PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2020 - 2
Profesores: : G. Angulo - R. Cuadrado
J. González - P. Guajardo

Examen

Duración: 150 minutos.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (12 puntos)

Resuelva las siguientes dos preguntas independientes entre sí:

(a) **(6 puntos)** Considere un problema de optimización de flujo en redes donde se quieren distribuir productos desde las fábricas hacia los consumidores. Existen tres tipos de nodos: fábricas en el conjunto F, centros de transferencia en el conjunto T y consumidores en el conjunto C. La unión de estos tres conjuntos de nodos conforma el conjunto N. Las fábricas tienen oferta positiva o_i que representa la capacidad de producción de la fábrica i, los centros j tienen oferta nula, y los consumidores tienen oferta negativa d_k que representan lo que necesita consumir el consumidor k. Las fábricas pueden producir al menos todo lo que los consumidores demandan.

Existen arcos desde cada fábrica a cada centro almacenados en el conjunto P, y desde cada centro a cada consumidor almacenados en el conjunto S. La unión de estos dos conjuntos de arcos conforma el conjunto A. Cada arco tiene un costo $c_a > 0$.

Además, está permitido que la demanda d_k de un consumidor k no sea satisfecha completamente, pero se debe pagar un costo r_k por unidad de demanda insatisfecha del consumidor k.

Usted quiere minimizar los costos de distribuir los productos desde las fábricas a los consumidores, mediante un Problema de Flujo a Costo Mínimo (PFCM) y resolverlo con el algoritmo simplex en redes. ¿Qué cambios debería hacer al grafo compuesto por los nodos N y arcos A para que pueda ser resuelto mediante simplex en redes?

Solución: Se deben hacer dos cambios a la red original para que pueda ser resuelta mediante simplex en redes:

(i) Crear un nodo h que absorba la capacidad ociosa de todas las fábricas. Este nodo tendrá oferta $-\sum_{i \in F} o_i + \sum_{i \in C} d_i$ y se deben crear arcos desde cada nodo en el conjunto F hacia el nodo h, con costo cero.

(ii) Se debe crear un nodo p que inyecte flujo a los consumidores para representar la demanda insatisfecha. Debe inyectar la demanda total $\sum_{i \in C} d_i$ a la red, y se deben crear arcos desde el nodo p hacia todos los nodos del conjunto C, a costo r_i, que representarán las unidades insatisfechas de demanda del consumidor i. Además, el nodo h se debe modificar para que consuma en total $-\sum_{i \in F} o_i$ unidades y se debe crear un arco a costo cero desde p hacia h que represente las unidades no fueron dejadas como insatisfechas.

(b) **(6 puntos)** Considere un grafo de 4 nodos A, B, C y D. Los nodos A, B y C ofertan cada uno una unidad, mientras que el nodo D consume tres unidades. Existen 5 arcos en la red: $A-C$, $A-D$, $B-C$, $B-D$, $C-D$. Los costos de los arcos están dados por: $c_{AC}=1$, $c_{AD}=2$, $c_{BC}=5$, $c_{BD}=4$ y $c_{CD}=2$.

Asuma que un compañero suyo está resolviendo este Problema de Flujo a Costo Mínimo mediante simplex en redes. Su compañero le dice que se encuentra en una iteración donde los potenciales tienen los siguientes valores: $\pi_A=3$, $\pi_B=4$, $\pi_C=2$ y $\pi_D=0$.

Determine si su compañero ha llegado al óptimo y si no es así, complete el trabajo para obtener la solución óptima del problema mediante simplex de redes.

Solución: Para obtener la base entregada por el compañero se deben calcular los costos reducidos de todos los arcos mediante la ecuación $r_{ij}=c_{ij}-\pi_i+\pi_j$. Los que tengan costo reducido igual a cero son candidatos a estar en la base, y necesitamos exactamente tres arcos en la base.

La base entregada por el compañero está conformada por los arcos A-C, C-D y B-D, con flujos 1, 2 y 1 respectivamente y un valor de la función objetivo de 9. Luego, obtenemos los costos reducidos de los arcos fuera de la base B-C y A-D: 3 y -1, respectivamente. Al tener algún costo reducido negativo, la solución no es óptima. El arco A-D entra a la base con flujo igual a 1 y por lo tanto el arco A-C sale de la base. La nueva base está formada por los arcos A-D, C-D y B-D, cada uno con flujo igual a 1 y un valor de la función objetivo de 8.

Como los costos reducidos básicos son igual a cero, obtenemos los nuevos potenciales: $\pi_A=2$, $\pi_B=4$, $\pi_C=2$ y $\pi_D=0$. Los costos reducidos de los arcos B-C y A-C son 3 y 1, respectivamente, por lo tanto la solución es óptima.

