PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial

Curso: Optimización
Semestre: 02-2011
Profesores: Claudia Prieto - Alejandro Cataldo
Mathias Klapp - Germán Paredes

Pauta Interrogación 1

Duración: 2 horas con 15 minutos.

Se debe contestar cada pregunta en cuadernillos separados, y en cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras programables y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Parte A (7 puntos)

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{P) min} & x+y \\ \text{s.a :} & x,y \in D \end{array}$$

con $D = A \cap (B \cup C)$. Donde

$$\begin{array}{l} A = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1.2\} \\ B = \{(x,y) : |x| \geq 1\} \\ C = \{(x,y) : |y| \geq 1\} \end{array}$$

i) (2 puntos) Demuestre formalmente que el problema P) admite solución óptima.

ii) (3 puntos) Resuelva gráficamente el problema P). Sea explícito en entregar la solución y el valor óptimo.

iii) (2 puntos) Argumente si el problema es o no convexo.

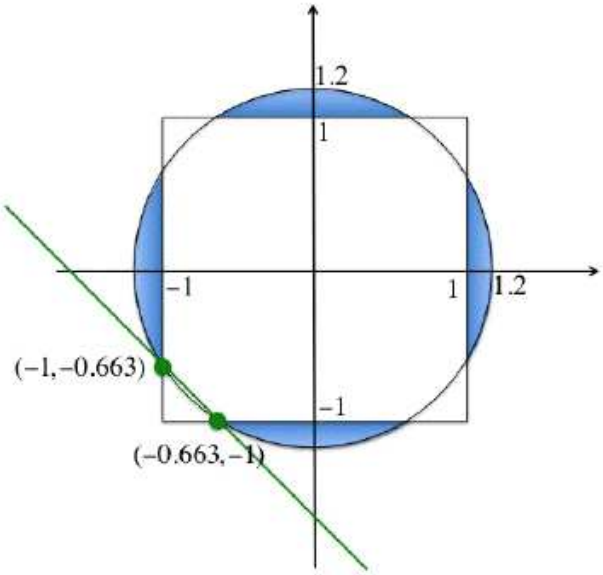
Pauta Parte A (7 puntos)

i) **(2 puntos $\mapsto$ 0.4 por condición y 0.4 por la conclusión)** Para demostrar que P) admite solución óptima usamos el teorema de Bolzano-Weierstrass. En este caso se tiene:

- $\diamond$ La función $f(x,y) = x+y$ es continua (polinomio de primer grado).
- $\diamond$ El dominio D es no vacío, ya que $(x_0, y_0) = (0,1) \in D$.
- $\diamond$ El dominio D es cerrado, ya que esta definido por desigualdades amplias (del tipo $\leq$, $\geq$, $=$).
- $\diamond$ El dominio D es acotado, $-1.2 \leq x \leq 1.2$, $-1.2 \leq y \leq 1.2$.

Por lo tanto, por Teorema de Bolzano-Weierstrass el problema admite solución óptima.

ii) (3 puntos) El siguiente gráfico **(1.5 puntos por el gráfico)** muestra el espacio de soluciones factibles del problema:



Resolviendo gráficamente se obtiene que $x_1^* = (-1, -0.663)$ y $x_2^* = (-0.663, -1)$ **(1.0 punto por la solución)**con valor óptimo $z^* = -1.663$ **(0.5 puntos por el valor óptimo)**.

iii) (2 puntos) Para que el problema sea convexo la función objetivo $f(x, y)$ y el dominio D deben ser convexos. La función $f(x, y)$ es convexa sin embargo el dominio D no lo es **(1.0 punto por argumentar hasta acá)**. Basta argumentar con el gráfico que D no es convexo, para esto basta con dar un contra ejemplo como que $x_1 = (0, 1) \in D$ y $x_2 = (0, -1) \in D$ y sin embargo el segmento dado por $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \notin D, \lambda \in [0, 1]$ **(1.0 puntos por argumentar que D no es convexo)**.

