PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2018
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - J.T. Marquinez - J. González

Solución Tarea 2

Fecha de Entrega: 23 de abril.

La tarea tiene un total de 63 puntos. Se necesitan solamente 60 puntos para llegar al 7.0, pudiendo obtener un 7.3 en caso de tener el puntaje máximo.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día lunes 23 de abril a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (16 puntos)

a) (4 puntos) Basado en los teoremas vistos en clase, indique si es que los siguientes problemas tienen solución óptima:

i) (2 puntos)

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & \left\{ \frac{1}{1+e^{-(x-a)^2-(y-b)^2}} \right\} \\ s.a. \quad & \\ & xy \leq 1 \\ & x, y \leq 0 \end{aligned}$$

ii) (2 puntos)

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & 3x^2 - y^2 \\ s.a. \quad & \\ & x, y \leq 0 \end{aligned}$$

b) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} P) \quad \max \quad & -e^{(\max\{3x+2, x^2+2\})} \\ s.a. \quad & \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Formule un problema equivalente a P) que sea diferenciable

c) (4 puntos) Determine si los siguientes conjuntos $H \subseteq \mathbb{R}^2$ son convexos:

i) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 5\}$

ii) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tal que; f es convexa y $g(x) = (x - x_1)\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right) + f(x_1)$ con $x_1 < x_2$. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leq y \leq g(x), x_1 \leq x \leq x_2\}$

d) (4 puntos) Usando exclusivamente la definición de convexidad o contraejemplos, determine si las siguientes funciones $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son convexas:

i) (2 puntos) $h(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 5x - 4$

ii) (2 puntos) Sean $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas y $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $\forall i = 1, \ldots, n$. $h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$

e) (2 puntos) Considere el problema de optimización $P = \{\min c^T x : x \in D\}$ con D un polítopo (poliedro acotado). Sea $\bar{x} \in D$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \bar{x}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n$, con v_i punto extremo de D $\forall i = 1, \ldots, n$. Demuestre que si $\bar{x}$ es solución óptima de P, entonces los vértices v_i $\forall i = 1, \ldots, n$ también lo son.

Solución Problema 1.

a) *i*) Considerando que el recorrido de la función es estrictamente mayor que 0 y menor que 1, la siguiente equivalencia es válida:

$$\min_{x,y} \left\{ \frac{1}{1+e^{-(x-a)^2-(y-b)^2}} \right\} \sim \max_{x,y} \left\{ 1 + e^{-(x-a)^2-(y-b)^2} \right\}$$

Ahora, como la función es estrictamenta mayor a 1 podemos aplicarle la función $g(z) = ln(z - 1)$ y el problema original se puede transformar en el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ s.a. \quad & \\ & xy \leq 1 \\ & x, y \leq 0 \end{aligned}$$

Se deben cumplir los siguientes requisitos para demostrar la existencia de soluciones por el Teorema de la Hipótesis H:

- ◇ No vacío: Origen pertenece al dominio
- ◇ F.O. continua: Es un polinomio, por lo que sí es continua
- ◇ Dominio cerrado: Sí se cumple, pues no hay ninguna restricción de desigualdad estricta
- ◇ H: $f(x,y) \to \infty$ con $\|(x,y)\| \to \infty, (x,y) \in D$

Para demostrar la última hipótesis se debe notar que si $\|(x,y)\| \to \infty$, entonces $x \to -\infty$ ó $y \to -\infty$. Sin perder generalidad se supone lo primero, es decir, $x = -t$, con $t \to \infty$ y $-\frac{1}{t} \leq y \leq 0$, con lo que $f(x,y) \to \infty$. Se puede demostrar análogamente para y.

Finalmente, se cumplen los cuatro requisitos del teorema, por lo que se demuestra que sí existe solución óptima.

ii) Este problema no tiene solución óptima. Se puede demostrar que no se cumple la hipótesis H porque cuando $y \to -\infty$, entonces $f(0,y) \to -\infty$, por lo que el problema es no acotado.

b) El problema planteado es equivalente al siguiente problema:

$$\begin{aligned} P') \quad \text{mín} \quad & e^{(\max\{3x+2, x^2+2\})} \\ s.a. \quad & \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Se puede aplicar la función $ln(\cdot)$ a la función objetivo porque es monótona creciente:

$$\begin{aligned} P'') \quad \text{mín} \quad & \max\{3x+2, x^2+2\} \\ s.a. \quad & \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P''') \quad \text{mín} \quad & \mu \\ s.a. \quad & \\ & \mu \geq 3x+2 \\ & \mu \geq x^2+2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene el problema $P''')$ con función objetivo y restricciones diferenciables.

