FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Industrias
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Curso: Optimización
Semestre: 01-2011
Profesor: Alejandro Cataldo C.
Ayudantes: Karin Hofer - Benjamín Lizana
Catalina Parga - Camila Ramos

Examen

Duración: 3 horas.

Cada pregunta será evaluada con una nota entre 1.0 y 7.0. La prueba cuenta con una ponderación total de 105 %. No se permite el uso de calculadora o celulares de ningún tipo.

Pregunta 1 (25 %)

Parte A

Sea el problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_2 \\ \text{s.a.} \quad & \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \end{aligned} \tag{D}$$

Verifique si para el punto $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$ se cumplen las condiciones de KKT.

Pauta Parte A

El problema anterior se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -x_2 \\ \text{s.a.} \quad & \\ & x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \\ & -x_1^2 - x_2^2 + 1 \leq 0 \end{aligned} \tag{D}$$

de donde las condiciones de KKT son:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = 0$$

y las condiciones:

$$\begin{aligned} \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) &= 0 \\ \mu_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Viendo si el punto $(0, -1)$ cumple con KKT se tiene que la restricción 1 es inactiva y la restricción 2 es activa, luego $\mu_1 = 0$
. Entonces:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

de donde se observa que $\mu_2 = \frac{1}{2} \geq 0$, en consecuencia el punto cumple con las condiciones de KKT.

Parte B

Una joven china llamada akmykhú vive en el campo cerca de Pekín. Ella está a la espera de que su amado regrese de un campo de simulación de guerra para poder casarse, lo que espera suceda dentro de T días. Mientras este tiempo pasa, ella ha decidido utilizar su tiempo en 5 actividades (no hay más actividades en la vida para akmykhú): cocinar, vender parte de las cosas que cocina, dormir, llorar por su amado, y conversar con sus amistades. Estas actividades reportan a akmykhú bienestar (o des-bienestar) que es b_j para la actividad j de las antes mencionadas.

Se sabe que akmykhú requiere llorar al menos la misma cantidad de tiempo que conversa con sus amistades, pero que requiere conversar con sus amistades a lo más la mitad del tiempo que destina a dormir. Se sabe que debe cocinar al menos una cantidad δ del día para poder tener para alimentarse (cosa vital para la vida), y que todo el tiempo adicional que dedique a cocinar le permitirá estar un cuarto de tiempo vendiendo esa comida sobrante. Por último, la cantidad de dinero que gane vendiendo comida le permitirá comprar los pañuelos para sus momentos de llanto (asuma que esta joven no puede llorar sin pañuelos). Se sabe que un pañuelo cuesta 3 Yuanes, que en una hora de venta de comida se gana 5 Yuanes, y que usa 6 pañuelos por hora de llanto.

Construya un modelo de programación lineal que permita a akmykhú distribuir su tiempo diario (el mismo modelo para cada uno de los T días) de manera de maximizar su felicidad mientras espera a su amado.

Pauta Parte B

Para plantear el modelo definimos la siguiente variable:

x_j: cantidad de horas del día que akmykhú dedica a la actividad j.

donde $j = 1$ es cocinas, $j = 2$ es vender comida, $j = 3$ es dormir, $j = 4$ es llorar por amado y $j = 5$ es conversar.

Planteamos las siguientes restricciones y función objetivo.

Restricciones

(a) Asignación de horas no puede superar las 24 horas del día.

$$\sum_{j=1}^{5} x_j \leq 24$$

(b) Llorar al menos la mitad del tiempo que conversa.

$$x_4 \geq \frac{x_5}{2}$$

(c) Conversar con amistades a lo más la mitad del tiempo que duerme.

$$x_5 \leq \frac{x_3}{2}$$

(d) Cocinar δ horas del día.

$$x_1 \geq \delta$$

(e) Excedente de tiempo de cocina asociado a venta.

$$x_1 - \delta = 4x_2$$

(f) Pañuelos.

$$5x_2 \geq 18x_4$$

(g) Naturaleza de las variables.

$x_j \geq 0$, para actividad $j = 1, \ldots, 5$.