Parte B (6 puntos)

El gerente de una refinería de petróleo tiene 8 millones de barriles de crudo A y 5 millones de barriles de crudo B disponibles para producción durante el próximo mes. Estos recursos pueden ser usados para hacer gasolina, la cual se vende a \$38 por barril, o gas licuado, el cual se vende a \$33 por barril. Para producir gasolina y gas licuado se dispone de tres procesos de producción con las siguientes características:

	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3
Entrada de crudo A	3	1	5
Entrada de crudo B	5	1	3
Salida de gasolina	4	1	3
Salida de gas licuado	3	1	4
Costo	\$51	\$11	\$40

Todas las cantidades están en barriles. Por ejemplo, en el primer proceso se usan 3 barriles de crudo A y 5 barriles de crudo B para producir 4 barriles de gasolina y 3 barriles de gas licuado. Los costos asociados a cada proceso se especifican en la tabla anterior. Formule un modelo de Programación Lineal que ayude al gerente a maximizar su ganancia neta durante el próximo mes.

Pauta Parte B (6 puntos)

a) Variables de decisión **(1.5 puntos por todas las variables)**:

Sea p_i el número de ciclos de producción del proceso i con $i = 1, 2, 3$.

b) Función Objetivo **(1.5 puntos)**:

$$38(4p_1 + p_2 + 3p_3) + 33(3p_1 + p_2 + 4p_3) - 51p_1 - 11p_2 - 40p_3 = 200p_1 + 60p_2 + 206p_3$$

$$\Rightarrow \text{máx}\, 200p_1 + 60p_2 + 206p_3$$

c) Restricciones **(1.0 punto por cada restricción)**:

$$\begin{array}{lcll} 3p_1 + p_2 + 5p_3 & \leq & 8 \times 10^6 & (1) \\ 5p_1 + p_2 + 3p_3 & \leq & 5 \times 10^6 & (2) \\ p_1, p_2, p_3 & \geq & 0 & (3) \end{array}$$

Parte C (7 puntos)

Suponga el siguiente problema de optimización no lineal con "n" variables y "m" restricciones.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \frac{a}{\prod_{i=1}^{n} e^{-c_i x_i}} + b \\ s.a: & \\ & \left| \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i \right| \leq e_j \ \ \forall j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Donde $a < 0$, $b, c_i > 0$, d_{ij}, e_j son parámetros del problema. Encuentre un problema lineal equivalente.

Pauta Parte C (7 puntos)

Primero eliminamos la constante b y como $a < 0$ se tiene el siguiente modelo equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} e^{-c_i x_i}} \\ s.a: & \\ & \left| \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i \right| \leq e_j \ \ \forall j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

como el denominador es siempre positivo, el modelo es equivalente al siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \prod_{i=1}^{n} e^{-c_i x_i} \\ s.a: & \\ & \left| \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i \right| \leq e_j \ \ \forall j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

ahora, aplicando el logaritmo natural sobre la función objetivo (función monótona creciente sobre el recorrido de la función objetivo) el modelo anterior queda:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^{n} -c_i x_i \\ s.a: \quad & \\ & \left| \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i \right| \leq e_j \ \ \forall j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

finalmente, como $c_i > 0$ se termina de linealizar la función objetivo **(esto vale 5 puntos)**. Ahora, linealizando la restricción **(esto vale 2 puntos)**, se tiene el siguiente modelo equivalente:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.a: \quad & \\ & \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i \leq e_j \ \ \forall j = 1, \ldots, m. \\ & \sum_{i=1}^{n} d_{ij} x_i \geq -e_j \ \ \forall j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

NOTA: cualquier modelo lineal equivalente es válido, acá se ha entregado uno de los que pueden construirse.

Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A (10 puntos)

Las siguientes preguntas son independientes entre sí.

a) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \alpha x + \beta y & \\ \text{s.a}: \quad & & \\ & 2x + 4y & \leq 8 \\ & 4x + y & \leq 5 \\ & x, y & \geq 0 \end{aligned}$$

Si se sabe que $x^* = (1, 1)$ es solución óptima del problema, qué valores pueden tomar α y β.

Pauta Parte A - a) (2 puntos)

La solución óptima $x^* = (1, 1)$ no corresponde a un vértice, por lo que el problema debe tener múltiples soluciones. Dado que x^* satisface la restricción (2) en igualdad, basta definir la función objetivo con la misma pendiente que (2), por lo tanto α y β deben satisfacer que $\alpha/\beta = 4$, por ejemplo $\alpha = 8$ y $\beta = 2$.

b) (2 puntos) ¿Tiene sentido definir un problema de programación lineal de la siguiente forma?

