PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2019 - 1
Profesores: : A. Cataldo - R. Cuadrado - J. González - M. Klapp - P. Guajardo

Interrogación 1

Duración: 2 horas.

INSTRUCCIONES:

- ◇ *La prueba contiene 60 puntos. Sea estratégico, el orden de preguntas no tiene relación con su dificultad.*
- ◇ *Conteste cada pregunta en un cuadernillo. En cada uno coloque su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, deje cada cuadernillo en su puesto para que sean retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
- ◇ *Dos rondas de preguntas al profesor (una 15 minutos después de comenzar, otra cuando transcurra el 60 % del tiempo). Está prohibido hacer preguntas al ayudante. Deje anotado cualquier supuesto.*
- ◇ *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Ricardo Vilches es Subdirector de Asuntos Estudiantiles en la Escuela de Ingeniería UC. Cada año, Ricardo está encargado de formar los grupos de trabajo semestral para los más de 750 estudiantes asignados en 10 secciones del curso "Desafíos de Ingeniería" (ING1004). Su problema consiste en formar 120 grupos que contengan entre 6 y 7 estudiantes, debe asignar exactamente un grupo a cada estudiante, tener 12 grupos por sección, cumplir con una serie de restricciones adicionales por grupo, y reducir al mínimo su trabajo administrativo. Las restricciones adicionales por grupo son las siguientes: debe asegurar que cada grupo posea al menos 2 estudiantes mujeres, no puede asignar estudiantes provenientes del mismo colegio en un mismo grupo y, además, debe haber 0, 2 o 3 estudiantes provenientes de fuera de Santiago en cada grupo. Esta última restricción evita que alguien que hay venido desde fuera de la capital quede solo entre Santiaguinos.

Muchas veces, la asignación inicial de secciones hace que no exista una solución que cumpla con todas las restricciones. Sin embargo, Ricardo es muy astuto y ha propuesto flexibilizar la asignación inicial de sección y relocalizar algunos estudiantes de sección con el propósito de generar una mayor cantidad de posibilidades de asignación. Cada reasignación de un alumno entre secciones produce un trámite administrativo molesto para Ricardo, por lo que se desea minimizar la cantidad de estas operaciones.

Los datos del problema son los siguientes. El conjunto de estudiantes del curso está descrito en $I = \{1, \ldots, n\}$, donde cada estudiante $i \in I$ posee cuatro atributos relevantes para la formación de grupos: su sección inicial $s_i \in \{1, \ldots, 10\}$, un parámetro binario α_i que indica si el estudiante es de género femenino; otro parámetro binario β_i que indica si proviene fuera de Santiago; un parámetro entero $c_i \in C$ que identifica al colegio donde cursó su enseñanza media (en del conjunto C de colegios).

Formule el modelo de optimización lineal entera mixta que modele el problema de Ricardo. Defina formalmente variables de decisión, restricciones y función objetivo involucrados.

Solución: En esta modelación se considera a un conjunto $G := \{1, \ldots, 120\}$ de 120 grupos. Los primeros 12 son de la sección 1, del 13 al 24 son de la sección 2, etc.. El parámetro asociado a la sección del grupo $g \in G$ se puede definir como $s^g := \lfloor (g-1)/12 \rfloor + 1$.

Variables de decisión:

- $x_{i,g} \in \{0,1\}$: Si el estudiante $i \in I$ se asigna al grupo $g \in G$.
- $y_g \in \{0,1\}$: Si el grupo $g \in G$ posee estudiantes fuera de Santiago.

Objetivo:

$$\min_{x,y} \quad \sum_{i \in I} \sum_{g \in G : s^g \neq s_i} x_{i,g}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
\text{Un grupo x estudiante:} \quad & \sum_{g \in G} x_{i,g} = 1, && \forall i \in I, \\
\text{Estudiantes x grupo:} \quad & \sum_{i \in I} x_{i,g} \leq 7, && \forall g \in G, \\
& \sum_{i \in I} x_{i,g} \geq 6, && \forall g \in G, \\
\text{Mujeres x grupo:} \quad & \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot x_{i,g} \geq 2, && \forall g \in G, \\
\text{Colegios x grupo:} \quad & \sum_{i \in I : c_i = c} x_{i,g} \leq 1, && \forall c \in C, \forall g \in G, \\
\text{Fuera de Stgo:} \quad & \sum_{i \in I : c_i = c} \beta_i x_{i,g} \geq 2 \cdot y_g, && \forall g \in G, \\
& \sum_{i \in I : c_i = c} \beta_i x_{i,g} \leq 3 \cdot y_g, && \forall g \in G, \\
\text{Naturaleza:} \quad & x_{i,g} \in \{0,1\}, && \forall i \in I, \forall g \in G, \\
& y_g \in \{0,1\}, && \forall g \in G
\end{aligned}$$

Pregunta 2 (20 puntos)

Considere un problema de Producción e Inventario. Usted debe escoger cómo producir un conjunto I de productos diferentes durante T periodos de forma que en cada periodo $t \in \{1, \ldots, T\}$ se cumpla una demanda por $d_{i,t}$ unidades del producto $i \in I$. El costo de producir cada unidad de producto i en el periodo t es $\$c_{i,t} \geq 0$. Usted puede producir un producto i de forma anticipada, pero almacenar una unidad en bodega desde el final del periodo t al inicio del $t+1$ cuesta $\$h_{i,t} \geq 0$ y utiliza un volumen v_i metros cúbicos de una bodega con capacidad máxima q.

Considere además, que por cada unidad fabricada del producto i, se consumen $a_{i,j}$ unidades de materia prima $j \in J$ de la cual hay $b_{j,t}$ unidades disponibles en cada periodo t.

El modelo de optimización lineal asociado al problema anterior es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i \in I} (c_{i,t} \cdot x_{i,t} + h_{i,t} \cdot y_{i,t}) \right\}, \\
&\sum_{i \in I} a_{i,j} x_{i,t} \leq b_{j,t}, && \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall j \in J, \\
&x_{i,t} + y_{i,t-1} = d_{i,t} + y_{i,t}, && \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall i \in I, \\
&\sum_{i \in I} v_i \cdot y_{i,t} \leq q, && \forall t \in \{1, \ldots, T-1\}, \\
&y_{i,T} = 0, y_{i,0} = 0, && \forall i \in I, \\
&x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Responda:

(a) (2p) Defina cada variable del problema. Indique para qué indices está definida cada una.

Solución:

- $x_{i,t}$: Cantidad producida del producto i en periodo t. $i \in I, t = \{1, \ldots, T\}$
- $y_{i,t}$: Cantidad almacenada del producto i en periodo t. $i \in I, t = \{0, \ldots, T\}$

(b) (6p) Suponga que usted puede almacenar la materia prima $j \in J$ desde el final del periodo t al inicio del $t+1$ en la misma bodega a costo $\bar{h}_{j,t} \geq 0$. El volumen de una unidad de materia prima j es $\bar{v}_j$. Modifique el modelo (agregue o cambie algunas variables o restricciones) para reflejar este cambio en el problema.

Nota: No es necesario reescribir todo el modelo, solo indique los cambios.

Solución: Se debe definir una variable adicional:

- $w_{j,t}$: Cantidad almacenada del recurso j en periodo t. $j \in J, t = \{0, \ldots, T\}$

Y editar el modelo:

$$\min_{x,y} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i \in I} (c_{i,t} \cdot x_{i,t} + h_{i,t} \cdot y_{i,t}) + \sum_{j \in J} (\bar{h}_{j,t} \cdot w_{j,t}) \right\},$$

$$w_{j,t} + \sum_{i \in I} a_{i,j} x_{i,t} \leq w_{j-1,t} + b_{j,t}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall j \in J,$$

$$x_{i,t} + y_{i,t-1} = d_{i,t} + y_{i,t}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall i \in I,$$

$$x_{i,t} + y_{i,t-1} = d_{i,t} + y_{i,t}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} v_i \cdot y_{i,t} + \sum_{j \in J} \bar{v}_j \cdot w_{j,t} \leq q, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T-1\},$$