Función objetivo .

La función objetivo consiste en maximizar el beneficio diario de akmykhú:

$$\text{máx} \sum_{j=1}^{5} b_j x_j$$

Parte C

Responda brevemente las siguientes preguntas:

a) Suponga que se debe resolver un problema de programación no lineal sin restricciones y para ello se opta por aplicar primero el algoritmo del gradiente y luego el algoritmo de Newton. Señale qué ventaja tiene este procedimiento frente a la alternativa de aplicar sólo el algoritmo del gradiente y sólo el algoritmo de Newton.

b) Si un problema de programación lineal está definido sobre un dominio no acotado, cerrado, no vacío y con función objetivo continua, ¿tiene o no tiene solución óptima?

c) En un problema de programación lineal en variables continuas, ¿un mínimo local es siempre mínimo global?

Pauta Parte C

a) El algoritmo del gradiente tiene baja convergencia al óptimo y el algoritmo de Newton no da seguridad de orientarse a un mínimo local o global, situación que sí asegura el algoritmo del gradiente. Luego al aplicar gradiente y luego Newton se asegura una correcta orientación y luego una buena convergencia.

b) En este caso, no se puede afirmar que tenga o no soluciones óptimas. Como es no acotado, Bolzano-Weierstrass no nos dice nada, y como no tenemos información respecto a si la función objetivo está acotada o no en la dirección que nos interesa, entonces el teorema práctico de existencia de soluciones de la programación lineal tampoco.

c) Los problema de programación lineal en variables continuas son convexos, luego, todo mínimo local es siempre mínimo global.

Parte D

Considere el siguiente problema de programación lineal con variables continuas.

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & x_1 + 9x_2 & & & (P) \\ & x_1 + 3x_2 & \leq & 12 & (1) \\ & 2x_1 + x_2 & \geq & 14 & (2) \\ & x_1 & \geq & 0 & (3) \\ & x_2 & \geq & 0 & (4) \end{array}$$

Un amigo le indica que la solución óptima del problema es $x_1^* = 6$ y $x_2^* = 2$.

a) Determine cuáles son los puntos extremos vecinos a la solución óptima y verifique que efectivamente la solución entregada es la solución óptima del problema utilizando el criterio de optimalidad del algoritmo Simplex.

b) Verifique que la solución óptima cumple con las condiciones de KKT.

Pauta Parte D

a) En el siguiente gráfico se observan los 2 puntos extremos al punto extremo A son B y C.

Como sabemos que la solución óptima de un problema de optimización lineal en variables continuas se encuentra en un punto extremo, basta con que calculemos el valor de la función objetivo en estos puntos extremos. Esto es:

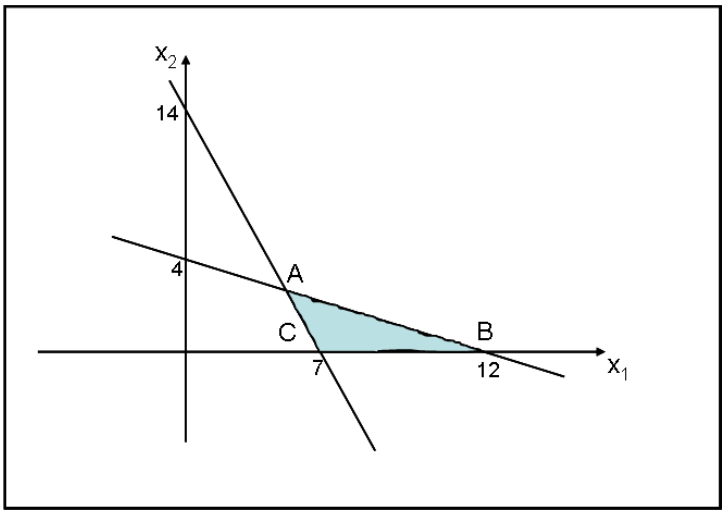


Figura 1

- $A = (6, 2)$ tiene un $z(A) = 6 + 9 \cdot 2 = 24$
- $B = (12, 0)$ tiene un $z(B) = 12 + 9 \cdot 0 = 12$
- $C = (7, 0)$ tiene un $z(C) = 7 + 9 \cdot 0 = 7$

Luego, la solución entregada, y entonces el punto A, es la solución óptima del problema presentado.

b) El problema anterior se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lrcll} \text{mín} & -x_1 - 9x_2 & & & (P) \\ & x_1 + \ 3x_2 - 12 & \leq & 0 & (1) \\ & -2x_1 - x_2 + 14 & \leq & 0 & (2) \\ & x_1 & \geq & 0 & (3) \\ & x_2 & \geq & 0 & (4) \end{array}$$

de donde las condiciones de KKT son:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -9 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

y las condiciones:

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$
$$\mu_1(x_1 + 3x_2 - 12) = 0$$
$$\mu_2 \left(-2x_1 - 2x_2 + 14\right) = 0$$

Viendo si el punto $(6, 2)$ cumple con KKT se tiene que la restricción 1 y la restricción 2 son activas, luego:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -9 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

de donde se observa que $\mu_1 = \frac{17}{5} \geq 0$ y $\mu_2 = \frac{6}{5} \geq 0$, en consecuencia el punto cumple con las condiciones de KKT.

Parte E

Aprovechando la Copa América la empresa BanderCop lanzará al mercado banderas de los equipos que considera favoritos para ganar la copa: Chile, Brasil y Venezuela. El precio al que espera vender una bandera de la selección chilena es 18, una bandera de la selección brasileña es 20 y de la selección venezolana es 40.

Para la producción de banderas requiere de dos insumos: tela y madera. Para determinar la cantidad óptima a producir de cada bandera, de manera de maximizar la utilidad obtenida, se planteó el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 18x_1 + 20x_2 + 40x_3 \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 13 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{P}$$

donde la variable x_i representa el número de bandera de la selección i que deben ser producidas, con $i = 1$ para Chile, $i = 2$ para Brasil e $i = 3$ para Venezuela. Los coeficientes en la función objetivo indican el precio de venta de cada bandera (en pesos). La primera restricción indica que la cantidad máxima de tela disponible es 17, y la segunda, indica que la cantidad máxima de madera disponible es de 13 unidades.

a) Justifique por qué hay una producción óptima que incluye a lo más banderas de dos países diferentes.

Ahora, considere el problema de una compañía competidora que quiere comprar todos sus insumos. Esta compañía quiere determinar el precio a pagar por los insumos (tela y madera) de manera de minimizar el pago total por estos insumos, de forma tal que a BanderCop le sea conveniente. En este contexto, considere precios de 4 pesos para cada unidad del insumo tela y de 2 pesos por cada unidad del insumo madera, y una producción de 3 banderas de Chile y 2 banderas de Brasil.

b) Sin utilizar el método simplex, muestre que la producción planteada es óptima para BanderCop y que esos precios son precios óptimos para el problema del competidor.

Pauta Parte E

(a) La forma estándar del problema tiene 5 variables y 2 restricciones. En consecuencia, la base contiene 2 variables, y por lo tanto, a lo más 2 variables pueden tomar un valor ≥ 0.

(b) El dual del problema (P) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 17y_1 + 13y_2 \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 3y_1 + 3y_2 \geq 18 \\ & 4y_1 + 5y_2 \geq 20 \\ & 5y_1 + 8y_2 \geq 40 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{D}$$

Se entrega la siguiente solución del primal: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 0$, que da una función objetivo de 94.

También se entrega la solución del dual: $y_1 = 4$ e $y_2 = 2$, que da una función objetivo de 94.

Luego, como ambas soluciones son factibles de sus respectivos problemas (es fácilmente verificable), el teorema fuerte de dualidad asegura que cada una es solución óptima de su respectivo problema.

Pregunta 2 (30 %)

Suponga que una compañía minera posee una cierta cantidad de puntos de generación, otros que son puntos de consumo, y otros puntos conectados que son en realidad subestaciones de energía. Todo esto puede ser representado mediante una red $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos correspondientes a puntos de generación, consumo y subestaciones, y A denota los arcos de la red, correspondientes a las líneas de alta tensión que unen los puntos. Para un horizonte de un año se sabe que en cada punto $i \in N$ existe una oferta (o demanda) anual b_i [GWh] (siguiendo la convención de que $b_i > 0$ corresponde a una oferta, $b_i < 0$ corresponde a una demanda). Para los puntos i que corresponden a las subestaciones eléctricas, $b_i = 0$. Debido a restricciones de capacidad en las líneas de transmisión, sólo es posible transportar hasta un máximo de u_{ij} [GWh] de energía por cada línea (i, j) anualmente.

Adicionalmente, existen otras limitantes al flujo en la red:

- ◇ Existe una zona correspondiente a los nodos de un conjunto $J \subset N$ tal que la suma total de energía que fluye en todos los arcos que conectan puntos del conjunto J no puede ser mayor a K [GWh] al año.
- ◇ El costo de enviar energía por la red se modela con una función no lineal (debido a los efectos de pérdidas por transmisión). Más específicamente, si v_{ij} es el flujo de energía en la línea (i, j), el costo de transmisión es $f_{ij}(v_{ij}) = c_{ij}v_{ij} + \alpha_{ij}(v_{ij})^{\beta_{ij}}$, donde c_{ij} y α_{ij} son constantes positivas, mientras que β_{ij} es una constante, también positiva, pero cuyo valor está entre 1,5 y 2,5.

Con la información anterior responda:

a) Escriba un modelo de optimización que permita determinar las cantidades óptimas de energía que deben circular por las líneas de la red, de modo tal que se cumplan las restricciones indicadas y el costo total de transmisión sea mínimo.

b) El modelo desarrollado en la parte anterior, ¿es convexo? Justifique con claridad su respuesta.

c) Las restricciones del modelo son evidentemente lineales. ¿Será verdad que una solución óptima del problema corresponde a una solución básica factible del sistema de desigualdades lineales correspondiente a las restricciones del problema? Justifique con claridad su respuesta.

d) Olvide por un momento la existencia de ofertas y demandas en la red. Los gestores del sistema desean saber cuánta es la máxima cantidad de energía que se puede enviar desde un nodo de generación específico, $g \in N$, hasta un nodo de consumo específico, $s \in N$. Escriba un modelo de optimización que permita resolver este problema.

e) En relación a la pregunta d), ¿qué similitudes y diferencias tiene el problema descrito con el problema de Flujo Máximo en una red?

Pauta Problema 2

a) Para formular el modelo definamos el conjunto $D = \{(i, j) : (i, j) \in A, i \in J, j \in J\}$, quedando el modelo como sigue:

$$\begin{aligned}
&\text{mín} \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}(v_{ij}) \\
\sum_{j:(i,j)\in A} v_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} v_{ki} &= b_i \quad \forall\, i \in N \qquad (1)\\
\sum_{(i,j)\in D} v_{ij} &\leq K \qquad (2)\\
v_{ij} &\leq u_{ij} \quad \forall\,(i,j) \in A \qquad (3)\\
v_{ij} &\geq 0 \quad \forall\,(i,j) \in A \qquad (4)
\end{aligned}$$

donde:

$$b_i := \begin{cases} > 0 & \text{nodo de oferta} \\ < 0 & \text{nodo de demanda} \\ = 0 & \text{nodo de trasbordo} \end{cases}$$

b) Efectivamente el modelo es convexo ya que todas las restricciones son lineales y la función objetivo es una suma de funciones lineales y convexas.

c) Esto no es correcto, ya que la función objetivo es no lineal y convexa, por lo que no necesariamente la solución se encuentre en un vértice del espacio de soluciones factibles.

d) Para ello se debe resolver el siguiente modelo:

$$\text{máx } F$$

$$\sum_{j:(g,j)\in A} v_{gj} - \sum_{k:(k,g)\in A} v_{kg} = F \quad (1)$$

$$\sum_{j:(s,j)\in A} v_{sj} - \sum_{k:(k,s)\in A} v_{ks} = -F \quad (2)$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} v_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} v_{ki} = 0 \quad \forall\, i\ inN - \{g,s\} \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j)\in D} v_{ij} \leq K \quad (4)$$

$$v_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall\,(i,j)\in A \quad (5)$$

$$v_{ij} \geq 0 \quad \forall\,(i,j)\in A \quad (6)$$

e) Es casi el mismo salvo la restricción (4), por lo tanto no es necesariamente válido el teorema de Ford Fullkerson.