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & c^T x & \\ \text{s.a}: \quad & & \\ & Ax & \geq b \\ & x & \geq 0 \end{aligned}$$

En donde c^T, A, b son parámetros no negativos.

Pauta Parte A - b) (2 puntos)

Considerando que A, b y c^T son valores no negativos, se visualiza que las variables x pueden tomar valores infinitamente grandes y se cumplirían las restricciones del problema, por lo que las soluciones del problema tenderían a infinito. Claramente este problema no tiene sentido definirlo así, ya que el objetivo de las restricciones es limitar el crecimiento infinito de la función objetivo, lo que tiene sentido en la vida real. Por ejemplo, si el objetivo es maximizar ganancias en una empresa, siempre van a existir limitantes que impiden el crecimiento infinito de las ganancias (arriendos, restricciones presupuestarias, costos, horas hombre, capacidad de las máquinas, capacidad de transporte y mantenciones entre otras cosas).

c) (3 puntos) Demuestre formalmente que si la solución óptima de un problema de optimización lineal en variables continuas se encuentra en el interior del espacio de soluciones factibles de ese problema, entonces el vector c que acompaña a las variables en la función objetivo debe ser necesariamente nulo ($\vec{c} = \vec{0}$).

Pauta Parte A - c) (3 puntos)

Sea x^* la solución óptima de un problema P), que sin pérdida de generalidad asumiremos de minimización (de programación lineal), y esta solución se encuentra en el interior del poliedro (D) de soluciones factibles. Entonces se debe cumplir que $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in D$. Pero sabemos que al estar en un punto interior podemos desplazarnos en todas las direcciones, particularmente en la dirección de máximo descenso (la dada por $\nabla f(x)$). Luego, existe un $\epsilon > 0$ que asegura que existe un nuevo punto $\bar{x} = x^* + \nabla f(x^*)\epsilon$ que también pertenece a D. Ahora, para mantener la hipótesis de que x^* es solución óptima de P) se requiere que $f(x^*) \leq f(\bar{x})$. Pero por construcción de $\bar{x}$ se tiene que $f(x^*) \geq f(\bar{x})$. En consecuencia, para que tanto la hipótesis se sostenga y la teoría de punto interior para problemas lineales en variables continuas no se contradiga, se debe cumplir que $f(x^*) = f(\bar{x})$, y para que esto pase $x^* = \bar{x}$, lo que se inválida por la construcción de $\bar{x}$, o que la función objetivo es constante y entonces $\vec{c} = \vec{0}$.

d) (3 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{máx } c^T x \\ &\text{s.a. } Ax \leq b \end{aligned}$$

Cuyo dominio D es no acotado. Si $h = (-1, 3)$ es su único *rayo de escape* tal que $Ah \leq 0$ y se sabe que D posee al menos un vértice, qué valores puede tomar el vector c para que el problema tenga solución óptima.

HINT: Un rayo de escape es un vector r tal que si x es parte del dominio, entonces $x + m \cdot r$ también lo es (m un escalar no negativo).

Pauta Parte A - d) (3 puntos)

Dado que estamos maximizando se debe tener que $c^T h \leq 0$, luego $c = (c_1, c_2)$ tal que $3c_2 \leq c_1$.

Parte B (10 puntos)

Dado el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & Z = 20x_1 + \alpha x_2 & \\ \text{s.a :} & & \\ & 2x_1 - x_2 & \geq 0 \\ & x_1 + 4x_2 & \geq 80 \\ & 0.09x_1 + 0.08x_2 & \geq 4 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Donde α es una constante.

a) (2 puntos) Ordene cada punto por la intersección de las distintas restricciones $(A, B, C, \ldots)$, siguiendo el sentido del reloj donde "A" es el punto $(0, 0)$, indicando claramente cuáles son puntos factibles y cuáles no, tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Vértice	Variable x_1	Variable x_2	Punto factible (Si/No)
A	0	0	
B			
$\vdots$			

b) (3 puntos) Determinar todos lo valores de la constante "α" para los cuales el problema:

i) Tiene múltiples soluciones.

ii) Tiene solución única.