c) *i*) Este conjunto no es convexo. Basta tomar los puntos $(6,0)$ y $(0,6)$, los cuales pertenecen a H, pero el punto $(3,3)$ que es combinación convexa de los mismos no pertenece a H.

ii) Tomando $\bar{x}_1 = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2), \bar{x}_2 = (\bar{x}_2^1, \bar{x}_2^2) \in H$ y $\hat{x} : \lambda\bar{x_1} + (1-\lambda)\bar{x_2} = \hat{x}, 0 \leq \lambda \leq 1$. Para demostrar la convexidad de H se debe comrpobar que $\hat{x} \in H$. En primer lugar, se debe notar que g(x) es una recta que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$, por lo que el siguiente desarrollo es válido:

$$\lambda\bar{x}_1^2 + (1-\lambda)\bar{x}_2^2 \leq \lambda g(\bar{x}_1^1) + (1-\lambda)g(\bar{x}_2^1) \leq g(\lambda\bar{x}_1^1 + (1-\lambda)\bar{x}_2^1) = g(\hat{x})$$

Con lo que se demuestra que $\hat{x}_2 \leq g(\hat{x}_1)$, haciendo uso de la concavidad no estricta de las funciones lineales en la última desigualdad. Ahora, se debe demostra que $f(\hat{x}_1) \leq \hat{x}_2$:

$$\lambda\bar{x}_1^2 + (1-\lambda)\bar{x}_2^2 \geq \lambda f(\bar{x}_1^1) + (1-\lambda)f(\bar{x}_2^1) \geq f(\lambda\bar{x}_1^1 + (1-\lambda)\bar{x}_2^1) = f(\hat{x})$$

Con lo que se demuestra lo pedido, usando la convexidad de f en la última desigualdad. Finalmente, se comprueba que $f(\hat{x}_1) \leq \hat{x}_2 \leq g(\bar{x}_1)$, i.e., $\bar{x} \in H$ y H es convexo.

d) *i)* La función sí es convexa. Para comprobar esto, se debe demostrar que la siguiente inecuación es válida:

$$\lambda h(x_1, y_1) + (1-\lambda)h(x_2, y_2) \geq h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$. Reemplazando:

$$\lambda(2x_1^2 + 3y_1^2 - 5x_1 - 4) + (1-\lambda)(2x_2^2 + 3y_2^2 - 5x_2 - 4) \geq$$
$$2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 + 3(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)^2 - 5(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - 4$$

Restando los términos lineales:

$$\begin{aligned} \lambda(2x_1^2 + 3y_1^2) + (1-\lambda)(2x_2^2 + 3y_2^2) &\geq 2(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 + 3(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)^2 \\ \lambda(1-\lambda)\left(2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 3y_1^2 - 6y_1y_2 + 3y_2^2\right) &\geq 0 \\ \lambda(1-\lambda)\left[2(x_1 - x_2)^2 + 3(y_1 - y_2)^2\right] &\geq 0 \end{aligned}$$

La última desigualdad es necesariamente válida, pues la suma de términos cuadráticos es siempre positiva. Finalmente, se demuestra la convexidad de h por definición.

ii) $h(x)$ no es convexa. Basta tomar como contraejemplo $f(x) = x^2, \alpha = -1$, con lo que $h(x) = -x^2$ que no es convexa.

e) Se puede demostrar lo pedido por contradicción. Sea v_j punto extremo de D, tal que $\lambda_j > 0$ y $c^T v_j > c^T \bar{x}$. Por enunciado, se sabe que $\bar{x}$ es solución óptima, es decir, $c^T v_i \leq c^T \bar{x}, \forall i = 1, \ldots, n$. Entonces, se tiene:

$$c^T \bar{x} = c^T \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c^T v_i \geq (1-\lambda_j)c^T \bar{x} + \lambda_j c^T v_j > (1-\lambda_j)c^T \bar{x} + \lambda_j c^T \bar{x} = c^T \bar{x}$$

Claramente, se llega a una contradicción pues $c^T \bar{x} > c^T \bar{x}$, con lo que se demuestra que si $\lambda_j > 0$ entonces v_j necesariamente es solución óptima.

Problema 2. (16 puntos)

a) (6 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcc} P) & \text{máx} & x_1 + x_2 & \\ s.a. & & & \\ & -2x_1 + 5x_2 & \geq & 0 \\ & x_1 + 4x_2 & \leq & 16 \\ & 4x_1 - 3x_2 & \leq & 7 \\ & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & \textit{irrestricta} \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

i) (3 puntos) Grafique el problema e identifique la región factible. Encuentre la solución al problema mediante el uso del gráfico que ha dibujado. ¿Qué restricciones están activas en el óptimo?

ii) (2 puntos) Suponga que el lado derecho de la cuarta restricción fuera b_4. Explique qué pasa con la solución óptima para cualquier valor de b_4 (no el valor óptimo de la F.O.), e indique para qué rango de valores de b_4 cada restricción estaría activa.

iii) (1 puntos) Si se agrega la restricción $x_1 \geq 0$, ¿cambiaría el óptimo del problema? Explique qué particularidad tendría el origen y encuentre las bases factibles que lo describen.

b) (10 puntos) Comente sobre la veracidad de las siguientes aseveraciones. Justifique por qué considera cada una verdadera o falsa.

i) (2 puntos) El algoritmo Simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo, considerando que sólo puede entrar una variable a la base y salir otra

ii) (2 puntos) En el óptimo de un problema de Simplex Fase I, las variables artificiales deben ser nulas para que la solución sea factible

iii) (1 punto) Dado un problema P) en forma estándar, y sea x^* un punto extremo para P), en el que no todos los costos reducidos son $\bar{c} \geq 0$, entonces x^* no es óptimo del problema

Para las siguientes afirmaciones considere el problema de forma estándar $P = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, con la matriz $A \in R^{mxn}$ de rango completo.

iv) (2 puntos) Si $n = m + 1$, entonces P posee a lo más dos soluciones básicas factibles.

v) (2 puntos) Toda solución óptima posee a lo más m componentes distintas de cero.

vi) (1 punto) El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.

Solución Problema 2.

a) *i*) El gráfico del problema queda de la siguiente forma, siendo el espacio factible la región de color azul:

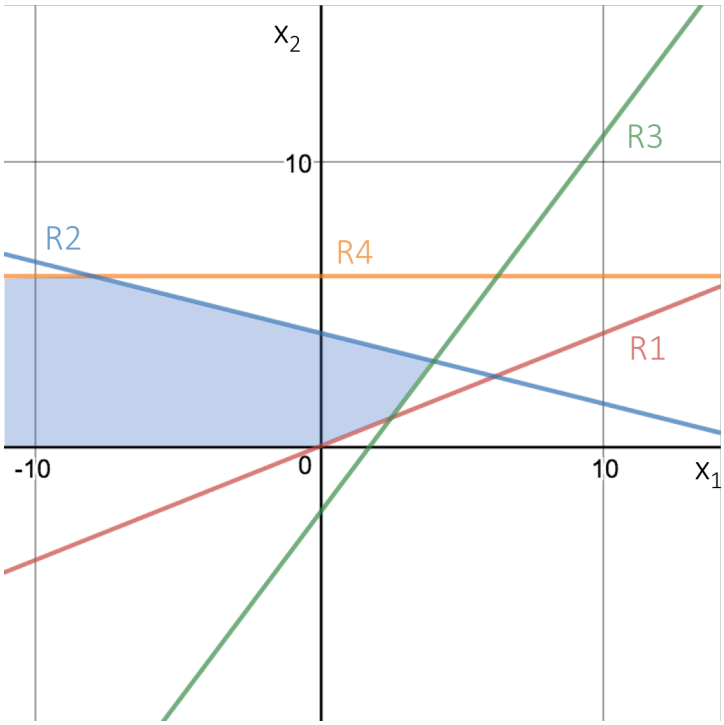


Figura 1: Gráfico P)

Utilizando el gradiente de la función objetivo, encontramos que el óptimo del problema es el punto $(4, 3)$, dado por la intersección de las restricciones 2 y 3, las que son las restricciones activas en el punto óptimo.

ii) A continuación se presentan rangos para valores del lado derecho de la cuarta restricción, b_4:

- Para valores de $b_4 > 3$ la restricción 4 está inactiva y no afecta el valor de la F.O. encontrado en *i*). En este caso las restricciones activas son la 2 y la 3.
- Si $b_4 = 3$ la restricción está activa en el óptimo, pero este se mantiene en $(4, 3)$, convirtiéndose en un punto degenerado, en el que las restricciones activas son $R2, R3$ y $R4$.