Pregunta 3 (20 %)

Considere el problema que enfrenta una empresa que produce rollos de papel de 118 cm. La empresa debe satisfacer una demanda diaria de rollos de distinto tamaño menores a 118 cm. En particular, asuma que la demanda para un día cualquiera se especifica en la tabla que se muestra a continuación, donde la primera columna de la tabla define el tamaño del rollo demandado y la segunda columna corresponde al número de rollos que se deben satisfacer en un día. Por ejemplo, la primera fila de la tabla define que se debe satisfacer una demanda de 100 rollos de 30 cm.

Largo	Cantidad requerida
30	100
40	80
50	70

Para resolver este problema se ha formulado el modelo de programación lineal que permite determinar la cantidad de rollos de 118 cm. que se deben cortar y de qué forma (tipos de corte). Asuma que esta empresa tiene como objetivo minimizar la pérdida total de rollos de papel que le genera su política de corte. Este modelo utiliza variables que define el número de rollos de 118 cm. que serán cortados según el corte i.

De acuerdo con lo anterior, cada tipo de corte es una combinación de rollos de papel de 30, 40 y 50 cm. Por ejemplo, el tipo de corte 1 obtiene 3 rollos de 30 cm teniendo una pérdida de material de 18 cm. rollo. La siguiente tabla muestra los tipos de corte posibles y la pérdida asociada a cada corte.

Tipo de corte	Rollos 30 [cm]	Rollos 40 [cm]	Rollos 50 [cm]	Pérdida del corte [cm]
x_1	3	0	0	28
x_2	2	1	0	18
x_3	1	2	0	8
x_4	2	0	1	8
x_5	0	1	1	28
x_6	0	0	2	18

A partir de estos datos es posible diseñar el siguiente el modelo de programación lineal es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{mín } 28x_1 + 18x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 28x_5 + 18x_6 \qquad (\mathcal{P}) \\ &s.a: \\ &\quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 100 \\ &\quad x_2 + 2x_3 + x_5 \geq 80 \\ &\quad x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 70 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Si consideramos que la solución óptima del problema tiene como costo reducido de las variables los valores presentados en la siguiente tabla, responda la siguientes preguntas:

Tipo de corte	Costo reducido
x_1	28
x_2	14
x_3	0
x_4	0
x_5	16
x_6	2

a) Demuestre que el problema $(\mathcal{P})$ admite solución óptima.

b) Determine el nivel de pérdida que se genera con la solución óptima que se tiene.

c) Interprete económicamente los precios sombra asociados a cada restricción.

d) Encuentre el rango de sensibilidad del costo de la variable x_2 tal que no cambie la base.

e) ¿Cuál es la máxima demanda que se puede requerir de rollos de 30 cm, sin que cambie la solución óptima?

Pauta Problema 3

a) Primero, se puede ver fácilmente que el espacio de soluciones factibles es no vacío. Por ejemplo el punto $x_1 = 100$, $x_5 = 80$ y el resto de las variables en 0, asegura que se satisfacen las 3 restricciones. Ahora, sumando la primera y la última restricción se tiene:

$$170 \leq 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6$$

ahora, considerando que todas las variables son ≥ 0 se tiene:

$$170 \leq 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 \leq 28x_1 + 18x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 28x_5 + 18x_6$$

luego, el teorema práctico de existencia de soluciones óptimas de la programación lineal asegura que el problema tiene solución óptima.