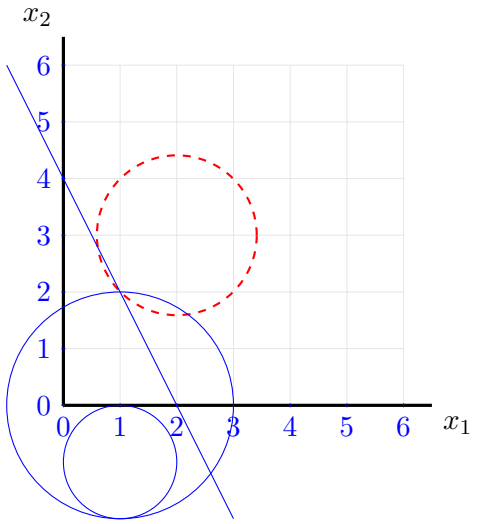
Pregunta 2 (12 puntos)

Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & (x-2)^2+(y-3)^2 & \\ s.a. & (x-1)^2+y^2 & \leq 4 \\ & 2x+y & \leq 4 \\ & (x-1)^2+(y+1)^2 & \geq 1 \end{array}$$

(a) **(4 puntos)** Grafique el problema y encuentre su solución óptima y valor óptimo.

Solución: El gráfico es el siguiente:



Se puede observar que la solución óptima es el punto (1, 2) con valor óptimo igual a 2.

(b) **(4 puntos)** Compruebe las condiciones de KKT en el punto encontrado. **Solución:** Queremos que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\nabla f(x) + \mu_1 \nabla g_1(x) + \mu_2 \nabla g_2(x) + \mu_3 \nabla g_3(x) = 0$$

$$\mu_i(g_i(x) - b_i) = 0 \quad \forall i$$

$$\mu_i \geq 0 \quad \forall i$$

Calculamos la primera ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-3) \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} = 0$$

Evaluado en el punto encontrado:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

Junto con el resto de las condiciones, obtenemos que se cumple cuando $\mu_1 = 1/4, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0$.

(c) **(4 puntos)** Compruebe la regularidad del dominio, y muestre que los puntos singulares existentes no son óptimos globales.

Solución: El Jacobiano de las restricciones es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2(x-1) & 2y \\ 2 & 1 \\ 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix}$$

Los puntos singulares son aquellos que generan una matriz jacobiana de restricciones activas no de rango completo. Para ello, el único punto posible es el $(1, -2)$, activando las restricciones 1 y 3, y generando filas linealmente dependientes.

Si evaluamos el punto $(1, -2)$ en la función objetivo, obtenemos el valor 26, lo cual es peor que el punto que ya teníamos. Por lo tanto, no es el óptimo global.

Pregunta 3 (24 puntos)

(a) **(4 puntos)** Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa y $b \in \mathbb{R}$. ¿Es $\{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) \geq b\}$ un conjunto convexo? Demuestre o refute con un contraejemplo.

Solución: En general, este conjunto no es convexo. Por ejemplo, tomando $g(x) = x^2$ y $b = 1$, tenemos $\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, el cual no es convexo.

(b) **(4 puntos)** Dados $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sean $v_1 = \text{mín}\{f(x) : \ x \in X_1\}$ y $v_2 = \text{mín}\{f(x) : \ x \in X_2\}$. Sin necesidad de justificar, indique qué combinaciones restantes en la tabla siguiente son posibles y cuáles no:

	$v_2 = -\infty$	$v_2 \in \mathbb{R}$	$v_2 = +\infty$
$v_1 = -\infty$			
$v_1 \in \mathbb{R}$		Sí	
$v_1 = +\infty$			

Solución:

	$v_2 = -\infty$	$v_2 \in \mathbb{R}$	$v_2 = +\infty$
$v_1 = -\infty$	Sí	No	No
$v_1 \in \mathbb{R}$	Sí	Sí	No
$v_1 = +\infty$	Sí	Sí	Sí

(c) **(4 puntos)** Sean $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función convexa y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demuestre que $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(g(x))$ es convexa.

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$. Como g es lineal, tenemos $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$. Luego, $h(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f(g(\lambda x + (1 - \lambda)y)) = f(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \leq \lambda f(g(x)) + (1 - \lambda)f(g(y)) = \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$.

(d) **(4 puntos)** Suponga que ha resuelto el problema mín$\{c^\top x : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$ mediante el método simplex, llegando a un vértice óptimo x^* no degenerado asociado a la base B^*. Explique, a grandes rasgos, cómo obtendría el segundo mejor vértice del problema revisando bases adicionales.

Solución: Es necesario revisar todos los vértices adyacentes a x^*. Para ello, basta probar con $B = (B^* \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ para cada i básico y j no básico, y quedarnos con la mejor solución básica factible. Como B^* es no degenerada, todos los vértices así obtenidos son distintos de x^*.

(e) **(4 puntos)** Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}$. Demuestre que si P es vacío, entonces existe $y \geq 0$ tal que $A^\top y \leq 0$ y $b^\top y > 0$. Para ello, considere mín$\{0^\top x : x \in P\}$ y su dual.

Solución: Tenemos que mín$\{0^\top x : \ Ax \geq b, \ x \geq 0\}$ es infactible. Luego, máx$\{b^\top y : \ A^\top y \leq 0, \ y \geq 0\}$ es infactible o no acotado, pero como $y = 0$ es factible, debe ocurrir lo segundo. Así, existe un rayo dual correspondiente al vector y deseado.

