PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2012
Profesores: P. Álvarez, A. Cataldo
A. Lüer, G. Paredes

Pauta Interrogación 2

Duración: 2 horas 45 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes: ***Pregunta 1 Partes a), b) y c)****;* ***Pregunta 1 Partes d), e) y Bonus****;* ***Pregunta 2****; y* ***Pregunta 3****. En cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

a) **(4 puntos)** Sea P) un problema de programación lineal. Justifique las siguientes afirmaciones:

   i) **(2 puntos)** El problema correspondiente de la Fase I siempre es acotado.
   Respuesta: Es verdad, ya que se minimizan una o más variables no negativas.

   ii) **(2 puntos)** Si el P) es factible y el problema de la Fase I correspondiente no tiene soluciones óptimas alternativas, entonces el problema P) tiene una única solución básica factible.

   Respuesta: Es verdad, ya que si el problema de la Fase I no tiene soluciones alternativas, entonces no existen bases factibles vecinas a la actual, es decir desde el vértice del poliedro no se puede alcanzar otro. Luego, el problema tiene una única solución básica factible.

b) **(4 puntos)** Suponga que usted dispone de una forma canónica que entrega una solución básica factible que no es óptima. Además usted conoce todos los costos reducidos de la función objetivo en el óptimo. Explique cómo se pueden obtener los valores de las variables en la solución óptima a partir de la información anterior y sin tener que resolver el problema mediante una secuencia de iteraciones.

   Respuesta: Como se conocen los costos reducidos de la función objetivo en el óptimo, se pueden identificar las variables no básicas y por lo tanto, las variables básicas de la solución óptima.

   Si se conocen las variables básicas en el óptimo, se puede definir la matriz básica óptima. Luego se puede calcular $x_{B^*} = (B^*)^{-1} b$. El vector x_{B^*} contiene el valor de las variables básicas en el óptimo. Para conocer el valor de la función objetivo basta calcular $z^* = c_{B^*} x_{B^*}$.

c) **(4 puntos)** Suponga que $w_1^* = 0$ es el valor óptimo de la primera variable dual de un problema. ¿Significa eso que el recurso 1 del problema primal se puede aumentar o disminuir en cualquier cantidad sin que el óptimo primal cambie? Justifique.

   Respuesta: Falso. No significa que pueda aumentar o disminuir el recurso 1 en cualquier cantidad sin que el óptimo del primal cambie. Para que el óptimo primal no cambie se puede modificar el recurso 1 siempre y cuando este movimiento no altere la base.

d) **(4 puntos)** Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{máx} & \frac{1}{\ln(2x+y)} \\ s.a. & & \\ & & |x+y| \leq 2 \\ & & x^2+y^2 \leq 4 \\ & & x+1 \leq y^2 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

a) **(2 puntos)** Obtener un problema equivalente diferenciable asociado al problema (P) entregado.

b) **(2 puntos)** Demostrar si el problema equivalente admite solución óptima utilizando el teorema de Bolzano-Weierstrass.

Respuesta:

a) Se sabe que maximizar $\frac{1}{a}$ es equivalente a minimizar a, si $a > 0$. En este caso, $\ln(2x+y) > 0$, luego se tiene:

$$\begin{array}{lll} (P1) & \text{mín} & \ln(2x+y) \\ s.a. & & \\ & & |x+y| \leq 2 \\ & & x^2+y^2 \leq 4 \\ & & x+1 \leq y^2 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Aplicando exponencial en la función objetivo y linealizando la restricción de valor absoluto se tiene:

$$\begin{array}{lll} (P2) & \text{mín} & 2x+y \\ s.a. & & \\ & & 2x+y \geq 1 \\ & & x+y \leq 2 \\ & & x+y \geq -2 \\ & & x^2+y^2 \leq 4 \\ & & x+1 \leq y^2 \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

Notar que es necesario definir $2x+1 \geq 1$ para no indefinir a la función objetivo logarítmica. El problema $P2$ es un equivalente diferenciable del problema P.

