Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Ayudante: Ignacio Monardes (iamonardes@uc.cl)
Profesores: Mathias Klapp, Margarita Castro, Gonzalo Pérez, Esteban Salgado

ICS1113 - Optimización
2do semestre del 2023

Tarea 2 ICS1113

Reglas de la tarea:

- La tarea se puede realizar de a pares o de forma individual (las parejas pueden ser de diferentes secciones). En caso de ser de a pares se debe inscribir con su pareja en los grupos de Canvas. En caso de hacerse de a pares y no inscribirse en Canvas conllevará a descuento.
- La tarea parte el día 24/10/2023 a las 00:00 horas y se entrega el día 3/11/2023 a las 23:59 horas.
- Existirá la opción de usar un cupón de atraso solamente una vez entre las tres tareas, dando la posibilidad de entregar hasta 24 horas después de finalizada la entrega. Para poder acceder a este cupón se deben inscribir con el nombre de los integrantes de la tarea en un Google Forms que será habilitado en su debido tiempo y que cierra junto a la fecha oficial de la entrega. En caso de ser de a pares ambos deben tener un cupón disponible y se usará uno por cada uno y tendrán 24 horas extra (no 48).
- Las tareas atrasadas sin cupón no serán corregidas, así que recuerden entregarlas a tiempo.
- Esta tarea se puede hacer de a pares o de manera individual. El desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada par en caso de hacerse de a pares. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo y preparación individual de la interrogación a la que está asociada la tarea. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta escalar a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.
- Por entregar en LaTeX se darán 3 décimas para la tarea entregada. Estas no son transferibles a otras actividades. **Para subirlo tendrá que enviar un archivo .pdf y un archivo .zip por separado**. El archivo .zip debe corresponder al código de LaTeX. En caso de no entregar en LaTeX basta con subir un archivo .pdf que contenga las respuestas. En ambos casos los .pdf tienen que contener los nombres de los integrantes. El no cumplir con el formato conllevará descuentos por formato.
- El archivo .pdf entregable se puede realizar a mano, tableta o por LaTeX.
- **Para el caso de esta entrega se debe entregar además un archivo .py con el desarrollo de la pregunta 2**.
- La nota de la tarea queda a lo más con nota 7 en caso de exceder la nota máxima.
- Se abrirá un foro en Canvas donde se responderán las dudas que puedan surgir del enunciado.

Pregunta 1 **[15 Puntos]**

Considere el siguiente dominio $D \subseteq \mathbb{R}^3$ definido por:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 5, x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, x_2 \leq 7, x_3 \leq 6\}$$

(a) Identifique todos sus vértices.

Solution: Notamos que el problema expuesto es un poliedro ya que se puede escribir de la forma $Ax \leq b$. Sabemos que las soluciones las podemos encontrar tomando $n = 3$ restricciones linealmente independientes en igualdad y verificando que la solución obtenida cumpla las otras restricciones.

Corrección: 2.5 puntos por cada uno de los siguientes puntos

Nota: Se aceptan respuestas alternativas a esta ya sea por simplex o algún otro desarrollo matemático.

A continuación, veremos todas las posibles de combinaciones:

- **Tomando la Restricción 1, Restricción 2 y la Restricción 3 tenemos la siguiente matriz:**

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & & & = 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 4 \\ & & x_2 & & & = 7 \end{array}$$

La solución de estas restricciones es $x = (5, 7, -8)$, al evaluarla en la Restricción 4 obtenemos:

$$x_3 = -8 \leq 6$$

Por lo que cumple las restricciones y es un vértice.

- **Tomando la Restricción 1, Restricción 2 y Restricción 4 obtenemos:**

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & & & = 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 4 \\ & & & & x_3 & = 6 \end{array}$$

La solución de estas restricciones es $x = (5, -7, 6)$, al evaluarla en la Restricción 3 obtenemos:

$$x_2 = -7 \leq 7$$

Por lo que cumple las restricciones y es un vértice.

