PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 02-2018
Profesores: A. Cataldo - R. Cuadrado - J. González - M. Klapp

Pauta Interrogación 2

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 60 puntos. Sea estratégico, el orden de preguntas no tiene relación con su dificultad.*
- ◇ *Conteste cada pregunta en un cuadernillo. En cada uno coloque su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
- ◇ *Dos rondas de preguntas al profesor (una 15 minutos después de comenzar, otra cuando transcurra el 60 % del tiempo). Está prohibido hacer preguntas al ayudante. Deje anotado cualquier supuesto.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (18 puntos)

Tras un accidente, Jaimito se encuentra varado en una isla como náufrago. El objetivo de Jaimito es sobrevivir la mayor cantidad de días dentro de un horizonte de T días, ya que él sabe con certeza que al finalizar el día T será rescatado. Para sobrevivir en buenas condiciones, él intentará mantener una ingesta calórica superior a la de su gasto calórico diario. Para ello, nuestro amigo debe asegurarse de no tener durante 5 días seguidos un gasto diario de calorías mayor en 1800 kcal a las calorías diarias que recibirá alimentándose.

En su búsqueda por subsistir, Jaimito ha determinado que existe un conjunto de I actividades que podrá realizar para obtener alimentos. Analizando su situación, Jaimito ha determinado que realizar la actividad i le permitirá recolectar β_{ir} unidades del alimento r, el cual luego de consumido le entregará k_r kcal para ese día. Sin embargo, la realización de la actividad i le generará un gasto de α_i kcal. Por otro lado, dado que los alimentos no son ilimitados en la isla, Jaimito ha decidido que cada actividad la realizará a lo más 3 veces dentro de 7 días seguidos (ventana móvil de 7 días).

Por otro lado, para mantener la comida perecible en buen estado, Jaimito sabe que puede almacenar a lo más un volumen máximo de C_{max} m^3 dentro de su carpa, ya que de lo contrario los animales de la isla le comerían lo que no pudo guardar aquel día. En el parámetro V_r se encuentra el volumen en m^3 que ocupa cada unidad del recurso r, y en el subconjunto P se encuentra el listado de los recursos que necesitan ser almacenados dentro de la carpa de una noche a otra. El resto de los recursos los puede almacenar al aire libre sin límite de capacidad y sin posibilidad de que sean comidos por los animales de la isla.

Además de las actividades para conseguir alimento, Jaimito también puede construir una choza y así expandir en γ el volumen máximo de almacenamiento de recursos perecibles, pero deberá utilizar E_r unidades de los recursos r para realizarla. Sin embargo, dada las inclemencias del tiempo, Jaimito ha calculado que si para el día $\theta < T$ aún no ha construido la choza, definitivamente no podrá sobrevivir al día siguiente.

Basado en la información entregada, y considerando que Jaimito puede realizar a lo más una vez cada día cada actividad y que inicialmente no dispone de ningún recurso almacenado, construya un modelo de programación lineal con el cual Jaimito pueda maximizar la cantidad de días que podrá sobrevivir en la isla.

Solución:

- $\diamond$ $i \in \{1, \ldots, I\}$, actividades a realizar
- $\diamond$ $t \in \{1, \ldots, T\}$, días del horizonte
- $\diamond$ $r \in \{1, \ldots, R\}$, recursos existentes

Parámetros:

β_{ir}: unidades recolectadas del recurso r al realizar la actividad i.

k_r: cantidad de kcal obtenidas al consumir una unidad del recurso r.

α_i: Cantidad de kcal utilizadas al realizar la actividad i.

C_{max}: Capacidad máxima en m^3 de almacenamiento de productos perecibles.

V_r: Volumen utilizado por una unidad del recurso r.

γ: Aumento de capacidad al realizar la actividad e.

E_r: Cantidad de recursos r necesitados para realizar la actividad e.

Variables:

X_t: Variable binaria con valor 1 si Jaimito sobrevive al día t, 0 en otro caso.

Z: Variable auxiliar para calcular el día máximos sobrevivido.

Y_{it}: Variable binaria con valor 1 si se realiza la actividad i en el día t, 0 en otro caso.

I_{rt}: Inventario del recurso r al finalizar el día t.

W_t: Variable binaria con valor 1 si sobrepase el límite inferior de ingesta calórica, 0 en otro caso.

U_{rt}: Cantidad de unidades del recurso r consumidas el día t.