- ◇ Para el rango $1 < b_4 < 3$ el valor de la función objetivo cambia y va a estar dado por la intersección de las restricciones $R3$ y $R4$.
- ◇ Si $b_4 = 1$ el punto óptimo será $(5/2, 1)$. Punto degenerado en el que están activas las restricciones $R1, R3$ y $R4$.
- ◇ Para el rango $0 < b_4 < 1$ el valor de la F.O. cambia a la intersección entre las restricciones $R4$ y $R1$.
- ◇ Si $b_4 = 0$ el óptimo es el punto $(0, 0)$. Además, este punto conforma todo el espacio factible de P).
- ◇ Para $b_4 < 0$ el problema es infactible.

iii) Al agregar la restricción $x_1 \geq 0$ no cambia el óptimo del problema y el origen será un punto degenerado. Esto se puede ver gráficamente ya que el punto $(0, 0)$ está formado por la intersección de los dos ejes y una restricción. Este punto está descrito por 3 bases, las que se presentan a continuación:

- ◇ Base 1 : $x_B = (x_1, x_3)$; $x_R = (x_2, x_4, x_5, x_6)$
- ◇ Base 2 : $x_B = (x_2, x_3)$; $x_R = (x_1, x_4, x_5, x_6)$
- ◇ Base 3 : $x_B = (x_1, x_2)$; $x_R = (x_3, x_4, x_5, x_6)$

Donde x_3 es la variable de exceso de la restricción 1 y x_4, x_5 y x_6 las variables de holgura asociadas a las restricciones 2, 3 y 4 respectivamente. Estas 3 bases son factibles, ya que se puede ver en el gráfico del apartado *i)* que pertenecen a la región factible de P), considerando la restricción agregada.

b) i) Falso. El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra a la base es aquella que tiene el menor costo reducido (dentro de aquellos que son menores a 0). Se utiliza esta convención porque trae el mayor mejoramiento local, lo que no significa que sea la variable que mejore más la función objetivo.

ii) Verdadero. Para que la solución del Problema de Simplex Fase I sea factible, las variables artificiales deben estar fuera de la base óptima (que es la base factible inicial del Problema de Simplex). Si están fuera de la base, son variables no básicas, por lo que su valor es cero.

iii) Incierto. Para soluciones no degeneradas es verdadero. Para soluciones degeneradas, puede ocurrir que haya una base asociada al punto óptimo x^*, pero que esta no sea la base óptima, por lo que alguno de los costos reducidos asociados a esta base será negativo. Esto hará que el algoritmo siga iterando hasta encontrar la base óptima asociada al punto x^*.

iv) Verdadero. Como P está en forma estándar, tiene al menos un punto extremo v_0. Si no existen más punto extremos, el resultado es verdadero. Veamos el caso de que hayan más puntos extremos. Sea v_i otro punto extremo. Definamos $d_1 = v_0 - v_1$, d_i satisface $Ad_1 = 0$, pero la dimensión de $\{d : Ad = 0\} = n - m = 1$, por lo que existe $d_0 \neq 0$ tal que $d_i = \alpha_i d_0$ para cualquier d_i. Sea $\alpha_\infty = max\{\alpha_i : v_i \text{ es punto extremo}\}$, y sea v_∞ donde se alcanza el máximo. Entonces si $\alpha_i < \alpha_\infty$, tenemos que v_i no es punto extremo por ser combinación convexa de v_0 y v_∞. Esto implica que $\alpha_i = \alpha_\infty \ \forall i$, por lo que $|\{v_i : v_i \text{ es punto extremo}\}| = 2$.

v) Falso. Basta considerar:

$$\begin{aligned} & \text{máx} && x_1 + x_2 \\ s.a. & && \\ & && x_1 + x_2 \leq 1 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El punto $(1/2, 1/2)$ es óptimo y posee más de una componente no cero.

vi) Falso. Basta considerar $P = \{x \in R^n_+\}$ y minimizar $z = -e_i$, donde e_i es el i-ésimo vector canónico. En este caso, el conjunto óptimo son los $\{x \in R^n_+ : x_i = 0\}$, que es no acotado.