- **Tomando la Restricción 1, Restricción 3 y Restricción 4 obtenemos:**

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & & & = 5 \\ & x_2 & & = 7 \\ & & x_3 & = 6 \end{array}$$

La solución de estas restricciones es $x = (5, 7, 6)$, al evaluarla en la Restricción 2 obtenemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18 \not\leq 4$$

Por lo que cumple no las restricciones y por ende no es un vértice.

- **Tomando la Restricciones 2, 3 y 4 obtenemos:**

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 4 \\ & & x_2 & & & = 7 \\ & & & & x_3 & = 6 \end{array}$$

La solución de estas restricciones es $x = (-9, 7, 6)$, al evaluarla en la Restricción 1 obtenemos:

$$x_1 = -9 \leq 5$$

Por lo que cumple las restricciones y es un vértice.

Concluimos que los vértices obtenidos del poliedro son:

- $v^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}$
- $v^2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$
- $v^3 = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$

(b) Para las siguientes funciones objetivo determine si es que el problema $\max_{\{x \in D\}} f_i(x)$ tiene solución óptima o no. En caso de tener solución óptima, explicite el valor óptimo y el conjunto de soluciones óptimas de cada caso. En caso contrario, identifique un rayo del cono recesivo del poliedro que certifique que el problema no está acotado.

1. $f_1(x) = 7x_1 + 1x_2 + 9x_3$
2. $f_2(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3$
3. $f_3(x) = -x_1 + 7x_2 + 3x_3$
4. $f_4(x) = x_1 + 10x_2 + 9x_3$
5. $f_5(x) = -11x_2 + 15x_3$

Solution: Para este problema sabemos que el problema al ser un poliedro tendremos el óptimo en un vértice o tendremos solución no acotada con un vector en el cono de recesión tal que de un resultado positivo al evaluarlo en la función objetivo. Para cada función objetivo evaluaremos si es acotado o si tiene un vector en el cono de recesión.

Corrección: 1 Punto por cada uno de los siguientes puntos

Corrección: Descripción: 0.5 puntos si es que justifico que tiene solución óptima o no y 0.5 puntos si encuentra el rayo o el vértice.

Nota: Es posible argumentar de otras maneras que el problema es acotado.

1. Para la función objetivo f_1 notamos que si sumamos 7 veces la restricción 1, 1 vez la restricción 3 y 9 veces la restricción 4 tendremos una cota superior para la función objetivo por lo que para el dominio que tenemos la solución objetivo está acotada.

$$7R_1 + R_3 + 9R_4 = 7x_1 + x_2 + 9x_3 \leq 7 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 9 \cdot 6 < \infty$$

Luego, como el problema es un poliedro con una función objetivo lineal la solución se debe encontrar en un vértice y podemos evaluar la función objetivo en cada vértice.

Al evaluarlo tenemos los siguientes valores para v^1, v^2 y v^3 respectivamente: -30, 82, -2. Concluimos que v^2 es el óptimo para la función.

2. Para f_2 hacemos un procedimiento similar para acotar la función objetivo:

$$2R_1 + 3R_3 + 1R_4 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 6 < \infty$$

Al evaluarlo tenemos los siguientes valores para v^1, v^2 y v^3 respectivamente: 23, -5, 9. Concluimos que v^1 es el óptimo para la función.

3. Para f_3 notamos que no podemos acotar por arriba la función objetivo ya que tenemos x_1 siendo multiplicado por un coeficiente negativo y ninguna restricción tiene a x_1 multiplicado por un coeficiente negativo. Esto nos da una noción de que el problema puede ser no acotado ya que ninguna restricción nos dice que no nos podemos ir en $x_1 \to -\infty$.

   Para poder demostrar que el problema es no acotado necesitamos encontrar un vector del cono de recesión tal que al evaluarlo en la función objetivo de un resultado positivo. Para esto probamos si el vector $r^1 = (-1, 0, 0)^T$ es del cono de recesión.