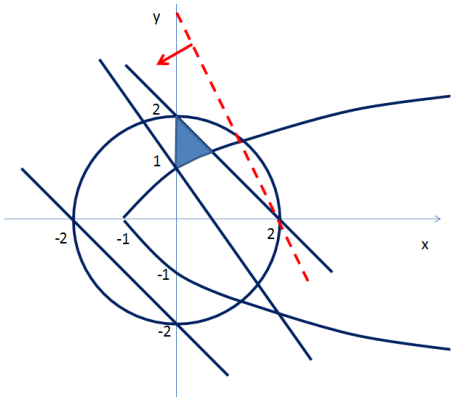
b) Se tiene que:

- El Dominio es Acotado. Basta con observar que $x^2+y^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2; -2 \leq y \leq 2$ (Cualquier otro acotamiento correcto también es válido.).
- El Dominio es Cerrado, dado que se tienen desigualdades amplias ($\geq$, $=$ ó $\leq$)
- El Dominio es No Vacío, dado que existe al menos un punto que cumple con todas las restricciones, por ejemplo, el punto $(0,2) \in D$.
- La función objetivo es lineal y por lo tanto continua (polinomio de primer grado).

Por lo tanto, por el teorema de Bolzano Weierstrass, el problema admite solución óptima.

Se puede, además, observar el siguiente gráfico representa el problema equivalente obtenido.

Se ve claramente que el valor objetivo del problema equivalente se encuentra en el punto (0,1).



e) **(4 puntos)** Sea A una matriz simétrica cuadrada. Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned}(P)\quad &\min c^T x\\ &Ax \geq c\\ &x \geq 0\end{aligned}$$

Pruebe que si $\bar{x}$ satisface $A\bar{x} = c$ y $\bar{x} \geq 0$, entonces $\bar{x}$ es una solución óptima.

Respuesta: Sea (D) el dual de (P):

$$\begin{aligned}(D)\quad &\max c^T y\\ &Ay \leq c\\ &y \geq 0\end{aligned}$$

y sea $\bar{y}$ tal que:

$$\begin{aligned}A\bar{y} &= c \quad /cA^{-1}\cdot\\ c\bar{y} &= cA^{-1}c\end{aligned}$$

por enunciado:

$$\begin{aligned}A\bar{x} &= c \quad /cA^{-1}\cdot\\ c\bar{x} &= cA^{-1}c\\ c\bar{x} &= c\bar{y}\end{aligned}$$

como $\bar{y}$ es factible en (D), por dualidad débil se tiene que $c\bar{y} \leq cx\ \forall x$ factible en (P). Además, $c\bar{x} \leq cx\ \forall x$ factible en (P) y como $c\bar{x} = c\bar{y}$ se tiene que $\bar{x}$ debe ser óptimo para (P).

Bono (5 puntos) Puede responder la siguiente pregunta para obtener una bonificación extra máxima de 5 puntos.

Considere el problema de minimización $c^T x$ en el poliedro P. Pruebe que una solución factible x es óptima si y sólo si $c^T d \geq 0$, para toda dirección factible d en x.

Respuesta: Provemos la condición suficiente $(\rightarrow)$ y la condición necesaria $(\leftarrow)$.

Condición suficiente $(\rightarrow)$. Sea x una solución óptima $c^T x \leq c^T \hat{x}\ \forall \hat{x} \in P$. Supongamos que existe un d tal que $c^T d < 0\,(*)$.

Sea $\hat{x} = x + \theta d$, donde $\theta > 0$ (paso dado en esa dirección). Como x es óptimo: $c^T x < c^T(x + \theta d) \Leftrightarrow 0 < \theta c^T d \Leftrightarrow 0 < c^T d$ que se contradice con $(*)$.

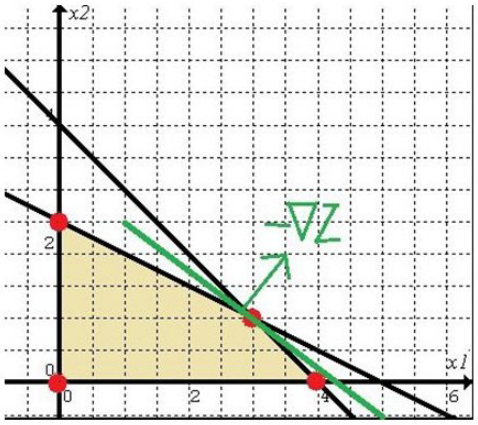
Condición necesaria $(\leftarrow)$. Supongamos que $c^T d \geq 0\ \forall d$, con d dirección factible de x. Sea $\hat{x}$ tal que $d = \hat{x} - x$, entonces $c^T d \geq 0 \Leftrightarrow c^T(\hat{x} - x) \leq 0 \Leftrightarrow c^T \hat{x} \geq c^T x$ y entonces x es el óptimo.

Pregunta 2 (20 puntos)

a) Dado el siguiente problema de programación lineal,

$$
\begin{array}{rrrcrcrl}
P) & \min Z = & - & 3x_1 & - & 4x_2 & & \\
 & \text{s.a.} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

i) **(1 punto)** Obtenga la solución óptima de P) de manera gráfica.
Respuesta: La figura siguiente presenta el poliedro factible por la zona café, las fronteras de los semiespacios definidos por las restricciones son las líneas negras. Los puntos rojos representan los vértices del espacio factible. Se presenta la dirección en que se optimiza. La solución óptima es $x^* = (3, 1)$, y el valor óptimo de la función objetivo es -13.



ii) **(3 puntos)** Resuelva el problema P) mediante el Algoritmo Simplex, partiendo de la solución $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{5}{2}$.
Respuesta: Lo primero es escribir la forma estándar del problema.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min Z = & -3x_1 & -4x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = 5 \\
 & x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 4 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & & \geq 0
\end{array}
$$

Es decir,

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Luego, la solución entregada está asociada a la base compuesta por $\mathcal{B} = \{x_2, x_4\}$, que es factible, así que comenzamos a iterar.

Iteración 1

$\mathcal{B} = \{x_2, x_4\}$, $\mathcal{R} = \{x_1, x_3\}$

Los vectores y matrices son:

$$
B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; c_B^T = (-4, 0)
$$

$$
R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; c_R^T = (-3, 0)
$$

- ◇ La inversa de la matriz de base es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$
- ◇ El valor de las variables básicas es: $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$
- ◇ Los multiplicadores simplex son $\pi^T = c_B^T B^{-1} = (-4, 0)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (-2, 0)$
- ◇ Los costos reducidos son $\bar{c}_R^T = c_R^T - \pi^T R = (-3, 0) - (-2, 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1, 2)$. Por lo tanto, entra x_1 a la base.
- ◇ La variable que sale se calcula al hacer el cuociente en la columna de $B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ correspondiente a la columna de la variable que entra y el lado derecho transformado $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. Se elige el menor: mín $\{(5/2)/(1/2),\ (3/2)/(1/2)\} = 3$. Por lo tanto, sale x_4.

Iteración 2

$\mathcal{B} = \{x_2, x_1\}$, $\mathcal{R} = \{x_4, x_3\}$

Los vectores y matrices son:

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $c_B^T = (-4, -3)$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c_R^T = (0, 0)$

- ◇ La inversa de la matriz de base es $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- ◇ El valor de las variables básicas es: $x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- ◇ Los multiplicadores simplex son $\pi^T = c_B^T B^{-1} = (-4, -3)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (-1, -2)$
- ◇ Los costos reducidos son $\bar{c}_R^T = c_R^T - \pi^T R = (0, 0) - (-1, -2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2)$. Por lo tanto, la solución es óptima.

El vector óptimo es $x^T = (3, 1, 0, 0)$, con valor óptimo $z^* = c_{B^*}x_{B^*} = -13$, lo que concuerda con el análisis gráfico.

iii) **(2 puntos)** Determine analíticamente (a partir de la solución obtenida en i) el rango en que pueden variar individualmente (uno a la vez) los coeficientes de la función objetivo, para que la base óptima obtenida en ii) siga siendo óptima.

Respuesta: La condición que debe mantenerse para que la base no cambie, al cambiar los coeficientes de las variables es la de optimalidad, es decir que $\bar{c}_R^T \geq 0$.

- ◇ Para el caso de c_1, esta equivale a,

$$(0, 0) - (-4, c_1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que se llega, al hacer los productos matriciales, a lo siguiente,

$$\left.\begin{aligned} 4 + c_1 &\geq 0 \\ -4 - 2c_1 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -4 \leq c_1 \leq -2$$

◇ Para el caso de c_2, esta equivale a,

$$(0,0) - (c_2, -3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que se llega, al hacer los productos matriciales, a lo siguiente,

$$\left.\begin{array}{r} -3 - c_2 \geq 0 \\ 6 + c_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -6 \leq c_2 \leq -3$$

iv) **(2 puntos)** Establezca analíticamente el intervalo en que puede variar cada lado derecho de las restricciones, para que la estructura de la solución óptima obtenida en ii) no cambie.

Respuesta: La condición que debe cumplirse es que la solución básica siga siendo factible, es decir $x_B = B^{-1}b \geq 0$.

