y^*$
$c^T x_0$	$\geq$	$b^T y^*$
$b^T y^*$	$\leq$	$\hat{b}^T \hat{y}^*$
$c^T x_0$	?	$c^T \hat{x}_0$
$c^T \hat{x}^*$	$\geq$	$\hat{b}^T \hat{y}_0$

Asignación Puntaje:

- ◇ **(0,5 puntos)**: Por cada relación

(b) **(6 puntos)** Sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido completo con $n \geq 2$ nodos. Dados nodos distintos $s, t \in N$ y un vector $c \in \mathbb{R}^A$, considere el problema del camino más corto de s a t. Se puede demostrar que los vértices asociados al problema lineal

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{i,j \in N:\ i \neq j} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j \in N:\ j \neq s} x_{sj} - \sum_{j \in N:\ j \neq s} x_{js} = 1 \\
& \sum_{j \in N:\ j \neq t} x_{tj} - \sum_{j \in N:\ j \neq t} x_{jt} = -1 \\
& \sum_{j \in N:\ j \neq i} x_{ij} - \sum_{j \in N:\ j \neq i} x_{ji} = 0 \quad \forall i \in N:\ i \neq s, t \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

son binarios y corresponden precisamente a caminos simples de s a t, y que el problema dual corresponde a

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & y_s - y_t \\
\text{s.a.} \quad & y_i - y_j \leq c_{ij} \quad \forall i, j \in N:\ i \neq j.
\end{aligned}$$

(i) **(3 puntos)** Explique claramente por qué el problema dual es equivalente a

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & z_t - z_s \\
\text{s.a.} \quad & z_j - z_i \leq c_{ij} \quad \forall i, j \in N:\ i \neq j,
\end{aligned}$$

y, más aún, podemos fijar $z_s = 0$.

Solución: Dado que y es libre de signo, haciendo el cambio de variables $z_i = -y_i$ para todo $i \in N$, obtenemos lo primero. Además, si z es factible, entonces al restar un mismo valor a todas las componentes obtenemos otra solución factible con el mismo valor objetivo. En particular, restando z_s, obtenemos lo segundo.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1,5 puntos)**: Cambio de variables
- ◇ **(1,5 puntos)**: Traslación por constante

(ii) **(3 puntos)** Sean x^* y z^* soluciones óptimas. Explique claramente por qué z_k^* corresponde a la distancia recorrida desde el nodo s al nodo k en caso que dicho nodo sea parte del camino óptimo.

Solución: Por holgura complementaria, si $x_{ij}^* = 1$, entonces $z_j^* - z_i^* = c_{ij}$. Luego, sumando sobre los arcos que conforman el camino parcial de s a k, obtenemos lo deseado.

Asignación Puntaje:

- ◇ **(1,5 puntos)**: Holgura complementaria
- ◇ **(1,5 puntos)**: Suma telescópica

Tabla de dualidad:

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas