PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 02-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - M. Klapp
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Pauta Interrogación 3

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *La interrogación cuenta con 66 puntos, el 7 se logra sacando 60 o más puntos en la interrogación.*

Pregunta 1 (22 puntos)

Parte A (18 puntos)

Para cada una de estas afirmaciones, señale si es VERDADERA (probando su veracidad) o FALSA (mediante un contraejemplo).

(a) **(3 puntos)** Defina a P^R como la relajación lineal asociada a un problema de optimización lineal entera P. Si P^R es no acotado, entonces P debe poseer al menos una solución factible.

Solución: Falso. Considere en $\mathbb{R}^2$ un dominio definido por el rayo $(\sqrt{2}, 0) + t(0, 1)$ para $t \geq 0$ y el vector de costos $c = (0, -1)$. El problema de minimización relajado es no acotado, pero el problema entero es infactible.

(b) **(3 puntos)** Considere el problema $\max_{x \in \{0,1\}^n} \{c^T x : Ax \leq b\}$ con n variables, m restricciones l.i., $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ y $c \in \mathbb{Z}^n$. Si el coeficiente c_1 es negativo, entonces $x_1 = 0$ en el óptimo.

Solución: Falso. Considere $\max_{x \in \{0,1\}^2} \{-x_1 + 2x_2 \text{ s.a. } x_2 - x_1 \leq 0\}$. La solución óptima es $(1; 1)$.

(c) **(3 puntos)** Un problema de programación lineal tendrá solución óptima entera si y sólo si todas sus soluciones básicas factibles son enteras.

Solución: Falso. La relación va en un sentido. Un dominio con vértices enteros implica solución óptima entera, pero no al revés. Considere $\min_{x \in \mathbb{Z}_+} \{x \text{ s.a. } x \leq 0.5\}$. La solución óptima es $(x = 0)$ (entera), pero existe un vértice del dominio fraccionario $(x = 0, 5)$.

(d) **(3 puntos)** Considere un conjunto de nodos N y un conjunto de arcos dirigidos A que generan una red fuertemente conexa $G = (N, A)$. Siempre existe una solución factible para el Problema de Flujo en redes a Mínimo Costo sobre G con costos por unidad de flujo $c \in \mathbb{Z}^{|A|}$ y ofertas netas $b \in \mathbb{Z}^{|N|}$ tal que $\sum_{i \in N} b_i = 0$. Asuma que no hay capacidades máximas de flujo en arcos.

Solución: Verdadero. Para encontrar una solución factible tome un nodo oferta cualquiera i y un nodo demanda cualquiera j. Lleve $\min\{b_i, -b_j\}$ unidades desde i hacia j utilizando una ruta existente desde i a j. Repita lo anterior hasta satisfacer toda demanda.

(e) **(3 puntos)** En cada iteración del método SIMPLEX sobre el problema dual se identifican simultáneamente una solución dual factible y una solución primal que sólo es primal factible en vértice óptimo.

Solución: Verdadero. La solución dual siempre será factible, mientras que la primal estará codificada en los costos reducidos duales. Sólo en el óptimo estos costos reducidos cumplirán con la condición de optimalidad (que es equivalente a factibilidad primal).

(f) **(3 puntos)** Si el problema primal es infactible, entonces el problema dual es no acotado. **Solución:** Falso. Pueden ser ambos infactibles. Por ejemplo: $\min x_1 + 2x_2$ s.a. $x_1 + x_2 = 1, x_1 + x_2 = 2$.

Parte B (4 puntos)

Tres estudiantes Alexis, Gary y Claudio resolvieron dos problemas de optimización dados por:

$$P)\ v = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^T x \text{ s.a. } Ax \leq b\}$$

y por

$$D)\ u = \min_{y \in \mathbb{R}^m_+} \{b^T y \text{ s.a. } A^T y = c\},$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Se sabe que ambos problemas tienen solución factible.

Alexis señala que las regiones factibles de ambos problemas están acotadas. Gary señala que ambos problemas tienen regiones factibles no acotadas. Claudio señala que un problema tiene una región factible no acotada. ¿Quién está siempre equivocado independiente de los valores de A, b y c y quién eventualmente podría tener la razón? Justifique su respuesta para cada caso con una demostración o un contraejemplo.

Solución:

Verifiquemos el primer comentario. Supongamos que $Ax \leq b$ está acotado, entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $k \in \mathbb{R}_+$ tal que $|x_i| \leq k$. En particular para x_1, los problemas $\max_{x \in \mathbb{R}^n}\{x_1 \text{ s.a. } Ax \leq b\}$ y $\max_{x \in \mathbb{R}^n}\{-x_1 \text{ s.a. } Ax \leq b\}$ tienen solución óptima. Por dualidad débil en el primer problema, existe $y^1 \geq 0$ tal que: $A^T y^1 = e_1$, donde e_1 es el vector canónico con un 1 en la primera componente y cero en el resto. De la misma manera, por dualidad débil en el segundo problema existe $y^2 \geq 0$ tal que: $A^T y^2 = -e_1$. Defina $y := y^1 + y^2$, luego existe $y \geq 0$ tal que $A^T y = 0$. Esto implica que existe un rayo de escape en el dominio dual. Luego, la región factible dual no está acotada. Alexis siempre está equivocado.

Claudio puede tener la razón dependiendo de los datos. Considere el problema primal $\max\{x \text{ s.a. } x \leq 1\}$ con región factible no acotada y su problema dual $\min_{y \geq 0}\{y \text{ s.a. } y = 1\}$ con región factible acotada.

Gary puede tener la razón dependiendo de los datos. Considere el problema primal $\max\{x_1 + x_2 \text{ s.a. } x_1 \leq 1, -x_1 \leq -1, x_2 \leq 1\}$ con región factible no acotada y su problema dual $\min_{y \geq 0}\{-y_1 + y_2 + y_3 \text{ s.a. } -y_1 + y_2 \geq 1, y_3 \geq 1\}$ con región factible no acotada.

Pregunta 2 (16 puntos)

Parte A (8 puntos)

Considere el siguiente problema de programación lineal entera

$$P)\ v = \min_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \{c^T x \text{ s.a. } Ax = b\},$$

y su problema relajado dado por

$$P^R)\ v^R = \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \{c^T x \text{ s.a. } Ax = b\},$$

donde $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ con rango m, $b \in \mathbb{Z}^m_+$ y $c \in \mathbb{Z}^n$ son los parámetros de ambos problemas. Defina el conjunto de índices de variables como $N := \{1, \ldots, n\}$.

(a) **(4 puntos)** Sea x^0 una solución factible de P. Pruebe que $c^T x^0 \geq v^R$. Luego demuestre que $v \geq v^R$.

Solución: Si x^0 es factible para P, entonces es factible para P^R (su dominio incluye al de P). Luego, cualquier solución factible de P^R tiene un objetivo peor o igual al óptimo v^R.

(b) **(4 puntos)** Sea $B \subset N$ una base con solución factible para P^R. Como usted sabe, un plano cortante se define como una desigualdad válida de P que elimina algunas soluciones fraccionarias en P^R. Pruebe formalmente que

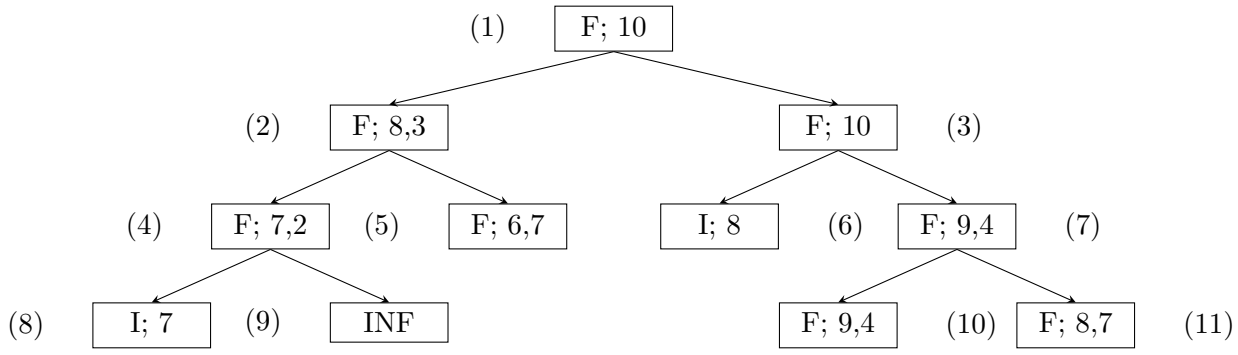
$$\sum_{j \in N \setminus B} x_j \geq 1,$$

es un plano cortante para P.