b) Dado que los costos reducidos de las variables x_3 y x_4 son cero y los otros son positivos, se deduce que solo se generan cortes tipo 3 y 4, por lo que tomando adicionalmente el costo reducido de otra variable cualquiera, por ejemplo X_6, se construye el siguiente sistema de ecuaciones de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{aligned} 0 &= 8 - (y_1, y_2, y_3) \cdot (1, 2, 0)^T \\ 0 &= 8 - (y_1, y_2, y_3) \cdot (2, 0, 1)^T \\ 2 &= 18 - (y_1, y_2, y_3) \cdot (0, 0, 2)^T \end{aligned}$$

Con ello se obtiene que: $y_1 = 0$; $y_2 = 4$ y $y_3 = 8$. Por lo que concluimos que la restricciones 2 y 3 del primal son activas y con ello de las restricciones del primal se obtiene que: segunda restricción del primal: $2x_3 = 80$, es decir $x_3 = 40$, y la tercera restricción del primal nos muestra que $x_4 = 70$. Finalmente, evaluando la función objetivo en el vector solución $(0, 0, 40, 70, 0, 0)$, se determina que el nivel de perdida es $z = 8 \cdot 40 + 8 \cdot 70 = 880$ cms.

c) Los precios sombra calculados en a), muestran la perdida de bienestar (medida en cms. de perdida) al incrementar en una unidad el pedido de cada corte. Específicamente, se concluye que si se pide un rollo adicional de 30 cms., no hay perdida asociada ya que ese requerimiento se satisface con holgura ($y_1 = 0$). Si se pide un rollo adicional de 40 cms o 50 cms, se genera una perdida de bienestar (en cms) igual al precio sombra encontrado, es decir 4 y 8 respectivamente.

d) Para que la base no cambie, se debe cumplir que el costo reducido de x_2 sea positivo, es decir que:

$$c_2 > (y_1, y_2, y_3) R_{\cdot 2} \Rightarrow c_2 > (0, 4, 8) \cdot (2, 1, 0)^T = 4$$

Por lo tanto, mientras la perdida del corte tipo 2 sea mayor que 4, no se producirán cortes tipo 2.

e) Los rollos de 30 cms. Se producen con holgura, específicamente considerando la restricción asociada a ese producto, se producen:

$$x_3 + 2x_4 = 40 + 2 \cdot 70 = 180 \text{ rollos de 30 cms.}$$

Por lo tanto, si se piden 180 rollos de 30 cms., la restricción se activa, luego se pueden pedir como máximo 179 rollos para que la restricción no se active.

Pregunta 4 (30 %)

Una empresa produce una materia prima que se conoce como Pocarne. Esta materia prima es producida en piezas, todas de Q kilos de peso. En el mercado se puede vender una pieza de Pocarne como materia prima para otras empresas, o se puede trozar para venderla por parte en el mercado. De una pieza trozada de Pocarne se obtienen K distintas partes. Se sabe que la cantidad de kilos que tiene la parte $k = 1, ..., K$ es q_k (donde $\sum_{k=1}^{K} q_k = Q$).

La demanda máxima por Pocarne en el mercado es conocida, y corresponde a D^t kilos por piezas completas para el día $t = 1, .., T$ y a d_k^t kilos de la parte k para el día $t = 1, .., T$. El precio de venta de Pocarne es de U^t pesos por kilo que es vendido como pieza (materia prima) durante el día $t = 1, .., T$, y de R_k^t por kilo de parte $k = 1, .., , K$ que es vendido durante el día $t = 1, .., T$. Sin embargo, es posible aumentar hasta en δ kilos la demanda de Pocarne en piezas si se modifica el precio a $\bar{U}^t$, con $t = 1, .., T$.

Desde el punto de vista de la producción, la empresa puede producir S^t piezas (materia prima) de Pocarne durante el día $t = 1, .., T$. También la empresa tiene la posibilidad de almacenar Pocarne, en pieza (materia prima) o trozada, en el frigorífico de la empresa. Este frigorífico tiene como capacidad máxima de almacenamiento W kilos totales.

También se sabe que la Pocarne es perecible trás un día de almacenamiento, tanto como pieza (materia prima) como trozada. En consecuencia, la Pocarne puede pasar a lo más un día en el frigorífico antes de ser vendida. En caso de que no exista demanda por esa pieza o parte, los kilos que no pueden ser vendidos deben ser decomisados y enviados a un vertedero, todo esto a un costo de v pesos por kilo.