Problema 3. (15 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \qquad \text{máx} \qquad 2x_1 + 4x_2 - 3x_3$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 & \geq & 2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) (1 puntos) Plantee P) en su forma estándar.

b) (5 puntos) Utilizando Simplex Fase I determine si es que 25 es una cota mínima válida para la función objetivo de P).

c) (1 puntos) Demuestre que la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ es factible (sin usar Fase I), pero no es el óptimo de P).

d) (5 puntos) Resuelva P) con el método Simplex Fase II matricial, usando como base inicial la entregada en *c*). Indique la solución y el valor óptimo de la función objetivo.

e) (1 punto) ¿Cuánto puede cambiar el lado derecho de cada restricción sin que la base óptima cambie?

f) (2 puntos) ¿En qué rangos pueden moverse los coeficientes de x_1 y x_2 en la F.O., de tal forma que la solución no cambie? Analice cada coeficiente por separado.

Solución Problema 3.

a) Primero, se debe desagregar x_3 en dos variables tal que $x_3 = x_3^+ - x_3^- : x_3^+, x_3^- \geq 0$. Entonces, el problema en su forma estándar quedará:

$$P') \qquad \text{mín} \qquad -2x_1 - 4x_2 + 3x_3^+ - 3x_3^-$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3^+ - x_3^- + h_1 & = & 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- - h_2 & = & 2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- + h_3 & = & 4 \\ x, h & \geq & 0 \end{array}$$

b) El problema a resolver con Fase I será:

$$\text{mín} \qquad t_1 + t_2$$

$$s.a.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$x, h, t \geq 0$$

La base inicial está a la vista y equivale a la base h_1, h_3, t_1, t_2:

$$B_I^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_I^0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$(B_I^0)^{-1} R_I^0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (B_I^0)^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B_I^0\right)^{-1} R_I^0 = \vec{0} - (5, 3, -1, 1, -1, -1) = (-5, -3, 1, -1, 1, 1)$$

Los costos reducidos de x_1, x_2 y x_3^- son negativos, por lo que alguna de estas debe entrar a la base. Arbitrariamente, se elegirá x_3^-.

Iteración 1:

Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable t_2. Calculando nuevamente:

$$B_I^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_I^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$(B_I^1)^{-1} R_I^1 = \begin{bmatrix} 2/3 & 4/3 & -1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 8/3 & 7/3 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 11/3 & 0 & 0 & -2/3 & 2/3 \\ 13/3 & 5/3 & 0 & -1 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (B_I^1)^{-1} b = \begin{pmatrix} 25/3 \\ 34/3 \\ 62/3 \\ 56/3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B_I^1\right)^{-1} R_I^1 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) - (13/3, 5/3, 0, -1, -2/3, 2/3) = (-13/3, -5/3, 0, 1, 2/3, 1/3)$$

Los costos reducidos de x_1 y x_2 son negativos, por lo que alguna de estas debe entrar a la base. Arbitrariamente, se elegirá x_1.

Iteración 2:

Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable h_1. Calculando nuevamente:

$$B_I^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$(B_I^2)^{-1} R_I^2 = 1/8 \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & -8 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 34 & 0 & 2 & 0 & -6 & 6 \\ -17 & 0 & -13 & -8 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (B_I^1)^{-1} b = \begin{pmatrix} 17/4 \\ 11/2 \\ 47/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B_I^2\right)^{-1} R_I^2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) - 1/8(-17, 0, -13, -8, -1, 1) = (17/8, 0, 13/8, 1, 1/8, 1/8)$$

Todos los costos reducidos son positivos, por lo tanto, se está en el óptimo. Finalmente, se obtiene que el valor óptimo del problema P') es $1/4$, por lo que 25 es una cota mínima inválida para el valor de la función objetivo del problema original, pues no se pudo encontrar ninguna solución que satisfaga lo

pedido. Por otro lado, sí se puede asegurar que el óptimo de P) nunca alcanzará dicha cota.

c) Primero, se debe ver si la base es factible:

$$B^0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R^0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(B^0)^{-1}R^0 = 1/17 \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 6 & 1 \\ -17 & -1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad (B^0)^{-1}b = 1/17 \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \\ 25 \end{pmatrix}$$

De esto, se puede ver que el punto sí es factible pues cumple con todas las restricciones de no negatividad. (Si $\bar{b_3}$ hubiera resultado negativa, significa que x_3^- debiera haber estado en la base). Ahora, para demostrar que no es el óptimo se deben calcular los costos reducidos:

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^0\right)^{-1} R^0 = (-3,0,0,0) - (-51,-48,-34,17) = (48,48,34,-17)$$

El costo reducido de la variable h_3 es negativo, con lo que se demuestra que no se está en el óptimo de P)

d) Usando como punto de partida la base calculada en *c*). Se debe agregar la variable x_3^- a la base, y la variable x_3 debe salir por el criterio del mínimo cuociente.