Solución: Sea x^B el vértice asociado a la base B. Se asume que x^B es fraccionario (si no, no tiene sentido la pregunta). El plano corta el vértice fraccionario, pues $\sum_{j \in N \setminus B} x^B_j = 0 < 1$. Cualquier solución diferente al vértice (lo que incluye a todas las soluciones enteras) debe cumplir que $\sum_{j \in N \setminus B} x_j > 0$. En particular, cualquier solución entera debe cumplir la misma relación redondeando el lado derecho al entero superior más cercano, es decir a 1.

Parte B (8 puntos)

Considere el siguiente árbol que ilustra una ejecución (no terminada) del algoritmo de Branch & Bound (B&B) sobre un problema de optimización lineal entera. Cada rectángulo representa la solución de una relajación lineal (nodo). Los arcos salientes de cada nodo representan ramificaciones del B&B en dos. Cada nodo detalla el valor óptimo relajado y si su solución óptima relajada es fraccionaria (F), entera (I) o si el problema relajado es infactible (INF). El valor (X) es un identificador del nodo.



(a) **(3 puntos)** ¿Está maximizando o minimizando? ¿Cuál es el valor objetivo del incumbente?

Solución: Maximizando, pues al agregar restricciones baja el valor óptimo relajado de los nodos. El incumbente tiene valor $z^I = 8$.

(b) **(3 puntos)** ¿Qué nodos requieren procesamiento posterior? ¿Cuáles debe podar? **Ayuda:** Asuma que los coeficientes de la función objetivo son enteros ($c^T x \in \mathbb{Z}$) y que el B&B está diseñado para la búsqueda de una sola solución óptima (no busca soluciones múltiples).

Solución: El único nodo no podable es (10). El resto tiene un objetivo relajado (truncado al entero inferior) igual o peor que 8.

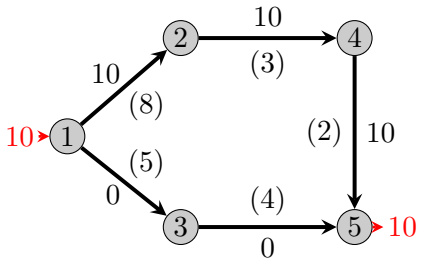
(c) **(2 puntos)** Con este árbol: ¿Cuál es la menor cota superior garantizable para la diferencia entre el valor óptimo y el valor objetivo del incumbente.

Solución: $z^8 - z^I \leq \lfloor 9,4 \rfloor - 8 = 1$

Pregunta 3 (14 puntos)

Parte A (6 puntos)

Considere el siguiente grafo, sobre el cual se muestra una manera de transportar 10 unidades de flujo desde el nodo 1 al nodo 5.



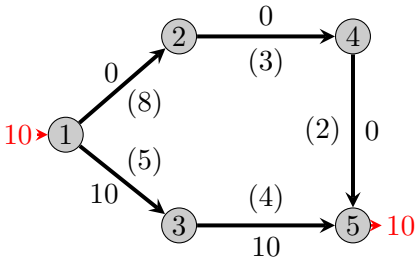
En este grafo, todas las cotas mínimas son 0, mientras que todas las capacidades máximas son 10 unidades. La información que aparece entre paréntesis representa el costo por unidad de flujo en el arco correspondiente.

(a) **(1 puntos)** Si la solución básica factible inicial considera todos los arcos menos el arco (3,5), ¿cuál es el costo reducido de ese arco?

Solución: El costo reducido del arco (3,5) es -4. Esto se determinar ya que el costo de llevar una unidad a través del camino 1–2–4–5 es 13 y reasignarlo por el camino 1–3–5 es 9, luego, existe un ahorro de 4 unidades.

(b) **(3 puntos)** Realice la reasignación de flujo considerando que el arco (3,5) ingresa a la base.

Solución: En este caso la reasignación de flujo es de $\varepsilon = 10$ unidades, quedando:



(c) **(2 puntos)** ¿Es la solución obtenida en (b) óptima? Justifique mediante el criterio de optimalidad del método Simplex de Redes.

Solución: En este caso podemos formar un árbol generador básico con los flujos de los arcos (1,2), (1,3), (2,4) y (3,5). Entonces, calculamos las variables duales:

$$\begin{array}{lll} \bar{c}_{12} & 8-\pi_1+\pi_2 & =0 \\ \bar{c}_{13} & 5-\pi_1+\pi_3 & =0 \\ \bar{c}_{24} & 3-\pi_2+\pi_4 & =0 \\ \bar{c}_{35} & 4-\pi_3+\pi_5 & =0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \pi_1 & = & 0 \\ \pi_2 & = & -8 \\ \pi_3 & = & -5 \\ \pi_4 & = & -11 \\ \pi_5 & = & -9 \end{array}$$

con lo que el costo reducido del arco (4,5) es:

$$\bar{c}_{45} \quad 2-(-11)+(-9) \quad = 4 \geq 0$$

Luego, la solución obtenida en la parte (b) es la solución óptima del problema.