   Lo evaluamos en el sistema $Ar^1 \leq 0$:

$$\begin{aligned} -1 + 0 + 0 &\leq 0 \\ -1 + 0 + 0 &\leq 0 \\ 0 + 0 + 0 &\leq 0 \\ 0 + 0 + 0 &\leq 0 \end{aligned}$$

   Por ende r^1 es del cono recesivo.

   Lo evaluamos en la función objetivo: $f_3(r^1) = 1 > 0$.

   Finalmente, podemos demostrar que el problema es no acotado ya que $\forall \lambda > 0 \;\; \lambda A r^1 \leq 0$ y por ende $\lim_{\lambda \to \infty} f_3(\lambda r^1) = \infty$

4. Para f_4 hacemos un procedimiento similar para acotar la función objetivo:

$$1R_1 + 10R_3 + 9R_4 = x_1 + 10x_2 + 9x_3 \leq 1 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 9 \cdot 6 < \infty$$

   Al evaluarlo tenemos los siguientes valores para v^1, v^2 y v^3 respectivamente: 3, -11, 115. Concluimos que v^3 es el óptimo para la función.

5. Para f_5 tenemos un caso similar al de f_3 ya que tenemos que x_2 está siendo multiplicado por un escalar negativo. Probamos si es que $r^2 = (0, -1, 0)^T$ es un vector del cono recesivo tal que al evaluarlo en la función objetivo de positivo.

   Evaluamos $Ar^2 \leq 0$:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 &\leq 0 \\ 0 + -1 + 0 &\leq 0 \\ 0 + -1 + 0 &\leq 0 \\ 0 + 0 + 0 &\leq 0 \end{aligned}$$

   Por ende r^2 es del cono recesivo.

   Luego, evaluamos $f_5(r^2) = 1$ por lo que es positiva en el vector del cono recesivo y usando un argumento similar que en f_3 podemos concluir de que es no acotado.

Pregunta 2 **[18 Puntos]**

Considere el problema 2 de la interrogación 1 de este semestre (2023-2).

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{e\in E}\sum_{t\in T}\sum_{s\in S} c_{e,t,s}\cdot x_{e,t,s} + \sum_{e\in E} f_e y_e + \sum_{e\in E} d_e \cdot z_e & \\
s.a. \quad & x_{e,t,s} \leq h_{e,s} & \forall e\in E, t\in T, s\in S \\
& \sum_{s\in S} x_{e,t,s} \leq 1 & \forall e\in E, t\in T \\
& \sum_{e\in E} x_{e,t,s} \geq b_{t,s} & \forall t\in T, s\in S \\
& \sum_{t=t\text{‘}}^{t\text{‘}+3} x_{e,t,s} \leq 3 & \forall e\in E, t\in \{0,\ldots,|T|-4\}, s\in S \\
& \sum_{t\in T}\sum_{s\in S} x_{e,t,s} \leq D + y_e & \forall e\in E \\
& \sum_{t\in T}\sum_{s\in S} x_{e,t,s} \leq |T|\cdot z_e & \forall e\in E \\
& \sum_{t\in T}\sum_{s\in S} x_{e,t,s} \geq M\cdot z_e & \forall e\in E \\
& z_e \in \{0,1\} & \forall e\in E \\
& y_e \in \mathbb{R} & \forall e\in E \\
& x_{e,t,s} \in \{0,1\} & \forall e\in E, t\in T, s\in S
\end{aligned}
$$

(a) Programe en `Gurobi` el modelo y resuélvalo detallando su valor óptimo. Los parámetros de la instancia a resolver pueden ser encontrados en el archivo llamado *datos.py* que se encuentra disponible en la carpeta de "Tareas/Tarea 2" en Canvas.

NOTA: Para obtener puntaje debe subir un archivo .py que pueda ser ejecutado por el ayudante.