Iteración 1:

Calculando nuevamente:

$$B^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(B^1)^{-1}R^1 = 1/5 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 17 & -17 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad (B^2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^1\right)^{-1} R^1 = (3,-3,0,0) - (-2,2,-14,-6) = (5,-5,14,6)$$

El costo reducido de x_3^- es negativo, por lo que esta variable debe entrar a la base.

Iteración 2:

Según el criterio del mínimo cuociente debe salir la variable x_2. Calculando nuevamente:

Calculando nuevamente:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(B^2)^{-1}R^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ 17 & 0 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad (B^2)^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - c_b^T \left(B^2\right)^{-1} R^2 = (-4,3,0,0) - (-21,3,-10,-8) = (17,0,10,8)$$

Finalmente, los costos reducidos son positivos, por lo que se está en el óptimo. Reconstruyendo la solución se obtiene que el óptimo es: $(x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, h_1, h_2, h_3) = (4,0,0,5,0,0,22)$, y en términos de las variables originales $(x_1, x_2, x_3) = (4,0,-5)$. Por lo tanto, el valor óptimo de la F.O es 23.

e) Para hacer un análisis de sensibilidad en el lado derecho, es necesario calcular la base de la solución y su inversa:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

δ será el cambio que puede aumentar el lado derecho de cada restricción sin que cambie la base.

- ◇ Restricción (1):

$$\left.\begin{array}{c} 2\delta \geq -4 \\ 3\delta \geq -5 \\ 10\delta \geq -22 \end{array}\right\} \longrightarrow -\frac{5}{3} \leq \delta$$

- ◇ Restricción (2):

$$\left.\begin{array}{c} -1\delta \geq -4 \\ -2\delta \geq -5 \\ -6\delta \geq -22 \end{array}\right\} \longrightarrow \delta \leq \frac{5}{2}$$

- ◇ Restricción (3):

$$\delta \geq -22\} \longrightarrow -22 \leq \delta$$

f) Se supondrá que δ es la variación de cada coeficiente.

- ◇ Variable x_1: Esta es una variable básica en la solución, por lo que obviamente el valor de la función objetivo cambiará, pero la solución no cambiará mientras δ cumpla $\bar{c}_R \geq \delta\eta_1$ siendo η_1 la primera fila de $B^{-1}R$ y B la base óptima de P). Finalmente, para que la base no cambie se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{c} 17 \geq 3\delta \\ 0 \geq 0 \\ 10 \geq 2\delta \\ 8 \geq \delta \end{array}\right\} \longrightarrow \delta \leq 5$$

  Considerando que los costos en el problema estándar fueron multiplicados por -1, entonces el coeficiente original de x_1 no debe disminuir más de 5 unidades.

- ◇ Variable x_2: Esta es una variable no básica en la solución, por lo que no cambiarán el valor de la función objetivo ni la solución mientras δ cumpla $\delta \geq -\bar{c}_2$. Finalmente, para que la solución se mantenga se debe cumplir:

$$\delta \geq -17$$

  Sin embargo, recordemos que también se cambió el signo al coeficiente al estandarizar el modelo, por lo que en la función objetivo original, mientras el coeficiente no aumente más de 17 unidades, se mantendrá la solución.