Función objetivo:

$$\max Z$$

Restricciones:

R1) Calcular el máximo día sobrevivido

$$Z \leq ord(t) X_t \quad \forall t = 1...T$$

R2) No realizar la misma actividad más de 3 veces en ventana de 7 días.

$$\sum_{k=t}^{min(t+6,T)} Y_{ik} \leq 3 \quad \forall t$$

R3) Ingesta calórica diaria

$$\sum_i \alpha_i Y_i t - \sum_r k_r U_{rt} \leq 1800 + MW_t \quad \forall t$$

R4) Determinar si se sobrevive el día por acumulación de ingesta negativa

$$-M(1-x_t) \leq 5 - \sum_{k=1}^{t} W_k \quad \forall t$$

R5) No sobrevivir sin choza después del día θ

$$X_t \leq \sum_{k=1}^{\theta} Y_{ek} \quad \forall t \geq \theta$$

R6) No sobrevivir si el día anterior no se sobrevivió

$$X_t \leq X_{t-1} \quad \forall t \geq 2$$

R7) Inventario de recursos

$$I_{r,t-1} + \sum_i \beta_{ir} Y_{it} \leq I_{r,t} + U_{rt} + \sum_r E_r Y_{et} \quad \forall t \geq 2$$

$$\sum_i \beta_{ir} Y_{i1} \leq I_{r,1} + U_{r,1} + \sum_r E_r Y_{e,1}$$

R8) No sobrepasar capacidad maxima de almacenaje

$$\sum_{r \in P} V_r I_{rt} \leq C_{max} + \gamma \sum_{k=1}^{t} Y_{ek} \quad \forall t$$

R9) Naturaleza variables

$$\begin{aligned} X_t, Y_{it}, W_t &\in \{0,1\} && \forall i,t \\ Z, I_{rt}, U_{rt} &\geq 0 && \forall r,t \end{aligned}$$

Pregunta 2 (12 puntos)

La empresa Square S.A. se dedica a fabricar balones de fútbol. Actualmente puede producir dos tipos de balones: comunes y especiales. Los precios en el mercado de los balones comunes y especiales están a $20.000 y $30.000 respectivamente. La demanda semanal de balones de cualquier tipo es de 50 unidades, por lo que no se podría vender más de esa cantidad semanalmente, independientemente del tipo de balón. Además, para fabricar cada balón se requiere de tres horas de trabajo en una máquina especializada si se trata de un balón común y de una hora en esta misma máquina si se trata de un balón especial. En total, Square S.A. cuenta con 90 horas disponibles a la semana de la máquina especializada para fabricar balones. Por último, la empresa tiene un contrato con una institución deportiva estableciendo que le venderá a esta institución cada semana 10 balones comunes (demanda que ya está incorporada en la demanda semanal antes descrita).

La empresa le pide a usted que le ayude a decidir cuántos balones fabricar de cada tipo semanalmente para maximizar sus ganancias. Para esto, y asumiendo que todo tipo de balón es divisible (se pueden fabricar cantidades no enteras), se le pide:

(a) **(2 puntos)** Formule un modelo de programación lineal que permita planificar la decisión óptima para la empresa.

Solución: El modelo es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & 2x + 3y \\ s.a. & x + y \leq 50 \\ & 3x + y \leq 90 \\ & x \geq 10 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

En donde x e y corresponden a la cantidad de balones comunes y especiales fabricados, respectivamente, y la función está en decenas de miles de pesos.

(b) **(2 puntos)** Dibuje el dominio del problema. Obtenga gráficamente la solución óptima y el valor óptimo del problema.

Solución: La solución óptima corresponde a producir 10 balones comunes y 40 balones especiales a la semana. Con eso, se obtiene un valor óptimo de $1.400.000.

(c) **(2 puntos)** Formule el problema de forma estándar e indique cuál(es) es(son) la(s) configuraciones de base(s) óptima(s) del problema.

Solución: El problema de forma estándar es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -2x - 3y \\ s.a. & x + y + h_1 = 50 \\ & 3x + y + h_2 = 90 \\ & x - h_3 = 10 \\ & x, y, h_1, h_2, h_3 \geq 0 \end{array}$$

Solo hay una base óptima en el problema, que corresponde a las variables x, y, h_2. En el óptimo, estas tres variables son positivas, mientras que las otras dos son nulas.

(d) **(2 puntos)** Justifique la optimalidad de la solución encontrada en la parte (b) mediante conceptos del algoritmo Simplex.

Solución: Comprobaremos que la base $\{x, y, h_2\}$ es óptima. En este punto, h_1 y h_3 están fuera de la base. Calculamos los costos reducidos:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{c}_R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Como todos los costos son positivos, entonces se puede asegurar que la solución es óptima.

Ahora, suponga que tiene la oportunidad de vender un tercer tipo de balón, que corresponde a un balón mundialero. Se sabe que este balón se atiene a la demanda normal, que necesita dos horas de trabajo en la máquina especializada para fabricarlo y, que además, este balón le serviría para reemplazar los 10 balones comunes que tiene pactados según contrato.

(e) **(2 puntos)** Determine cuál es el precio mínimo de venta al que le convendría producir este nuevo balón a la empresa. Justifique.

Solución: Para esto, hay que calcular el costo para el cual el costo reducido empieza a ser negativo. Se debe cumplir que:

$$\bar{c}_z = c_z - c_B B^{-1} R_z < 0$$

donde z hace referencia a la variable nueva, correspondiente a la cantidad de balones mundialeros a producir semanalmente.

Desarrollamos la ecuación:

$$\bar{c}_z = c_z - \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} < 0$$

$$\Rightarrow c_z < -2$$

Aquí, estamos considerando c_z como el costo en la función objetivo del problema en forma estándar. Por lo tanto, si el precio de venta es mayor a \$20.000, le conviene producir el balón mundialero.

(f) **(2 puntos)** Suponiendo que el precio de venta de un balón mundialero es de \$30.000, encuentre la nueva solución óptima y su valor óptimo.

Solución: Como se había obtenido en (e), si el precio es de \$25.000, entonces la nueva variable deberá entrar a la base. La variable que sale será:

$$\text{mín} \left\{ \frac{10}{1}, \cdot, \cdot \right\} = \frac{10}{1}$$

.

Por lo tanto, sale la variable x. Calculamos los costos reducidos de la base $\{z, y, h_2\}$:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, nos encontramos en la base óptima.

La nueva solución es producir 40 balones especiales y 10 balones mundialeros. El valor óptimo en este caso es de \$1.450.000.

Pregunta 3 (15 puntos)

Responda las siguientes preguntas:

(a) **(2 puntos)** Indique si la siguiente afirmación: "un problema de optimización lineal continua en formato estándar con 4 variables, 2 restricciones y vector de costos $c \neq 0$ no puede tener una solución óptima con tres variables positivas" es verdadera o falsa. Justifique.

Solución: Falso, puede ser combinación convexa de 2 vértices óptimos.

(b) **(2 puntos)** Indique si la siguiente afirmación: "un problema de optimización lineal continua, en formato estándar con 4 variables, 2 restricciones y vector de costos $c \neq 0$ no puede tener una solución óptima con una variable positiva" es verdadera o falsa. Justifique.

Solución: Falso, puede haber degenerancia en un vértice óptimo.

(c) **(2 puntos)** Indique si la siguiente afirmación: "la solución óptima de un problema de Fase I del algoritmo Simplex siempre tiene alguno de los costos reducidos de las variables no básicas igual a 0" es verdadera o falsa. Justifique.

Solución: Falso, puede haber degenerancia en un vértice óptimo.

(d) **(3 puntos)** Considere un poliedro no vacío $P \subset \mathbb{R}^n$ definido por:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b;\ 0 \leq x_i \leq 1\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. ¿Es la siguiente frase verdadera o falsa? Justifique bien su respuesta.

"Si un punto de P tiene cada componente igual a 0 o 1, entonces es vértice de P."

Solución: Es un vértice pues cada componente $i \in \{1, \ldots, n\}$ activa la restricción $x_i \geq 0$ o la restricción $x_i \leq 1$. Luego, hay n restricciones l.i. activas en el punto.

(e) **(3 puntos)** Deduzca una solución óptima y el valor óptimo para el siguiente problema de optimización en $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \text{mín } & x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 \\ \text{s.a. } & x_i + x_j \geq 2, \qquad \forall i, j \in \{1,2,3,4\} : i < j \\ & x_i \geq 0, \qquad \forall i \in \{1,2,3,4\} \end{aligned}$$

Justifique su respuesta.

Solución: Debe existir solución óptima en un vértice, pues cada variable está acotada inferiormente lo que implica que el objetivo está acotado inferiormente. Por otra parte, el dominio es no vacío (verifique) y posee vértices (está dentro del cono no negativo).