Solution:

Corrección: 12 puntos: 1 punto cada restricción, 1 punto cada variable 1 punto la función objetivo, 1 punto el valor objetivo correcto

```
import gurobipy as gp
from gurobipy import GRB
from gurobipy import quicksum, Model

from random import randint, seed, uniform
seed(10)

model = Model()
T = range(25)
S = range(10)
E = range(37)

h = dict()
for e in E:
    for s in S:
        if s < 3:
            h[e, s] = 1
```

```
        else:
            h[e, s] = randint(0, 1)

b = { (t, s): randint(0, 5) for t in T for s in S }
c = { (e, t, s): uniform(2, 7) for e in E for t in T for s in S }
f = { e: uniform(8, 15) for e in E}
d = { e: uniform(100, 500) for e in E}
D = randint(3, len(T) - 1)
M = randint(2, D - 1)

x = model.addVars(E, T, S, vtype=GRB.BINARY)
y = model.addVars(E, vtype=GRB.CONTINUOUS)
z = model.addVars(E, vtype=GRB.BINARY)

model.addConstrs(
    x[e, t, s] <= h[e, s]
    for e in E for t in T for s in S
)

model.addConstrs(
    quicksum(x[e, t, s] for s in S) <= 1
    for e in E for t in T
)

model.addConstrs(
    quicksum(x[e, t, s] for e in E) >= b[t, s]
    for t in T for s in S
)

model.addConstrs(
    quicksum(x[e, l, s] for l in range(t, t + 4)) <= 3
    for e in E for t in T[:-3] for s in S
)

model.addConstrs(
    quicksum(x[e, t, s] for t in T for s in S) <= D + y[e]
    for e in E
)

model.addConstrs(
    quicksum(x[e, t, s] for t in T for s in S) <= len(T) * z[e]
    for e in E
)

model.addConstrs(
    quicksum(x[e, t, s] for t in T for s in S) >= M * z[e]
    for e in E
)

model.setObjective(
    quicksum(c[e, t, s] * x[e, t, s] for e in E for t in T for s in S)
```

```
    + quicksum(f[e] * y[e] for e in E)
    + quicksum(d[e] * z[e] for e in E)
    , GRB.MINIMIZE
)

model.update()
model.optimize()
```

(b) Para las personas $e \in \{0, 5, 14\}$ haga una lista de $|T|$ elementos (una por día) en donde cada elemento debe detallar la función $s \in \{0, \ldots, |S|-1\}$ que la persona e trabaja el día t de acuerdo a la solución obtenida. Entregue un -1 si la persona no trabaja ese día. Ejemplo:

```
Lista_persona_0 = [-1, 1, -1, 0, -1, 4, -1]
```

En este ejemplo la persona 0 trabaja en la función 1 en el segundo día, en la función 0 el cuarto día y en la función 4 el sexto día. En los otros días la persona no trabaja.

Solution: **Corrección:** 4.5 puntos: 1.5 puntos cada lista. Dar puntaje parcial si es que hay desarrollo en python bien justificado.

```
Lista_[0] = [2, 2, -1, 1, -1, 5, 0, 9, 5, -1, -1, 8, 9, 1,
            9, -1, -1, 1, -1, 8, 0, -1, 8, 5, -1]
Lista_[5] = [1, 9, -1, 6, 6, 5, 9, 6, -1, 8, 9, 6, 6, -1,
            0, 0, 1, 8, 6, 2, 5, 8, 5, 6, 6]
Lista_[14] = [4, -1, 1, 8, -1, 3, 8, 0, 2, 5, 9, 9, 3, 3,
            3, 5, -1, 5, -1, 8, 9, 3, 3, 8, 2]
```

(c) Liste a todas las personas contratadas en la solución óptima.

Solution: **Corrección:** 1.5 puntos Dar puntaje parcial si es que se da desarrollo en python bien realizado.

```
Personal contratado: [0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22,
                      23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36]
```

Pregunta 3 **[27 Puntos]**

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 31 \\ & -4x_1 - 4x_3 \leq -6 \\ & x_2 - 2x_3 \leq 23 \\ & -x_2 + x_3 \geq -15 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

(a) [4 Puntos] Escriba el problema en forma estándar $\text{mín}_x\{\, c^\top x \,:\, Ax = b, x \geq 0\}$. Identifique claramente la matriz A, el vector de recursos b y el vector de costos c.