Problema 4. (16 puntos)

a) (10 puntos) Suponga que usted está en la final del mundial de *Catón*, un juego de mesa que consiste en construir aldeas, puentes y castillos, y cuyo objetivo es llegar a los 10 puntos de victoria antes que su contrincante. En el juego existen 3 tipos de materia prima; chanchos, palos y rocas, las cuales son necesarios para construir cualquiera de las 3 cosas antes mencionadas. Cada tipo de construcción tiene sus propios requerimientos de materias primas, los cuáles se explican en la siguiente tabla:

Construcción\ Materia Prima	*Chanchos*	*Palos*	*Rocas*
Castillo	0	2	3
Aldea	1	1	2
Puente	1	1	0

Esta final es una modalidad uno contra uno, por lo que sólo tiene un contrincante en el juego, el cual con seguridad ganará en la *N-ésima* jugada (no antes) si es que usted no ha ganado antes (es su estilo de juego). Asuma que el contrincante nunca le interrumpirá su juego ni lo obstaculizará en el tablero, en otras palabras, usted siempre podrá construir lo que quiera (usando las materias primas respectivas). La dinámica del juego es que cada jugador en su turno tira un dado y dependiendo de lo que haya salido, ambos reciben ciertas materias primas. Luego de tirar los dados puede hacer sus construcciones, o puede esperar dos tiradas más (la del contrincante y la suya) para construir después. En su caso particular, usted recibe n_p^k unidades de la materia prima p si es que sale el número k (independiente de quién lo haya tirado), $\forall p \in P = \{Chanchos, Palos, Rocas\}, \forall k \in K = \{1, \ldots, 6\}$.

Para construir debe tener ciertas consideraciones; los castillos sólo se pueden construir sobre una aldea ya construida (puede haber sido construida en el mismo turno) y las aldeas sólo se pueden construir por cada 2 puentes, por ejemplo, si tiene 4 puentes construidos entonces puede tener máximo 3 edificios (aldeas o castillos) construidos y si quiere construir otra aldea debe construir dos puentes más. Asuma que parte el juego con una aldea, dos puentes y ninguna carta de materia prima. Cada aldea le da 1 un punto y cada castillo 2, entonces si tiene 1 aldea, 1 castillo y 2 puentes tendrá 3 puntos. Por otro lado, existe un premio de 2 puntos al que tenga el camino de puentes más largo (siempre y cuándo tenga un largo de al menos 5 puentes), en caso de empate en largo entre los contrincantes el premio lo tendrá aquél que haya construido el camino primero. Usted sabe que su contrincante construye un puente por turno.

En este juego existe una regla de que usted no puede terminar su jugada con más de 7 cartas de materia prima en la mano, o sino pierde automáticamente. Por último, mediante un sorteo se determinó que usted parte jugando. Considerando todo lo anterior, construya un modelo de optimización lineal entero que encuentre la menor cantidad de jugadas en la que usted pueda ganar y cuál es esa jugada. Debe tener en cuenta que usted no sabe los números que saldrán en cada tirada, pero Por simplicidad, puede asumir que siempre habrá una jugada ganadora posible antes de la *N-ésima*.

Nota 1: Este juego puede tener ciertas similitudes con otro juego, pero no debe confundir algunas reglas particulares: el tablero es un camino lineal en el que sólo tiene una opción para seguir construyendo y los castillos y aldeas no aumentan la probabilidad de obtener cartas de materia prima

Nota 2: Se está pidiendo encontrar alguna configuración de jugada posible, tal que gane en la menor cantidad de jugadas independiente de la probabilidad (de hecho, esta puede ser ínfima, pero mayor a 0)

b) (8 puntos) Para responder las siguientes preguntas, debe leer el paper "Design of a Single Window System for E-Government Services: The Chilean Case" subido en la página del curso[3]

i) (1.5 puntos) Defina el concepto de Ventanillas Únicas utilizado por los autores.

ii) (1.5 puntos) ¿Qué relaciona el problema presupuestario entre los diferentes servicios públicos?

iii) (1.5 puntos) ¿Qué es lo que hace concretamente la restricción (7)?

iv) (1.5 puntos) Describa la solución entregada para el Caso 2 presentado por los autores.

Solución Problema 4.

a) Cojuntos:

$$C = \{Castillo, Aldea, Puente\} : \text{Conjunto de construcciones posibles}$$

Parámetros:

$$d_p^c\text{: Cantidad necesaria de la materia } p \text{ para construir } c$$

[3]Cataldo, A., Ferrer, J., Rey, P., & Sauré, A. (2018). Design of a Single Window System for E-Government Services: The Chilean Case. Journal of Industrial and Management Optimization, 14(2), 561-582. http:// doi: 10.3934/jimo.2017060.