Los costos asociados a la producción en la empresa corresponden a G por pieza de Pocarne producida, y a g^t por trozado de una pieza de Pocarne durante el día $t = 1, .., T$.

Con la información anterior construya un modelo de programación mixta que permita a la empresa tomar las decisiones de manera de maximizar su utilidad para los próximos T días, considerando que no se pueden trozar piezas (materia prima) congelada y que lo que no se vende siempre es congelado.

Pauta Problema 4

Para plantear el modelo definimos las siguientes variables:

x^t: cantidad de piezas de Pocarne producidas y no trozadas en t.

y^t: cantidad de piezas de Pocarne producidas y trozadas en t.

I^t: kilos de Pocarne en piezas guardado en inventario al final de t.

L_k^t: kilos de Pocarne parte k guardado en inventario al final de t.

H^t: kilos de Pocarne decomisados en t.

h_k^t: kilos de Pocarne parte k decomisados en t.

V^t: kilos de Pocarne vendida en t a precio U^t.

$\bar{V}^t$: kilos de Pocarne vendida en t a precio $\bar{U}^t$.

v_k^t: kilos de Pocarne parte k vendidos en t.

α^t: binaria que vale 1 si en t se vende a precio $\bar{U}^t$.

Con estas variables planteamos las siguientes restricciones y función objetivo.

Restricciones

(a) Capacidad de producción diaria de materia prima **(0,6 puntos)**

$$x^t + y^t \leq S^t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T.$$

(b) Conservación de flujo de materias primas **(0,6 puntos)**

$$(Qx^t) + I^{t-1} = V^t + \bar{V}^t + I^t + H^t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T.$$

(c) Conservación de flujo de partes **(0,6 puntos)**

$$(q_k y_k^t) + L_k^{t-1} = v_k^t + L_k^t + h_k^t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T, \text{ y para toda parte } k = 1, \ldots, K.$$

(d) Construir variable de decomiso de piezas **(0,6 puntos)**

$$H^t \geq I^{t-1} - V^t - \bar{V}^t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T.$$

(e) Construir variable de decomiso de partes **(0,6 puntos)**

$$h_k^t \geq L_k^{t-1} - v_k^t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T, \text{ y para toda parte } k = 1, \ldots, K.$$

(f) Capacidad de almacenamiento **(0,6 puntos)**

$$I^t + \sum_{k=1}^{K} L_k^t \leq W \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T.$$

(g) Venta máxima a precio U^t **(0,6 puntos)**

$$V^t \leq D^t(1 - \alpha^t) \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T.$$

(h) Venta máxima a precio $\bar{U}^t$ **(0,6 puntos)**

$$\bar{V}^t \leq (D^t + \delta^t)\alpha^t \quad \text{para todo día } t = 1, \ldots, T.$$

(i) Naturaleza de las variables **(0,6 puntos por la restricción completa)**.

$x^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$.
$y^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$.
$I^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$.
$H^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$.
$V^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$.
$\bar{V}^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$.
$L_k^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$, y para cada parte $k = 1, \ldots, K$.
$h_k^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$, y para cada parte $k = 1, \ldots, K$.
$v_k^t \geq 0$, para día $t = 1, \ldots, T$, y para cada parte $k = 1, \ldots, K$.
$\alpha^t \in \{0, 1\}$, para día $t = 1, \ldots, T$.

Función objetivo (0,6 puntos).

La función objetivo consiste en maximizar la utilidad del negocio para los próximos T días, que matemáticamente es:

$$\text{máx} \sum_{t=1}^{T} \left(U^t V^t + \bar{U}^t \bar{V}^t + \sum_{k=1}^{K} R_k^t v_k^t \right) - \sum_{t=1}^{T} G\left(x^t - y^t\right) - \sum_{t=1}^{T} g^t y^t - \sum_{t=1}^{T} v \left(H^t + \sum_{k=1}^{K} h_k^t \right)$$