Solution: Notamos que debemos cambiar el signo de la variable x_3. Para esto usaremos $x_3^- = -x_3$. Para facilitar el desarrollo multiplicaremos la restricción 2 y 3 por -1.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -3x_1 - 6x_2 - 2x_3^- \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 31 \\ & 4x_1 - 4x_3^- \geq 6 \\ & x_2 + 2x_3^- \leq 23 \\ & x_2 + x_3^- \leq 15 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Añadiendo las holguras:

Corrección: 4 puntos: 1 punto por la función objetivo, 1 punto por la matriz A, 1 punto por el vector c, 1 punto por el vector b.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -3x_1 - 6x_2 - 2x_3^- \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 + h_1 = 31 \\ & 4x_1 - 4x_3^- - h_2 = 6 \\ & x_2 + 2x_3^- + h_3 = 23 \\ & x_2 + x_3^- + h_4 = 15 \\ & x, h \geq 0 \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 31 \\ 6 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(b) [6 Puntos] Resuelva el problema de Fase I a partir del punto $x = 0$. Para esto añada solamente variables artificiales no nulas al problema en forma estándar. Para poder resolver esto se le entregará

en canvas un archivo llamado 'simplex_solver.nb' que permite obtener las matrices necesarias, los costos reducidos y el $\bar{b}$.

Nota: En cada iteración escriba: los elementos de la base, los elementos no básicos, la matriz asociada a la base, la matriz asociada a la no base, los costos reducidos y el criterio de entrada.

Solution: Notamos que el problema es infactible en la restricción 2 por lo que debemos añadir una variable auxiliar que intentaremos minimizar.

Corrección: 2 punto por replantear el problema.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & t \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 + h_1 = 31 \\ & 4x_1 - 4x_3^- - h_2 + t = 6 \\ & x_2 + 2x_3^- + h_3 = 23 \\ & x_2 + x_3^- + h_4 = 15 \\ & x, h, t \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 31 \\ 6 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Usaremos la siguiente notación: B elementos de la base, N elementos no básicos, A_B columnas de los elementos de la base, A_N columnas de los elementos no básicos y $\bar{b} = A_B^{-1} b$.

Corrección: 4 puntos: 1 punto por la base y 1 punto por la no base, 1 punto por los costos reducidos y el criterio de entrada, 1 punto por el criterio de salida.

Luego, los elementos de la base y los no básicos son:

$$B = \{h_1, h_3, h_4, t\} \quad N = \{x_1, x_2, x_3^-, h_2\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 31 \\ 23 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son:

$$c_R^T = c_N^T - c_B^T A_B^- 1 A_N = (-4,\ 0,\ 4,\ 1)$$

Entra x_1 a la base. Aplicamos el criterio de salida:

$$\frac{\bar{b}}{R_{x_1}} = \left\{\frac{31}{2}, \frac{23}{0}, \frac{15}{0}, \frac{6}{4}\right\} = \{31/2, \bullet, \bullet, 3/2\}$$

Sale t de la base por el criterio de salida. Como la variable artificial ya no se encuentra en la base podemos concluir que el problema es factible por lo que concluimos con la Fase I.

(c) [13 Puntos] Resuelva el problema de Fase II a partir de la solución anterior. **Nuevamente se les pide el mismo desarrollo que el paso anterior y que entregue la solución del problema original con su valor objetivo**. En caso de que hayan múltiples costos reducidos negativos en el criterio de entrada, elija el más negativo.

Solution: **Corrección:** 13 puntos: 4 iteración 1, 4 iteración 2, 3 iteración 3, 2 solución final.
Primera iteración

Corrección: 4 puntos: 1 punto por la base, 1 punto por la no base, 1 punto por los costos reducidos con el criterio de entrada y 1 punto por el criterio de salida.