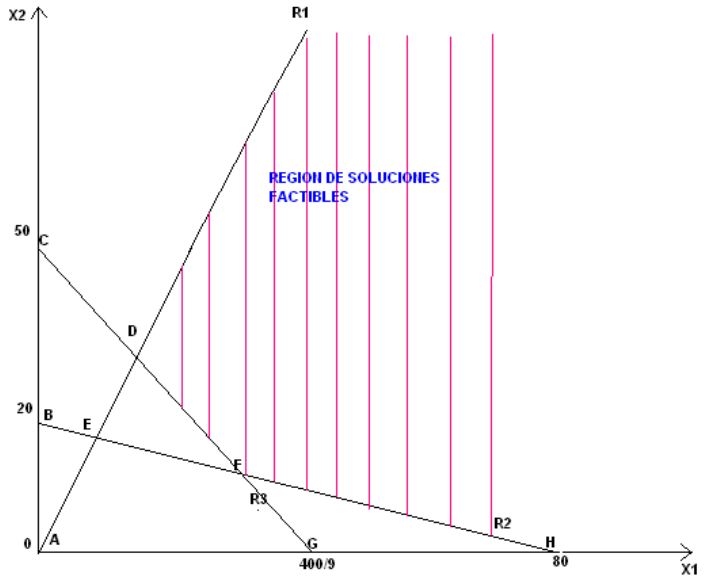
iii) Es no acotado.

c) (3 puntos) ¿Cómo se debería modificar la restricción $x_1 + 4x_2 \geq 80$ para que el problema tenga una región factible acotada? ¿Cuál es el intervalo de variación de la pendiente de dicha restricción para que se tenga un problema acotado y factible? En base a esto, muestre una solución extrema considerando que $\alpha = 10$ y que el objetivo ahora es maximizar.

d) (2 puntos) Considere ahora que se agrega una nueva variable $x_3 \geq 0$ al problema propuesto y se mantiene solamente la segunda de las restricciones originales. De esta nueva variable usted tiene la siguiente información $c_3 = 1$ y $a_3 = 1$. Identifique todos los vértices factibles de este nuevo problema e indique para qué valores de α será solución óptima cada uno de ellos.

Pauta Parte B (10 puntos)

a) (2 puntos) El siguiente gráfico **(1.2 puntos por el gráfico)** muestra el espacio de soluciones factibles del problema.



Observando el gráfico asociado al problema se puede llenar la tabla, que queda **(0.1 punto por cada vértice)**:

Vértice	Variable x_1	Variable x_2	Punto factible (Si/No)
A	0	0	NO
B	0	20	NO
C	0	50	NO
D	16	32	SI
E	$\frac{80}{9}$	$\frac{160}{9}$	NO
F	$\frac{240}{7}$	$\frac{80}{7}$	SI
G	$\frac{400}{9}$	0	NO
H	80	0	SI

b) **(1.0 punto por cada item)**

i) Para que el problema tenga múltiples soluciones podemos hacer que la función objetivo sea paralela a la restricción $0.09x_1 + 0.08x_2 \geq 4$. La pendiente de la función objetivo es igual a $\frac{-20}{\alpha}$, mientras que la pendiente de esta restricción es igual a $\frac{-9}{8}$, por lo que $\alpha = \frac{160}{9}$.
Si la función objetivo es paralela a la restricción $2x_1 - x_2 \geq 0$, entonces tendremos que $\alpha = -10$.
En caso que la función objetivo sea paralela a la restricción $x_1 + 4x_2 \geq 80$, entonces $\alpha = 80$.

En resumen, para que el problema tenga múltiples soluciones los valores deben ser $\alpha = \frac{160}{9}$ ó $\alpha = -10$ ó $\alpha = 80$.

ii) Para que la solución sea única, podría ser, por ejemplo, el punto D. Ese punto se obtiene si se utiliza $\alpha = 0$, ya que en ese caso la función objetivo busca el punto factible con menor coordenada x_1.
En este sentido, si buscamos un intervalo de valores válidos para α, se deberán descartar los casos en que la función objetivo sea paralela a alguna de las restricciones, y además, evitar que el problema sea no acotado (lo que sucede si $\alpha < -10$), entonces, basta con que $\alpha \in [-10, +\infty) / \left\{\frac{160}{9}, 80\right\}$.

iii) Para que el problema sea no acotado debemos cambiar la orientación de la función objetivo de modo que apunte en la dirección de no acotamiento de la región factible. Notemos, por ejemplo, que si elegimos $\alpha = -10$, la función objetivo es $20x_1 - 10x_2$ y es paralela a la primera restricción. Basta hacer α un poco más negativo, y ya tendremos que el problema es no acotado.