Para el caso de b_1, esto equivale a,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que es,

$$\left.\begin{array}{r} b_1 - 4 \geq 0 \\ -b_1 + 8 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \leq b_1 \leq 8$$

Para el caso de b_1, esto equivale a,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que es,

$$\left.\begin{array}{r} 5 - b_2 \geq 0 \\ -5 + 2b_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5/2 \leq b_2 \leq 5$$

v) **(2 puntos)** Considere ahora que es posible incorporar al problema P) una nueva variable x_3 que tiene un costo $c_3 = -5$ y su columna asociada a la utilización de recursos es $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Justifique si la incorporación de la nueva variable modificará la solución óptima obtenida en i) y ii).

Respuesta: Para esto verificamos si la variable adicional cumple o no con el criterio de optimalidad en el punto extremo en el que estamos parados. Esto es:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

Luego, como el costo reducido de esta nueva variable es no negativo, la solución obtenida en i) y ii) no se verá modificada.

b) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max Z = & 7x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \\ \text{s.a.} & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & \leq 40 \\ & 10x_1 & + & 20x_2 & + & 5x_3 & \leq 50 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

i) **(3 puntos)** Justifique si la solución $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 5$ es solución óptima del problema propuesto.

Respuesta: Primero es fácilmente verificable que la solución entregada satisface todas las restricciones, luego es solución factible para el primal. Ahora, construyamos el dual del problema, que queda:

$$\begin{array}{rrcrcl} \min W = & 40y_1 & + & 50y_2 & & \\ \text{s.a.} & 4y_1 & + & 10y_2 & & \geq 7 \\ & 5y_1 & + & 20y_2 & & \geq 2 \\ & 8y_1 & + & 5y_2 & & \geq 5 \\ & y_1 & , & y_2 & & \geq 0 \end{array}$$

Con el teorema de holguras complementarias se construye el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} (40 - (4x_1 + 5x_2 + 8x_3)) \cdot y_1 & = & 0 \\ (50 - (10x_1 + 20x_2 + 5x_3)) \cdot y_2 & = & 0 \\ (7 - (4y_1 + 10y_2)) \cdot x_1 & = & 0 \\ (2 - (5y_1 + 20y_2)) \cdot x_2 & = & 0 \\ (5 - (8y_1 + 5y_2)) \cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

Luego, utilizando $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 5$ se obtiene $y_1 = \frac{5}{8}$ e $y_2 = 0$ que no satisface la restricción dual 1. Luego, como no es factible dual, no puede ser óptimo primal (teorema fuerte de dualidad).

Respuesta alternativa: También es posible responder la pregunta utilizando el criterio de optimalidad de simplex.

La forma estándar del problema es:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \min Z = & - & 7x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & & & & & \\ \text{s.a.} & & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & + & x_4 & & & = 40 \\ & & 10x_1 & + & 20x_2 & + & 5x_3 & & & + & x_5 & = 50 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

donde las variables básicas son x_3 y x_5 y el resto es no básicas.

La matriz básica es:

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

entonces el criterio de optimalidad de simplex queda:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{5}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{36}{8} & \frac{9}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

luego, se verifica que la solución entregada no es la solución óptima del problema.

ii) **(4 puntos)** Considere ahora las siguientes soluciones:

	x_1	x_2	x_3
Solución 1	5	0	0
Solución 2	0	0	10
Solución 3	0	8	0
Solución 4	10	0	0

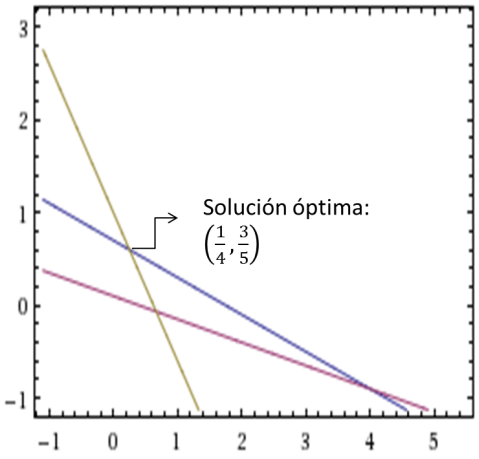
Utilice estas soluciones para entregar la mejor cota inferior y cota superior para el valor óptimo de la función objetivo del problema propuesto.

Respuesta: Es fácil de verificar que solo la solución 1 es factible en el primal, luego, entrega la mejor cota inferior que equivale a 35.