Variables de decisión:

$$\alpha_k^n = \begin{cases} 1 & \text{Si sale el número } k \text{ en la tirada } n \text{ del dado.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$z_c^j = \text{Cantidad de construcciones } c \text{ que se construyen en la jugada } j.$$

$$I_p^j = \text{Inventario de la materia prima } p \text{ al principio de la jugada } j$$

$$y^j = \begin{cases} 1 & \text{Si tiene el camino más largo al final de la jugada } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\omega^j = \begin{cases} 1 & \text{Si llega a los 10 puntos en la jugada } j. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín} \sum_{j=1}^{N} j\omega^j$$

s.a.

(1) Sólo se gana una vez:

$$\sum_{j=1}^{N} \omega^j = 1$$

(2) En cada tirada debe salir sólo un número:

$$\sum_{k \in K} \alpha_k^n = 1 \qquad \forall n = 1, \ldots, 2N-1$$

(3) Ecuaciones de continuidad de las materias primas:

$$I_p^{j+1} = I_p^j + \sum_{k \in K} n_p^k (\alpha_k^{2j} + \alpha_k^{2j-1}) - \sum_{c \in C} z_c^j d_p^c \qquad \forall j = 1, \ldots, N, \forall p \in P$$

(4) Los castillos sólo se pueden construir sobre una aldea:

$$\sum_{j'=1}^{j} z_{castillo}^{j'} \leq \sum_{j'=1}^{j} z_{aldea}^{j'} \qquad \forall j = 1, \ldots, N$$

(5) Las aldeas sólo se pueden construir cada 2 puentes:

$$2(\sum_{j'=1}^{j} z_{aldea}^{j'} - 1) \leq \sum_{j'=1}^{j} z_{puente}^{j'} \qquad \forall j = 1, \ldots, N$$

(6) No se puede terminar una jugada con más de 7 cartas:

$$\sum_{c \in C} I_p^j + \sum_{k \in K} n_p^k (\alpha_k^{2j-1}) \leq \sum_{j'=1}^{j} z_{puente}^{j'} \qquad \forall j = 1, \ldots, N$$

(7) El premio por el camino más largo sólo se puede ganar con al menos 5 puentes (se parte con 2):

$$\sum_{j'=1}^{j} z_{j'}^{puente} \geq 3y^j \qquad \forall j = 1, \ldots, N$$

(8) Condiciones para ganar el premio por el camino más largo:

$$\sum_{j'=1}^{j} z_{j'}^{puente} + M(1 - y^j) \geq j - 1 + \frac{z_j^p uente}{M} \qquad \forall j = 1, \ldots, N$$

Siendo M un número muy grande

(9) Condición de victoria:

$$\sum_{j'=1}^{j} (z_{j'}^{castillo} + z_{j'}^{aldea}) + y^j \geq 9 - 9(1 - \omega^j) \qquad \forall j = 1, \ldots, N$$

(10) Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned}
\alpha_k^n &\in \{0, 1\} && \forall k \in K, \forall n \in \{1, \ldots, 2N - 1\} \\
z_c^j &\in \mathbb{N}_0 && \forall c \in C, \forall j \in N \\
I_c^j &\in \mathbb{N}_0 && \forall c \in C, \forall j \in N \\
y_j, \omega^j &\in \{0, 1\} && \forall j \in N
\end{aligned}$$

b) *i)* Se refiere al sistema que organiza la provisión (entrega) de trámites públicos en un "único instante presencial" a los ciudadanos.

ii) Que las decisiones de incluir un trámite público en un sistema de ventanillas están "ligadas", por lo que el problema no es separable por servicio público. Esto llevó a la Subsecretaria General de la Presidencia a considerar un presupuesto global, que se administraría en esta institución pública, y que relaciona a todas las decisiones que incluyan presupuesto.

iii) La restricción (7) impide que se habiliten tecnologías que legalmente no están permitidas para "entregar" trámites. En caso que se quiera ejecutar un trámite con una tecnología que no está habilitada para ese trámite, se debe gestionar legalmente esta posibilidad.

iv) La solución entregada en este caso asume condiciones presupuestarias (no así el caso 1), y propone la inclusión de 111 trámites públicos al sistema de ventanillas únicas, y la actualización de otros 129 en cuanto a la tecnología con que se ejecutan (pero no su ingreso al sistema de ventanillas únicas). Finalmente, se obtuvo una solución que es 1.85 veces más grande en términos del valos de la función objetivo respecto al caso 1.