Parte B (8 puntos)

Considere $n \geq 2$ y el siguiente problema de programación lineal (P):

$$\begin{array}{llccccccc} \text{mín} & x_1 & + & 2x_2 & + & \cdots & + & nx_n & \\ \text{s.a:} & x_1 & & & & & & & \geq 1 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & \geq 2 \\ & \vdots & + & \vdots & & \ddots & & & \geq \vdots \\ & x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & \geq n \\ & x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n & \geq 0 \end{array}$$

(a) **(2 puntos)** Plantee el problema dual de (P).

Solución: El dual queda:

$$\begin{array}{llccccccc} \text{máx} & y_1 & + & 2y_2 & + & \cdots & + & ny_n & \\ \text{s.a:} & x_1 & + & y_2 & + & \cdots & + & y_n & \leq 1 \\ & & & y_2 & + & \cdots & + & y_n & \leq 2 \\ & & & & & \ddots & & \vdots & \leq \vdots \\ & & & & & & & y_n & \leq n \\ & y_1 & , & y_2 & , & \cdots & , & y_n & \geq 0 \end{array}$$

(b) **(3 puntos)** Verifique explícitamente con un par de soluciones primal-dual que se cumple el teorema fuerte de dualidad.

Solución: Notemos que (P) y (D) son factibles ya que $x = (1, \ldots, 1)$ y $y = (1, \ldots, 0)$ satisfacen las restricciones, respectivamente. Entonces, como se debe cumplir la dualidad débil, ambos problemas están acotados (se acotan mutuamente en las soluciones antes presentadas), luego tienen solución óptima y sus valores óptimos deben coincidir.

(c) **(3 puntos)** Pruebe que para toda solución dual factible y se cumple que $\sum_{j=k}^{n} y_j < k$, para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$.

Solución: Si se tiene una solución factible del dual, esta debe cumplir con la primera restricción dual:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \leq 1 < k \ \ \forall k \in \{2, \ldots, n\} \Rightarrow \sum_{j=k}^{n} y_j \leq 1 < k \ \ \forall k \in \{2, \ldots, n\} \text{ (ya que } y_j \geq 0)$$

Pregunta 4 (14 puntos)

Se viene el verano y Giulia, chilena de nacimiento, desea conocer Italia, el país de sus ancestros. Ella ha listado localidades de Italia que desea conocer en el conjunto I, pero no podrá recorrer todos esos lugares por limitaciones de dinero y tiempo.

Para decidir cuáles localidades escoger en su viaje, Giulia estimó que visitar $i \in I$ le hará f_i unidades de felicidad más alegre. Además, ella sabe que los paisajes de Italia son espectaculares, por lo que estimó que recorrer el tramo desde la localidad $i \in I$ hasta la localidad $j \in I$ le hará g_{ij} unidades de felicidad más alegre (con $i \neq j$). Además, en caso de visitar la localidad $i \in I$, Giulia ha decidido dedicarle a la visita al menos $d_i > 0$ días. El tiempo de viaje entre cada par $i, j \in I$ de localidades es $t_{ij} > 0$ días ($i \neq j$).

Giulia calculó que su estadía completa en la localidad $i \in I$ cuesta $s_i > 0$ euros (independiente del tiempo de estadía) y que viajar desde la localidad $i \in I$ a la $j \in I$ cuesta $c_{ij} > 0$ euros ($i \neq j$).

Para tomar su decisión, su familia y amigos le han otorgado diversos aspectos a considerar:

- ◇ Hay un listado $J \subset I$ de localidades que debe visitar pase lo que pase (entre ellos, lugares en que vivieron sus ancestros).
- ◇ También determinó un conjunto $L \subset I$ de localidades en donde se venden los souvenirs solicitados por su familia. No es obligación que pase por esas localidades, pero si pasa por una, seguro comprará una unidad del souvenir solicitado (de costo despreciable), lo que la hará η unidades de felicidad más alegre por cada souvenir adquirido.
- ◇ Existe un subconjunto $P \subset J$ de localidades, tal que la visita a la localidad $p \in P$ debe contener los día consecutivos $u_p, \ldots, v_p$ (inclusive), pues existen festivales y/o eventos locales que son imperdibles. Asuma que estos eventos no se cruzan temporalmente y que es posible visitarlos todos.
- ◇ Que recorra por lo menos $\alpha \geq |J|$ de las localidades de su lista.
- ◇ Finalmente, Guilia no podrá por ningún motivo superar su presupuesto de γ euros.