Las soluciones 2, 3 y 4 son primales infactibles. Aplicando el teorema de holguras complementarias a cada una de ellas, se puede verificar que la solución 2 es dual factible y tiene un valor en la función objetivo de 50; la solución 3 es dual infactible; y la solución 4 es dual factible con función objetivo evaluada en 70. Por lo tanto, la mejor cota superior será la entregada por la solución 2. En consecuencia, el valor óptimo de la función objetivo estará en el intervalo $[35, 50]$. Se verifica que esta solución es primal factible, luego por el teorema fuerte de dualidad es la solución óptima del problema planteado.

iii) **(3 puntos)** Entregue la solución óptima del problema propuesto.

Respuesta: Para esto resolvemos gráficamente el dual.



Luego $y_1^* = \frac{1}{4}$ y $y_2^* = \frac{3}{5}$ con un valor de función objetivo $w^* = 40$. Utilizando nuevamente el sistema de ecuaciones asociado al teorema de holguras complementarias se tiene que $x_1^* = \frac{10}{3}$, $x_2^* = 0$ y $x_3^* = \frac{10}{3}$, con un valor de función objetivo $z^* = 40$.

Pregunta 3 (20 puntos)

Una empresa de productos de alto consumo ha visto crecer de manera importante sus costos de distribución debido al aumento del costo del combustible. Al mismo tiempo, la Compañía ha cambiado su estrategia de distribución, ya que antes sólo vendía sus productos a grandes clientes como cadenas de supermercados o distribuidores mayoristas. Actualmente ha comenzado a vender directamente a supermercados de tamaño mediano que antes le compraban sus productos a los distribuidores.

Esto ha generado un desafío logístico, dado que ahora se envían desde el mismo centro de distribución pedidos pequeños y grandes a los clientes, los que pertenecen a un conjunto C. Cada pedido puede ser enviado directamente al cliente $c \in C$ de destino, o en caso contrario, se puede dejar en una plataforma de *cross-docking* $p \in P$(punto de transferencia), desde donde una empresa externa lo repartirá. No siempre es trivial decidir si un pedido debe ser enviado de manera directa o mediante una plataforma de *cross-docking*, ya que depende de cuales de los otros pedidos deben ser enviados ese día.

La idea es asignar todos los pedidos despachados por la Compañía en un día particular a alguno de los camiones disponibles. Cada camión $k \in K$ posee una capacidad diferente en términos de

volumen y peso, denotadas V_k y P_k, respectivamente.

Para cada cliente que realizó un pedido ese día, se conoce su número de cliente, el volumen del pedido v_c, el peso del pedido w_c, el número de cajas del pedido $CAJAS_c$, y la ruta a la que pertenece (que permite conocer el costo estimado de asignarlo a cada tipo de camión).

La distancia exacta entre los clientes no es conocida, y por lo tanto su modelo no debe decidir el orden exacto en que se visitan los clientes. Sin embargo, pedidos para clientes ubicados en ciudades lejanas entre sí, no deberían ser asignadas al mismo camión. Para modelar esto, se utiliza información de las zonas a las que pertenecen los clientes. Los clientes se asocian a las zonas dependiendo de la ciudad en que se ubican. Las ciudades grandes pueden incluir múltiples zonas. Estas zonas se combinan en macro-zonas más grandes, para las que a su vez se conoce la información de qué otras macro-zonas pueden ser combinadas al asignar clientes a un mismo camión. El conjunto de macro-zonas que pueden ser combinadas se denota Z. Se establece que un camión asignado a una macro-zona $z \in Z$ tiene un número máximo de paradas permitidas ($PARADAS_z$).

Además, los pedidos asignados a un mismo camión deben cumplir algunos requerimientos especiales. Unos pocos clientes requieren que sus entregas se realicen en ventanas de tiempo específicas; este aspecto se modela evitando que algunos pares de clientes sean asignados a un mismo camión. Los pares de clientes no permitidos se almacenan en el conjunto T.

Los costos de transporte asociados al problema son:

- $\diamond$ $CTD^k_{c,z}$: costo (por caja) de transporte en el camión $k \in K$ al enviar el pedido del cliente $c \in C$ perteneciente a la macro-zona $z \in Z$ en forma directa.
- $\diamond$ $CTCD^k_{c,z,p}$: costo (por caja) de transporte en el camión $k \in K$ hacia la plataforma $p \in P$ que envía pedidos de clientes $c \in C$ a la macro-zona $z \in Z$ en forma directa.
- $\diamond$ $CE_{p,c}$: costo (por caja) de la empresa externa para entregar los pedidos del cliente $c \in C$ desde la plataforma $p \in P$.