Lo que nos quedo del ejercicio pasado fue lo siguiente:

$$B = \{x_1, h_1, h_3, h_4\}, \quad N = \{x_2, x_3^-, h_2\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 28 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son:

$$c_R^T = c_N^T - c_B^T A_B^- 1 A_N = (-6, \ -5, \ -3/4)$$

Entra x_2 a la base. Aplicamos el criterio de salida:

$$\frac{\bar{b}}{R_{x_1}} = \left\{\frac{3/2}{0}, \frac{28}{3}, \frac{23}{1}, \frac{15}{1}\right\} = \{\bullet, 28/3, 23, 15\}$$

Sale h_1 de la base por el criterio de salida.

Segunda iteración

Corrección: 4 puntos: 1 punto por la base, 1 punto por la no base, 1 punto por los costos reducidos con el criterio de entrada y 1 punto por el criterio de salida.

La base que nos queda es la siguiente:

$$B = \{x_1, x_2, h_3, h_4\}, \quad N = \{x_3^-, h_1, h_2\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 28/3 \\ 41/3 \\ 17/3 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son:

$$c_R^T = c_N^T - c_B^T A_B^- 1 A_N = (-1,\ 2,\ 1/4)$$

Entra x_3^- a la base. Aplicamos el criterio de salida:

$$\frac{\bar{b}}{R_{x_3^-}} = \left\{\frac{3/2}{-1}, \frac{28/3}{2/3}, \frac{41/3}{4/3}, \frac{17/3}{1/3}\right\} = \{\bullet, 14, 10{,}25, 17\}$$

Sale h_3 de la base por el criterio de salida.

Tercera iteración

Corrección: 3 puntos: 1 punto por la base, 1 punto por la no base, 1 punto por los costos reducidos con el criterio de entrada

La base que nos queda es la siguiente:

$$B = \{x_1, x_2, x_3^-, h_4\},\quad N = \{h_1, h_2, h_3\}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 47/4 \\ 5/2 \\ 41/4 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son:

$$c_R^T = c_N^T - c_B^T A_B^- 1 A_N = (7/4,\ 1/8,\ 3/4) \geq 0$$

Como hemos llegado a que los costos reducidos son positivos tenemos que la solución es óptima.

Corrección: 2 puntos: 1 punto por la función objetivo y 1 punto por la solución original.

Luego, la solución al problema original es: $x = \begin{bmatrix} 47/4 \\ 5/2 \\ -41/4 \end{bmatrix}$ y el valor objetivo obtenido es: 70,75.

(d) [4 Puntos] Identifique las restricciones limitantes en el óptimo y el valor (en unidades de objetivo) que estaría dispuesto a pagar por un aumento cada lado derecho en una unidad. Además, explique que ocurre con las restricciones que no están en el óptimo.

Solution: Podemos identificar las restricciones limitantes mediante el las holguras que no estén en la base ya que significa que se cumple la restricción en igualdad. Luego, las holguras en la no base son: h_1, h_2 y h_3 por lo que se tienen las primeras tres restricciones en igualdad.

Por análisis de sensibilidad, sabemos que la ganancia marginal de aumentar en una unidad el lado derecho se puede obtener mediante los costos reducidos. Queremos que la ganancia marginal sea mayor al gasto a pagar:

$$\Delta z = \Delta b \cdot c_N^\top \geq pagar$$

Esto funciona siempre y cuando la perturbación sea suficientemente pequeña como para mantener la base.

Corrección: 1 Punto cada uno de los siguientes puntos

Notamos que las respuestas correspondientes son:

- Restricción 1: $pagar \leq 7/4$
- Restricción 2: $pagar \leq 1/8$
- Restricción 3: $pagar \leq 3/4$
- Restricción 4: $pagar = 0$. Notamos que este caso es especial ya que la restricción no se cumple en igualdad, entonces el aumentar en uno el lado derecho lo único en lo que afecta es variar la holgura en una unidad. Por lo que no obtenemos ganancia por mover el lado derecho y por ende no pagamos nada.