Construya un modelo de programación lineal entero mixto que modele el problema anterior con el objetivo de maximizar la felicidad de Giulia. Asuma que Giulia comenzará su viaje en $s \in J, (s \notin P)$, por lo que no es necesario que considere su viaje desde/hacia Chile en su modelación. También considere que no se puede visitar un lugar más de una vez.

AYUDA: Recuerde que la restricción de eliminación de *subtours* vista en clases para un grafo dirigido con un conjunto N de nodos corresponde a alguna de las siguientes versiones equivalentes:

$$\text{Secciones 1 y 2:} \quad \sum_{i \in C} \left(\sum_{j \in N : j \notin C} x_{ij} + \sum_{k \in N : k \notin C} x_{ki} \right) \geq 2 \quad \forall C \subset N, 2 \leq |C|$$

$$\text{Secciones 3, 4 y 5:} \quad \sum_{i \in U} \sum_{j \in U : j \neq i} x_{ij} \leq |U| - 1 \quad \forall U \subset N : |U| \geq 1$$

Solución:

Variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si Giulia viaja desde el lugar } i \in I \text{ al lugar } j \in I : i \neq j \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si Giulia visita el lugar } i \in I. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$a_i =$ momento en que Giulia ya está en el lugar $i \in I$.

$b_i =$ momento en que Giulia sale del lugar $i \in I$.

Función Objetivo

$$\text{máx} \quad \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I : j \neq i} x_{ij} g_{ij} + \sum_{i \in L} \eta y_i$$

Restricciones

(R1) Las ciudades de J deben ser visitadas sí o sí.

$$y_i = 1 \qquad \forall i \in J$$

(R2) Visitar por lo menos α ciudades de su lista.

$$\sum_{i \in I} y_i \geq \alpha$$

(R3) No puede superar su presupuesto.

$$\sum_{i \in I} y_i s_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in I : j \neq i} c_{ij} x_{ij} \leq \gamma$$

(R4) Giulia debe salir 1 vez, y entrar 1 vez, a los lugares que decidirá visitar finalmente.

$$\sum_{j \in I : j \neq i} x_{ij} = y_i \qquad \forall i \in I$$

$$\sum_{j \in I : j \neq i} x_{ji} = y_i \qquad \forall i \in I$$

(R5) Evitar que Giulia arme sub-tours dentro de los lugares a los que irá. Se busca que esta restricción se cumpla si un subconjunto U de lugares es un **subconjunto** que abarca sólo lugares **a los que irá** (esto logrado en el término que multiplica el M grande). U se define como cualquier subconjunto de ciudades de I.

$$\sum_{i \in U} \sum_{j \in U : j \neq i} x_{ij} \leq |U| - 1 + M \left(|U| + 1 - \sum_{i \in U} y_i - y_j \right) \quad \forall U \subset I : |U| \geq 1 \quad \forall j \in I \backslash U \quad M \gg 0$$

Existen otras formulaciones para esta restricción.

(R6) El tiempo de salida de cada lugar debe corresponder con el tiempo de estadía mínima en cada lugar. Notar que no es necesario evitar esta relación para los lugares no visitados.

$$b_i \geq a_i + d_i \qquad \forall i \in I$$

(R7) El tiempo de entrada de un lugar corresponde al tiempo de salida del anterior en el tour más el tiempo de viaje.

$$b_j + t_{ij} \leq a_i + G(1 - x_{ij}) \qquad \forall i, j \in I : i \neq j \quad G \gg 0$$

(R8) Estar en las fechas recomendadas por sus familiares y amigos.

$$a_i \leq u_i \qquad i \in J$$

$$b_i \geq v_i + 1 \qquad i \in J$$

(R9) Naturaleza de las variables

$$\begin{aligned} x_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i, j \in I : i \neq j \\ y_i &\in \{0,1\} && \forall i \in I \\ a_i &\geq 0 && \forall i \in I \\ b_i &\geq 0 && \forall i \in I (\text{redundante}) \end{aligned}$$