Formule un Modelo de Programación Lineal Entera que determine la forma de entregar los pedidos de los clientes, para minimizar el costo total de distribución de todos los pedidos, considerando envíos directos y envíos a través de plataformas de cross-docking.

1. Pauta Pregunta 3

Variables de decisión

- $\diamond$ $x^k_{c,z} = \begin{cases} 1, & \text{si el camión } k \in K \text{ visita al cliente } c \in C, \text{ ubicado en la macrozona } z \in Z \\ & \text{en forma directa.} \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$
- $\diamond$ $y^k_{c,z,p} = \begin{cases} 1, & \text{si el camión } k \in K \text{ va a dejar el pedido del cliente } c \in C, \text{ ubicado en la} \\ & \text{macrozona } z \in Z \text{ a la plataforma } p \in P \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$
- $\diamond$ $u^k_z = \begin{cases} 1, & \text{si el camión } k \in K \text{ visita la macrozona } z \in Z \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$
- $\diamond$ $m^k_{z,p} = \begin{cases} 1, & \text{si el camión } k \in K \text{ visita la plataforma } p \in P \text{ con pedidos de uno o varios} \\ & \text{clientes de la macrozona } z \in Z \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_{k\in K}\sum_{c\in C}\sum_{z\in Z}\left(CAJAS_c \cdot CTD^k_{c,z}\right) x^k_{c,z} + \sum_{k\in K}\sum_{c\in C}\sum_{p\in P}\left(CAJAS_c \cdot CTCD^k_{z,p}\right) m^k_{z,p} + \\ + \sum_{c\in C}\sum_{z\in Z}\sum_{p\in P}\sum_{k\in K}\left(CE_{p,c} CAJAS_c\right) y^k_{c,z,p}$$

Restricciones

(a) Todos los pedidos deben ser entregados.

$$\sum_{z\in Z}\sum_{k\in K} x^k_{c,z} + \sum_{z\in Z}\sum_{k\in K}\sum_{p\in P} y_{c,z,p} \geq 1,\ \forall c \in C$$

(b) Se debe respetar la capacidad volumétrica de los camiones.

$$\sum_{c\in C}\sum_{z\in Z} v_c x^k_{c,z} + \sum_{c\in C}\sum_{z\in Z}\sum_{p\in P} v_c y^k_{c,z,p} \leq V^k,\ \forall k \in K$$

(c) Se debe respetar la capacidad másica de los camiones.

$$\sum_{c\in C}\sum_{z\in Z} w_c x^k_{c,z} + \sum_{c\in C}\sum_{z\in Z}\sum_{p\in P} w_c y^k_{c,z,p} \leq W^k,\ \forall k \in K$$

(d) Un camión puede visitar como máximo una macrozona.

$$\sum_{z\in Z} u^k_z \leq 1,\ \forall k \in K$$

(e) Si un pedido de un cliente se envía de forma directa, entonces se debe visitar la macrozona.

$$x^k_{c,z} \leq u^k_z,\ \forall k \in K,\ z \in Z,\ c \in C$$

(f) Si un pedido de una macrozona se asigna a un camión para entrega por plataforma, se debe visitar la macrozona.

$$y^k_{c,z,p} \leq m^k_{z,p},\ \forall k \in K,\ z \in Z,\ p \in P,\ c \in C$$

(g) Se debe respetar el número máximo de paradas permitidas en una macrozona.

$$\sum_{c\in C} x^k_{c,z} + \sum_{p\in P} m^k_{z,p} \leq PARADAS_z,\ \ \forall z \in Z$$

(h) Se debe respetar la lista tabú.

$$\sum_{z\in Z} x^k_{c,z} + \sum_{z\in Z} x^k_{i,z} + \sum_{z\in Z}\sum_{p\in P} y^k_{c,z,p} + \sum_{z\in Z}\sum_{p\in P} y^k_{i,z,p} \leq 1,\ \forall c \in C, \forall k \in K, \forall \{i,c\} \in T:\ i \in C$$

(i) Naturaleza de las variables de decisión.

$$x^k_{c,z} \in \{0,1\},\ \forall c \in C, \forall z \in Z, \forall k \in K$$

$$y^k_{c,z,p} \in \{0,1\},\ \forall c \in C, \forall z \in Z, \forall p \in P, \forall k \in K$$

$$u^k_z \in \{0,1\},\ \forall k \in K, \forall z \in Z$$

$$m^k_{z,p} \in \{0,1\},\ \forall z \in Z, \forall p \in P, \forall k \in K$$