$$y_{i,T} = 0, y_{i,0} = 0, \qquad \forall i \in I,$$

$$w_{j,T} = 0, w_{j,0} = 0, \qquad \forall j \in I,$$

$$x \geq 0, y \geq 0, w \geq 0.$$

(c) (6p) Considere nuevamente el problema original sin el cambio anterior. Suponga que, además del costo por periodo almacenado, existe un costo $\$r_{i,t} \geq 0$ asociado a ingresar un producto en bodega al final del periodo t. Por ejemplo, si usted decide guardar en bodega 3 unidades de producto i desde el periodo 1 al período 4, en el primer período pagaría $3 \cdot r_{i,1}$ más el costo de inventario de los mismos por tres periodos. Modifique el modelo original (agregue o cambie algunas variables o restricciones) para reflejar este cambio en el problema.

Solución: Se debe definir una variable adicional:

- $z_{i,t}$: Cantidad de productos $i \in I$ ingresados a bodega en $t \in T$.

Y editar el modelo:

$$\min_{x,y} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i \in I} (c_{i,t} \cdot x_{i,t} + h_{i,t} \cdot y_{i,t} + r_{i,t} \cdot z_{i,t}) \right\},$$

$$\sum_{i \in I} a_{i,j} x_{i,t} \leq b_{j,t}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall j \in J,$$

$$x_{i,t} + y_{i,t-1} = d_{i,t} + y_{i,t}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} v_i \cdot y_{i,t} \leq q, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T-1\},$$

$$z_{i,t} \geq y_{i,t} - y_{i,t-1}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall j \in I,$$

$$y_{i,T} = 0, y_{i,0} = 0, \qquad \forall i \in I,$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

(d) (6p) Considere nuevamente el problema original sin cambios. Suponga ahora que la maquinaria para confeccionar cada producto es un bien escaso. Esto implica que los distintos tipos de producto deben compartir máquinas y una máquina solo puede producir un tipo de producto por periodo. Considere el parámetro binario $e_{i,k}$ que indica si los productos i y k requieren una máquina en común al ser fabricados, con $i, k \in I$. Modifique el modelo original (agregue o cambie algunas variables o restricciones) para reflejar este cambio en el problema.

Solución: Se debe definir la siguiente variable:

- $s_{i,t}$: Binaria que indica si se produce $i \in I$ en el periodo $t \in T$

Y editar el modelo:

$$\min_{x,y} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i \in I} (c_{i,t} \cdot x_{i,t} + h_{i,t} \cdot y_{i,t}) \right\},$$

$$\sum_{i \in I} a_{i,j} x_{i,t} \leq b_{j,t}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall j \in J,$$

$$x_{i,t} + y_{i,t-1} = d_{i,t} + y_{i,t}, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T\}, \forall i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} v_i \cdot y_{i,t} \leq q, \qquad \forall t \in \{1, \ldots, T-1\},$$

$$y_{i,T} = 0, y_{i,0} = 0, \qquad \forall i \in I,$$

$$x_{i,t} \leq M_t \cdot s_{i,t}, \qquad \forall i \in I, \forall t \in \{1, ..., T\}, \text{ con } M_t = \sum_{k=1}^{t} d_{i,t}$$

$$s_{i,t} + s_{k,t} \leq 1, \qquad \forall i, k \in I : e_{i,k} = 1, \forall t \in \{1, ..., T\}$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

$$s_{i,t} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in I, t \in \{1, ..., T\}$$

Pregunta 3 (20 puntos)

Usted ha investigado sobre la crisis mundial de salud por mala nutrición infantil y decide hacer algo al respecto por su comunidad. Por lo mismo, se dirige al colegio que está frente al campus y se ofrece para ayudarlos a tomar mejores decisiones de alimentación a escolares. La directora del colegio accede felizmente y le describe cada uno de los alimentos (definidos en el conjunto I) que ellos utilizan en la cocina del colegio para preparar el almuerzo. Con esta información, usted estudia en detalle cada alimento involucrado y propone diseñar un modelo que permita planificar almuerzos saludables de lunes a viernes para los estudiantes del colegio sobre un horizonte de cuatro semanas consecutivas (20 días hábiles). Suponga que al colegio asisten regularmente n niños y que cada día todos almuerzan lo mismo.