En resumen, el intervalo de valores para que el problema sea no acotado es $\alpha \in (-\infty, -10)$.

c) (2 puntos) Claramente, si desplazamos la restricción $x_1+4x_2 \geq 80$ hacia abajo-izquierda (hacemos que b_2 disminuya) el espacio seguirá siendo acotado pues solamente se ampliará (hasta que esta restricción pase por el punto $(\frac{400}{9},)$). Ahora, si desplazamos la restricción $x_1 + 4x_2 \geq 80$ hacia arriba-derecha (hacemos que b_2 aumente) el espacio seguirá siendo acotado pues solamente se reducirá pero nunca se podrá acotar. Luego, la forma de acotar este espacio es dar vuelta la desigualdad de la restricción $x_1 + 4x_2 \geq 80$ dejándola como $x_1 + 4x_2 \leq 80$, quedando como el espacio de soluciones factibles el triángulo descrito por los vértices G, F y H **(1.0 punto)**.

Desde el punto de vista de modificaciones en la pendiente de la restricción $x_1 + 4x_2 \geq 80$ que asegure un espacio factible y acotado, ésta restricción debe inclinarse levemente sobre la horizontal, para acotar el espacio entre ella y el eje de x_1. Para que esto pase, se debe cumplir que $\frac{a_{21}}{a_{22}} < 0$ **(0.5 puntos)**.

Ahora, si consideramos $\alpha = 10$ una solución extrema del problema es el vértice G **(0.5 puntos)**.

d) (2 puntos) Bajo las nuevas condiciones el problema queda:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & Z = 20x_1 + \alpha x_2 + x_3 & \\ \text{s.a :} & & \\ & x_1 + 4x_2 + x_3 & \geq 80 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

La estructura del problema muestra que hay 4 restricciones (la restricción que quedo y la naturaleza de variables) y 3 variables. En consecuencia, el problema posee 4 vértices. La siguiente tabla muestra la información de los vértices y si son o no factibles **(1.0 punto por la table correcta)**.

Vértice	Variable x_1	Variable x_2	Variable x_3	Punto factible (Si/No)
$V1$	0	0	0	NO
$V2$	80	0	0	SI
$V3$	0	20	0	SI
$V4$	0	0	80	SI

Primero, resulta claro que el vértice $V2$ no puede ser solución óptima del problema pues el vértice $V4$ siempre le gana (da menos costo por unidad y consume la misma cantidad de recurso). Luego, basta saber para que valores de α el vértice $V4$ es mejor que el $V3$. Para ello, basta con ver que para un valor de $\alpha = 4$ ambos vértices entregan una función objetivo de 80, y por lo tanto, para $\alpha < 4$ la solución óptima estará en el vértice $V3$, y para $\alpha > 4$ la solución óptima estará en el vértice $V4$ **(1.0 punto por el análisis de α)**.

Pregunta 3 (20 puntos)

Se está por realizar el festival de cine de cortometrajes de Santiago, y la comisión organizadora ha recibido N cortometrajes, cada uno de los cuales tiene una duración de t_n minutos.

La realización de este festival se llevará a cabo durante un solo día, considerándose un máximo de T minutos de sala de para las proyecciones, teniéndose que $\sum_{n=1}^{N} t_n > T$. Dado esto, la comisión organizadora ha decidido que puede no pasar un cortometraje, lo que tiene un costo social valorizado en C_n si es que el cortometraje n no se proyecta. Para los cortometrajes que serán proyectados, la comisión puede editarlos de manera de reducir la duración del mismo. Sin embargo, para que la trama de un cortometraje se entienda deben ser proyectados al menos r_n minutos de éste (ese tiempo basta para que la edición sea adecuada), información conocida para todo $n = 1, \ldots, N$. La comisión valora en B_n el beneficio social de proyectar la versión original del cortometraje n con $n = 1, \ldots, N$, y en caso de proyectar la edición de ese cortometraje el beneficio es proporcional a la duración de la edición.

Además, la comisión sabe que en caso de proyectar menos de K cortometrajes se generará un costo social valorizado en G, y que existe un conjunto de cortometrajes que son incompatibles de ser proyectados en el mismo festival producto de rencillas entre los productores de éstos. En consecuencia, se conoce que si se proyecta el cortometraje n con $n = 1, \ldots, N$ (ya sea de manera completa o editada), no se pueden proyectar los cortometrajes incluidos en el conjunto S_n.

a) (12 puntos) Considerando que no existe tiempo entre proyecciones sucesivas de cortometrajes, construya un modelo de Programación Lineal Mixta que permita a la comisión organizadora del evento maximizar el beneficio social producido por la realización del festival.

Ahora la comisión organizadora ha recibido información respecto a directores que han tenido problemas, y ha decidido que no se proyectarán de manera seguida cortometrajes de directos con problemas. Para ello, se conoce que el director del cortometraje n con $n = 1, \ldots, N$ tiene problemas con los directores de los cortometrajes incluidos en el conjunto Q_n.

b) (8 puntos) Considerando que las condiciones originales (las consideradas en la parte a)) siguen siendo válidas, construya un modelo de Programación Lineal Mixta que permita a la comisión organizadora del evento maximizar el beneficio social producido por la realización del festival considerando la nueva información. En este caso, no es necesario reescribir el modelo entregado en la parte a), basta con agregar o modificar lo que estime conveniente.

Pauta Pregunta 3

a) Se definen las variables, la función objetivo y las restricciones.

Variables: (1 punto por cada variable)

x_n: $\begin{cases} 1 & \text{si se proyecta el cortometraje } n \text{ con } n = 1, \ldots, N. \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

α: $\begin{cases} 1 & \text{Si se proyectan menos de } K \text{ cortometrajes.} \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

y_n: duración de la proyección del cortometraje n con $n = 1, \ldots, N$.

Función objetivo (1 punto por cada término de la función) : Se debe maximizar el beneficio social total del festival.

$$\text{máx} \left(\sum_{n=1}^{N} B_n \frac{y_n}{t_n} \right) - \left(\sum_{n=1}^{N} C_n (1 - x_n) \right) - G\alpha$$

Restricciones (1 punto por cada restricción):

R1) Asegurar que si se proyecta un cortometraje su duración es a los más la duración completa del cortometraje.

$$y_n \leq t_n x_n \quad \text{para todo } n = 1, \ldots, N.$$

R2) Asegurar que si se proyecta un cortometraje su duración es al menos la duración necesaria para que se entienda la trama.

$$y_n \geq r_n x_n \quad \text{para todo } n = 1, \ldots, N.$$

R3) Se deben respetar los T minutos de duración del festival.

$$\sum_{n=1}^{N} y_n \leq T$$

R4) Asegurar que si no se proyectan K cortometrajes se pague el costo social.

$$\alpha \geq \frac{K - \sum_{n=1}^{N}}{N}$$

R5) Asegurar que no se proyectaran cortometrajes de productores con rencillas entre sí.

$$N(1 - x_n) \geq \sum_{m \in S_n} x_m \quad \text{para todo } n = 1, \ldots, N.$$

R6) Restricción de naturaleza de variables.

$x_n \in \{0, 1\}$, para todo n=1,...,N.
$\alpha \in \{0, 1\}$.
$y_n \geq 0$, para todo n=1,...,N.

b) En este caso, es necesario agregar una nueva variable, se reescribe la $R6$) y tres nuevas restricciones que permitan ver el orden en que son proyectados los cortometrajes que se decide proyectar.

Variable nueva (2 puntos por la variable):

$$\beta_{nm}: \begin{cases} 1 & \text{si se proyecta el cortometraje } n \text{ con } n = 1, \ldots, N \text{ justo antes del cortometraje } m \text{ con } m = 1, \ldots, N. \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Restricciones nuevas (2 puntos por cada restricción):

R7) Colocarle cortometrajes justo antes solo a los cortometrajes que se proyectarán

$$\sum_{n=1}^{N} \beta_{nm} \leq x_m \qquad \text{para todo } m = 1, \ldots, N.$$

R8) Colocarle exactamente tantos cortometrajes antes como el total de cortometrajes que se exhibirán menos el primero que no tendrá uno antes.

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \beta_{nm} \leq \left(\sum_{m=1}^{N} x_m \right) - 1$$

R9) Asegurarse de que cortometrajes de directores enemistados no serán programados consecutivamente.

$$\sum_{m \in Q_n} (\beta_{nm} + \beta_{mn}) = 0 \qquad \text{para todo } n = 1, \ldots, N.$$