Por lo tanto, obtengamos cada vértice activando 4 restricciones l.i. Sólo una variable puede activar $x_i \geq 0$. Dos o más variables nulas implican infactibilidad.

- ◇ Si una variable se hace 0 (supongamos $x_1 = 0$), todas las otras variables deben ser mayores o iguales a 2 (de lo contrario se viola una restricción). Como se debe tener otras 3 restricciones activas todo el resto de las variables debe ser igual a 2. Luego, se tiene que $(2,2,2,0); (2,2,0,2); (2,0,2,2)$ y $(0,2,2,2)$ son vértices.
- ◇ Si ninguna variable se hace 0 debe haber 4 restricciones l.i. activas entre las familia de restricciones $x_i + x_j \geq 2$ para cada $i < j$. Cualquier conjunto de 4 restricciones que se active implica el vértice $(1,1,1,1)$.

Dentro de estos 5 vértices, el punto que minimiza el objetivo es $(2,2,2,0)$ con valor óptimo 28.

(f) **(3 puntos)** El máximo valor de la función objetivo $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ sobre un poliedro dado en $\mathbb{R}^3$ se obtiene en una solución óptima que activa únicamente las siguientes tres restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10, \\ x_3 &\leq 3, \\ \alpha x_2 + x_3 &\leq 5 \end{aligned}$$

¿Qué rango de valores puede tener α? Justifique.

Solución: Para que suceda lo anterior, el gradiente de la función objetivo debe ser generado por combinaciones cónicas de los gradientes de las restricciones, es decir debe existir $w_1, w_2, w_3 \geq 0$:

$$w_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

, por lo que: $w_1 = 1, w_2 = \frac{3\alpha - 1}{\alpha}$ y $w_3 = \frac{1}{\alpha}$, luego: $\alpha \geq 1/3$

Pregunta 4 (15 puntos)

(a) **(11 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización en forma estándar:

$$\begin{array}{lll} P) \quad \min & -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 & (R1) \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 & (R2) \\ & 2x_1 + x_2 + x_5 = 10 & (R3) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{array}$$

donde claramente las variables x_1 y x_2 corresponden a las variables originales del problema, y las variables x_3, x_4 y x_5 son las variables de holgura de las restricciones $(R1)$, $(R2)$ y $(R3)$ respectivamente.

Este problema ya se ha resuelto, y se sabe que el óptimo se encuentra en las coordenadas $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$.

Con la información entregada, responda:

(i) **(5 puntos)** Pruebe, usando solamente argumentos basados en los criterios del algoritmo Simplex (y entonces sin utilizar un gráfico), que el mejor punto extremo adyacente (vecino) al punto óptimo de P) se encuentra en las coordenadas $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

Solución:

OPCIÓN 1:

En primer lugar se deben encontrar los puntos adyacentes al óptimo. Para esto, se analizan las variables básicas y no básicas en este punto óptimo dado, las cuales corresponden a $x_b = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $x_r = \{x_4, x_5\}$ .Que un punto sea adyacente al óptimo, implica que en solo 1 iteración, se puede llegar a esta solución óptima, es decir, que sus bases se diferencian en una sola variable. Por lo tanto, en este caso, se tienen 6 posibles combinaciones de bases que pueden ser adyacentes al óptimo. Estas son:

$$\begin{array}{l} A \longrightarrow x_b = \{x_1, x_2, x_4\}, x_r = \{x_3, x_5\} \\ B \longrightarrow x_b = \{x_1, x_2, x_5\}, x_r = \{x_3, x_4\} \\ C \longrightarrow x_b = \{x_1, x_3, x_4\}, x_r = \{x_2, x_5\} \\ D \longrightarrow x_b = \{x_1, x_3, x_5\}, x_r = \{x_2, x_4\} \\ E \longrightarrow x_b = \{x_2, x_3, x_4\}, x_r = \{x_1, x_5\} \\ F \longrightarrow x_b = \{x_2, x_3, x_5\}, x_r = \{x_1, x_4\} \end{array}$$

Si se calculan lo valores de las variables en estos diferentes puntos, utilizando la fórmula $x_b = B^{-1}b$, nos damos cuenta que en 4 de los casos, la solución es infactible, pues hay valores de variables básicas negativos. Con esto, se tienen 2 puntos adyacentes factibles, los cuales son:

$$B \Longrightarrow \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ahora, si se calcula el valor de la F.O. en estos dos puntos, se tiene que en el caso del punto B, $z = -21$, mientras que en el punto C, $z = -15$. Con esto se comprueba que el punto B es el mejor punto adyacente al óptimo y equivale al punto $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

OPCIÓN 2:

Para poder buscar los puntos adyacentes al óptimo, en primer lugar, se buscarán los puntos extremos del poliedro formado por las restricciones. Estos puntos equivalen a la intersección de las diferentes restricciones. Los puntos obtenidos son los siguientes:

- R1 y R2 $\longrightarrow (2,3)$
- R1 y R3 $\longrightarrow (3,4)$
- R1 y R4 $\longrightarrow (0,1)$
- R1 y R5 $\longrightarrow (-1,0)$
- R2 y R3 $\longrightarrow (4,2)$
- R2 y R4 $\longrightarrow (0,4)$
- R2 y R5 $\longrightarrow (8,0)$
- R3 y R4 $\longrightarrow (0,10)$
- R3 y R5 $\longrightarrow (5,0)$
- R4 y R5 $\longrightarrow (0,0)$

Ahora, si estos puntos se evalúan en todas las restricciones, tenemos que solo 5 de ellos son factibles. Estos 5 puntos tienen las siguientes variables básicas y no básicas:

$$\begin{aligned}(2,3) &\longrightarrow x_b = \{x_1, x_2, x_5\}, x_r = \{x_3, x_4\}\\ (0,1) &\longrightarrow x_b = \{x_2, x_4, x_5\}, x_r = \{x_1, x_3\}\\ (4,2) &\longrightarrow x_b = \{x_1, x_2, x_3\}, x_r = \{x_4, x_5\}\\ (5,0) &\longrightarrow x_b = \{x_1, x_3, x_4\}, x_r = \{x_2, x_5\}\\ (0,0) &\longrightarrow x_b = \{x_3, x_4, x_5\}, x_r = \{x_1, x_2\}\end{aligned}$$

El punto óptimo, según el enunciado, corresponde al punto (4,2). Para que un punto sea adyacente al óptimo, se debe cumplir que sus bases solo se diferencian en una variable, de tal modo que solo en 1 iteración se puede llegar de un punto a otro.

De los puntos factibles recién mencionados, los puntos (2,3) y (5,0) cumplen con este criterio, por lo que son adyacentes al óptimo. Ahora para saber cual de ellos es el mejor, simplemente evaluamos las variables en la F.O. Al evaluar, el punto (2,3) logra un valor $z = -21$, mientras que en el punto (5,0), $z = -15$. Con esto se comprueba que el punto (2,3) es el mejor punto adyacente al óptimo.

OPCIÓN 3:

Dado que se sabe la base en la que se está, que en este caso corresponde al óptimo, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas, es decir, el criterio de entrada. Para esto, hay que notar, que en el punto óptimo se cumple que $x_b = \{x_1, x_2, x_3\}, x_r = \{x_4, x_5\}$, con lo que tenemos lo siguiente:

$$c_r^T = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-3 & -5 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & -1/3 & 2/3\\ 0 & 2/3 & -1/3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix}\frac{7}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Luego, se procede a calcular el criterio de salida $\text{mín}_{a>0} \frac{\bar{b}}{a}$ para cada una de las variables no básicas. Para esto se necesita la matriz $\overline{R}$, que corresponde a las dos últimas columnas de la matriz B^{-1}, y el vector $\bar{b} = \begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}$

$$x_4 \longrightarrow \text{mín}_{a>0} = \{-, \tfrac{2}{2/3}, -\} = 3$$
$$x_5 \longrightarrow \text{mín}_{a>0} = \{\tfrac{4}{2/3}, -, \tfrac{2}{1}\} = 2$$

Si se calcula el producto entre el costo reducido y el mínimo de cada variable respectiva, se está evaluando el beneficio total de moverse en la dirección del costo reducido, una distancia igual al $\text{mín}_{a>0}\{\frac{\bar{b}}{a}\}$. De esta forma, estamos aplicando el criterio de entrada y salida de adelante para atrás.

$$x_4 \longrightarrow \tfrac{7}{3} * 3 = 7$$
$$x_5 \longrightarrow \tfrac{1}{3} * 2 = \tfrac{2}{3}$$

Con estos valores, se puede ver que al ingresar la variable x_4 el valor de la F.O. empeora en 7 unidades, mientras que si ingresa la variable x_5 a la base, el valor de la F.O. empeora en 2/3. Esto quiere decir, que el mejor punto adyacente corresponde al que tiene la variable x_5 en la base en vez de la variable x_3, como se puede ver en el criterio de $\text{mín}_{a>0}\{\frac{\bar{b}}{a}\}$. Este punto corresponde al (2,3), ya que posee $x_b = \{x_1, x_2, x_5\}, x_r = \{x_3, x_4\}$.

(ii) **(3 puntos)** Determine, usando solamente argumentos basados en los criterios del algoritmo Simplex (y entonces sin utilizar un gráfico), qué valores puede tomar el valor del lado derecho de la restricción ($R2$) de modo de garantizar que la estructura de la solución óptima no cambia.

Solución: Para poder determinar el rango de valores que puede tomar el lado derecho de la R2, se analiza el criterio de factibilidad, de tal manera que no cambie la solución óptima.Por lo tanto, se debe cumplir que este nuevo vector b cumpla:

$$B^{-1}b \geq 0$$

A modo de verificar este criterio, se hace uso de la matriz B^{-1} en el óptimo y del vector $b = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ 10 \end{bmatrix}$ Así, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ 10 \end{bmatrix} \geq 0$$

Con lo que se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\tfrac{-b_2}{3} + \tfrac{20}{3} \geq 0$$
$$\tfrac{2b_2}{3} - \tfrac{10}{3} \geq 0$$
$$1 - b_2 + 10 \geq 0$$

De aquí se desprende que para que el óptimo se mantenga, el lado derecho de la R2 debe cumplir que:

$$5 \leq b_2 \leq 11$$

(iii) **(3 puntos)** Muestre, usando solamente argumentos basados en los criterios del algoritmo Simplex (y entonces sin utilizar un gráfico), que si el lado derecho de la restricción ($R2$) cambia de 8 a 11 la solución óptimo será degenerada.

Solución: Al cambiar el lado derecho de la R2 a 11, el valor de las variables básicas, el cual se obtiene calculando $B^{-1}b$ da lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como se ve, hay una de las variables básicas que toma el valor 0, lo que significa que existe degenerancia. Esto quiere decir, que hay más restricciones de las necesarias activas, en este caso, las restricciones R1, R2 y R3 están activas.

(b) **(4 puntos)** Responda sobre el artículo "Conference scheduling – A personalized approach" y que fue subido en la página del curso[1]

(i) **(2 puntos)** ¿En qué consiste la Fase 1 del enfoque de solución? Entregue detalles sobre la función objetivo y restricciones del modelo que plantean lo autores en esta fase.

Solución: La Fase I del enfoque de solución consiste en aumentar la cantidad de asistentes a las charlas. Para ello, los autores indican que es equivalente a minimizar la cantidad de personas que no pueden asistir producto de sesiones paralelas. Es así como formulan un modelo en que la función objetivo minimiza la cantidad de personas que dejan de asistir a ciertas sesiones (definidas por tuplas) dadas calendarizaciones paralelas de sesiones (parámetro c_e para registrar esto). La decisión a tomar es si las charlas pertenecientes a una tupla en particular se programan o no en paralelo, y las restricciones asociadas son de asignación y de naturaleza binaria de las variables.

(ii) **(2 puntos)** ¿En qué consiste la Fase 3 del enfoque de solución? Entregue detalles sobre la función objetivo y restricciones del modelo que plantean lo autores en esta fase.

Solución: La Fase III busca asignar bloques de charlas a módulos horarios mientras minimiza el número de violaciones de disponibilidad de los conferencistas. Para ello construyen un modelo matemático que minimiza esta cantidad de violaciones en base a la determinación de el módulo en que comienza cada bloque de charlas. Las restricciones garantizan que en todos los módulos en que pueden comenzar bloques comienza exactamente un bloque, que todos lo bloques comienzan en un único módulo (en el que pueden comenzar los bloques), y que se respeta la naturaleza binaria de las variables.

Algunas matrices y sus inversas:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_2^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_5^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B_6^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_7^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_8^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[1] Vangerven, B., Ficker, A. M., Goossens, D. R., Passchyn, W., Spieksma, F. C., & Woeginger, G. J. (2018). Conference scheduling – A personalized approach. Omega, 81, 38–47. https://doi.org/10.1016/j.omega.2017.09.007