El colegio cuenta con un presupuesto semanal de $\$w$ para comprar los alimentos y cada alimento $i \in I$ se compra en múltiplos de una porción estándar que cuesta $\$c_i \geq 0$. Cualquier porción de alimento que no utiliza durante la semana, se vence y debe ser desechada.

Cada almuerzo está compuesto por un mínimo de tres y un máximo de cuatro porciones de alimentos. Un almuerzo no puede contener más de una porción de un alimento específico.

Un alimento puede tener "sellos", es decir, un contenido alto de un nutriente indeseado en exceso. Suponga que cada porción de alimento $i \in I$ puede tener cuatro sellos: (1) alto en calorías, (2) alto en grasas saturadas, (3) alto en sodio, y/o (4) alto en azúcares. Considere el parámetro binario $a_{i,s}$ que señala si el alimento i posee el sello $s \in \{1, 2, 3, 4\}$. Un almuerzo se considera saludable cuando posee un máximo de dos porciones con el mismo sello y un máximo de tres sellos entre todas sus porciones.

Para que los almuerzo no sean tan aburridos, usted no puede usar el mismo alimento en almuerzos de días consecutivos (si puede hacerlo de viernes a lunes). Por último, considere que hay alimentos que pueden ser consumidos solamente si hay otro alimento presente, por ejemplo una salsa de tomates puede ser consumida solo si hay algún tipo de pasta presente. Sea K_i el conjunto de alimentos que deben ser consumidos siempre junto al alimento i.

Formule el modelo de optimización lineal entera mixta que permita diseñar el menú mensual del colegio que maximize el número de almuerzos saludables. Defina formalmente variables de decisión, restricciones y función objetivo involucradas.

Solución: Variables de decisión:

- $x_{i,d} \in \{0, 1\}$: Si el alimento $i \in I$ es utilizado en el almuerzo del día $d \in \{1, \ldots, 20\}$.
- $y_d \in \{0, 1\}$: Si el almuerzo del día d es saludable.

Objetivo:

$$\max_{x,y} \quad \sum_{d=1}^{20} y_d$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
\text{Presupuesto:} \quad & \sum_{d=5(t-1)}^{5t} \sum_{i \in I} n \cdot c_i \cdot x_{i,d} \leq w, && \forall t = \{1,2,3,4\}, \\
\text{Porciones:} \quad & \sum_{i \in I} x_{i,d} \leq 4 && \forall d = \{1,\ldots,20\}, \\
& \sum_{i \in I} x_{i,d} \geq 3 && \forall d = \{1,\ldots,20\}, \\
\text{No repetir:} \quad & x_{i,d+1} + x_{i,d} \leq 1 && \forall i \in I, \forall d \in \{1,\ldots,20\} : \quad \text{mód } (d,5) > 0 \\
\text{Prerrequisito:} \quad & x_{i,d} \leq x_{j,d} && \forall d \in \{1,\ldots,20\}, \forall i \in I, \forall j \in K_i, \\
\text{Máx 2 sellos iguales:} \quad & \sum_{i \in I} a_{i,s} \cdot x_{i,d} \leq 2 + 2 \cdot (1 - y_d) && \forall d = \{1,\ldots,20\}, \forall s \in \{1,2,3,4\}, \\
\text{Máx 3 sellos:} \quad & \sum_{s=1}^{4} \sum_{i \in I} a_{i,s} \cdot x_{i,d} \leq 3 + 13 \cdot (1 - y_d) && \forall d = \{1,\ldots,20\}, \\
\text{Naturaleza:} \quad & y_d \in \{0,1\}, && \forall d \in \{1,\ldots,20\} \\
& x_{i,d} \in \{0,1\}, && \forall i \in I, \forall d \in \{1,\ldots,20\}
\end{aligned}$$

Nota de corrección: El enunciado podría interpretarse como que un solo producto de K_i valida el consumo de i. En este caso la restricción de Prerrequisito podría ser entendidad como:

$$x_{i,d} \leq \sum_{j \in K_i} x_{j,d}, \qquad \forall d \in \{1,\ldots,20\}, \forall i \in I$$