(f) **(4 puntos)** Sea $S = \{x \in \mathbb{Z}^n : \ Ax \leq b\}$. Dado $\mu \geq 0$, considere la desigualdad $\mu^\top Ax \leq \mu^\top b$. Explique por qué el incluir esta desigualdad no fortalece la formulación de S.

Solución: La relajación lineal de S corresponde a $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\}$. Notemos que como $\mu \geq 0$, todo $x \in P$ satisface $\mu^\top Ax \leq \mu^\top b$. Luego, esta restricción es redundante para P y por lo tanto no corta soluciones fraccionarias.

Pregunta 4 (12 puntos)

En un ejercicio de simulación, se le ha encomendado la misión de determinar un plan para el control de la propagación de una infección en un poblado de una región de su país. De manera simplificada, los expertos le han indicado que cada semana en la que usted decida aplicar una cuarentena, no habrá propagación en la semana siguiente, y a las 3 semanas posteriores, existirá una reducción de β por ciento de los infectados con respecto a los que existían al término de la semana en la que decidió aplicar la cuarentena. En caso de no aplicar cuarentena, la propagación de la enfermedad resultará en un aumento de α por ciento de los infectados para la semana siguiente. Por ejemplo, si inicialmente hay 100 infectados y la cuarentena se aplica solamente la primera semana, entonces con tasas α y β de 10 y 20 por ciento, la cantidad de infectados será 100 (100 + 0), 110 (100 + 10) y 101 (110 + 11 - 20) en las semanas siguientes.

A su vez, como medida económica paliativa, cada semana en la que decide aplicar una cuarentena la municipalidad de su poblado ha de incurrir en δ pesos en programas sociales en ayuda de las personas más necesitadas para que puedan sobrellevar el período de cuarentena. De manera paralela, los dineros del municipio se encuentran ahorrados en cuentas bancarias, las cuales entregan intereses de θ por ciento respecto al promedio de dinero existente en la cuenta en cada semana del mes. Asuma que el dinero de los intereses es depositado en la última semana del mes, en donde el conjunto F

contiene a todas la semanas correspondiente a fin de mes y que el conjunto S_k contiene a todas las semanas del mes k.

Plantee un modelo de optimización lineal en variables mixtas, en el cual se pueda minimizar el peak más alto de personas infectadas en un horizonte de T semanas, considerando que al principio hay p infectados, el municipio inicia la simulación con ϵ pesos y no puede quedar con saldo negativo.

Solución:

Se definen los siguientes parámetros:

- β: Porcentaje de disminución de infectados
- α: Porcentaje de aumento de infectados
- δ: Gasto por cada semana de cuarentena
- θ: Porcentaje de interés bancario
- ϵ: Presupuesto inicial
- M: Parámetro auxiliar muy grande.

Se definen las siguientes variables:

- I_t: Cantidad de infectados al término de la semana t.
- P_t: Presupuesto disponible al término de la semana t.
- W_t: Aumento de personas infectadas producto de las decisiones de la semana t.
- Z_t: Disminución de personas infectadas producto de las decisiones de la semana t.
- R_k: Intereses recibidos al término de la semana fin de mes k.
- Y: Variable auxiliar para controlar el máximo de contagios.
- $U_t : \begin{cases} 1 & \text{Si se decide generar cuarentena en semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$

Función objetivo: minimizar el peak de contagiados.

$$\min Y$$

Restricciones:

- Control de peak máximo de contagios;

$$I_t \leq Y \qquad \forall t \in T$$

- Control de flujo de contagiados

$$I_t = I_{t-1} + W_t - Z_{t-3} \qquad \forall t \geq 4$$

$$I_t = I_{t-1} + W_t \qquad \forall t := 2..3$$

$$I_1 = p + W_1$$

◇ Control de aumento de infectados o disminución

$$\alpha I_t \leq W_t + MU_t \qquad \forall t$$

$$Z_{t-3} \leq \beta I_{t-1} \qquad \forall t \geq 4$$

$$Z_{t-3} \leq MU_t \qquad \forall t \geq 4$$

◇ Control de presupuesto sin intereses

$$P_t = P_{t-1} - \delta U_{t-1} \qquad \forall t : t \notin FM, t \geq 2$$

$$P_1 = \epsilon - \delta U_1$$

◇ Control de presupuesto con intereses

$$P_t = P_{t-1} - \delta U_{t-1} + R_t \qquad \forall t \in FM$$

$$R_k \leq \theta \frac{\sum_{t' \in S_k} P_{t'}}{card(S_k)} \qquad \forall k$$

◇ Naturaleza de variables

$$I_t, P_t, W_t, Z_t \geq 0 \qquad \forall t$$

$$R_k \geq 0 \qquad \forall k$$

$$U_t \in \{0, 1\} \qquad \forall t$$

$$Y \in \mathbb{R}$$

Tabla de dualidad:

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas