ICS1113 OPTIMIZACION, 2010/1.
INTERROGACION 2. SOLUCION

Parte 1 (24 pts).

a) Responda brevemente las siguientes preguntas:

i) (4 pts) "Si un problema de programación lineal, que minimiza una cierta función objetivo, tiene alguna restricción de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ y si x^*, solución óptima del problema, cumple $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$, entonces, el aumentar el valor de b hace disminuir el valor óptimo alcanzado por el problema". Indique si esta afirmación es verdadera o falsa y justifique con mucha claridad su respuesta.

Respuesta:

Falso.
La restricción podría ser redundante y al moverse "hacia fuera" no tener impacto alguno en la región factible del problema (4 ptos).

Nota: Si el alumno contestó que la respuesta era falsa, pero sin una adecuada y coherente justificación, se considera errada la respuesta.

ii) (4 pts) Si el problema de FASE I es no acotado, eso significa que el problema original es no acotado, ¿verdadero o falso? Justifique con claridad.

Respuesta:

Falso.
El problema de Fase I no puede ser no acotado ya que las variables artificiales son ≥ 0 y estamos minimizando la suma de ellas. Por otro lado, el no acotamiento de un problema se detecta en la Fase II (4 ptos).

Nota: Si el alumno contestó que la respuesta era falsa, pero la justificación no tiene relación alguna con la razón, se considera errada la respuesta.

b) Considerando el problema P) y el problema D) (dual del primero), descritos a continuación, responda las siguientes preguntas, justificando adecuadamente su respuesta.

$$P) \quad Max \ \ c^T x \qquad\qquad D) \quad Min \ \ y^T b$$
$$s.a. \quad Ax \leq b \qquad\qquad s.a. \quad y^T A \geq c^T$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

i) (4 pts) Si el primal es no acotado, entonces el dual es infactible y viceversa. ¿Verdadero o falso?

Respuesta:

El espíritu de la formulación de la pregunta era:

Incierto.
Si el primal es no acotado, el dual es infactible. Sin embargo, si el dual es infactible, el primal puede ser tanto infactible como no acotado. Sólo si es factible es no acotado (4 ptos).

No obstante lo anterior, el alumno puede haber interpretado el "viceversa" de otra manera, y en ese caso:

Verdadero.
Si el primal es no acotado, el dual es infactible, y si el dual es no acotado, el primal es infactible, pues el problema dual del dual es el primal (4 ptos).

ii) (4 pts) Si la solución óptima primal es degenerada, entonces el dual puede tener soluciones múltiples y viceversa. ¿Verdadero o falso?

Respuesta:

El espíritu de la formulación de la pregunta era:

Verdadero.
Efectivamente así es ya que las variables primales se corresponden con los costos reducidos del dual. Al ser degenerada, algún costo reducido dual no básico podría ser nulo y generar la condición para la existencia de múltiples soluciones en el dual (4 ptos).

No obstante lo anterior, el alumno puede haber interpretado el "viceversa" de otra manera, y en ese caso:

Verdadero:
Si la solución óptima primal es degenerada, entonces el dual puede tener soluciones múltiples, y Si la solución óptima dual es degenerada, entonces el primal puede tener soluciones múltiples, pues el problema dual del dual es el primal (4 ptos).

Nota: Si el alumno contestó que la respuesta era verdadera, pero sin una adecuada y coherente justificación, se puede optar máximo a 1 pto. Además, si el alumno consideró que en realidad debe darse la situación planteada (lo correcto es que pueden darse otras situaciones también), y no justifica la razón por la que se da la relación en cuestión, entonces puede optar máximo a 2 ptos.

iii) (4 pts) Las variables duales corresponden a las holguras de las restricciones primales. ¿Verdadero o falso?

Respuesta:

Falso.
Las holguras de las restricciones primales son los costos reducidos del dual (4 ptos).
Alternativamente, en el óptimo, las variables duales corresponden a los costos reducidos asociados a holguras y excesos del primal (4 ptos).

Nota: Si el alumno contestó que la respuesta era falsa, pero la justificación no tiene relación alguna con la razón, se considera errada la respuesta.

iv) (4 pts) Si una variable dual es básica, entonces la restricción primal correspondiente asociada está inactiva. ¿Verdadero o falso?

Respuesta:

Incierto.
Es necesario distinguir 2 casos.
Si la variable dual básica óptima es positiva, entonces por holguras complementarias la correspondiente restricción no es activa. Sin embargo, si la variable dual básica óptima es cero, hay degenerancia y la restricción correspondiente es activa (holgura nula) (4 ptos).

Nota: Independiente de la respuesta del alumno, sin una adecuada y coherente justificación, se considera errada la respuesta. Además, si el alumno considera sólo una de las dos posibilidades, entonces puede optar máximo a 2 ptos.

Parte 2 (20 pts).

Considere el siguiente PL:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
s.a. \quad & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 25 \\
& 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Este problema es llevado a la forma estándar agregando dos variables de holgura (x_4 y x_5) y después resuelto con el algoritmo SIMPLEX, El Tableau final es el siguiente:

Costos reducidos →

0	5/3	4	1	-2/3	35/3
1	5/3	1	0	1/3	20/3
0	-1	0	0	-1	20
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	

a) **(5 pts)** Usando la información disponible en este Tableau, indique B^{-1} y los valores de las variables duales en esa situación óptima.
Respuesta: Sabemos que la matriz B^{-1} se encuentra en el tableau óptimo en las columnas de las variables de holgura. Entonces:

$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$, notar que el orden de la base es $\{x_4, x_1\}$

Sabemos que los costos reducidos de las variables de holgura del problema primal nos determinan el valor de las variables del dual. En este caso:

$$\lambda_1 = -r_{x4} = 0$$
$$\lambda_2 = -r_{x5} = 1$$

3 puntos por poner sólo B^{-1}, 2 puntos más por poner las variables del cual (uno por cada una).

b) **(5 pts)** Determine el rango de valores para el coeficiente de x_3 en la función objetivo de modo que la solución actual siga siendo óptima.
Respuesta: Si cambia el coeficiente de una variable no básica, como x_3, va a variar el costo reducido de dicha variable. La condición de optimalidad para este caso es $\vec{r} \le \vec{0}$, por lo tanto la solución seguirá siendo óptima si:

$$r_{x3} = c_3 - c_B^T B^{-1} D^{x3} \le 0$$

Donde D^{x3} representa la columna de la matriz D que representa dicha variable, este vector lo obtenemos directamente desde el tableau óptimo:

$$r_{x3} = c_3 - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \le 0$$
$$c_3 - 3 \le 0$$
$$c_3 \le 3$$

Es el rango de valores de c_3 para que siga siendo óptima la solución actual.

2 puntos por decir que los costos reducidos son menores o iguales a cero, 5 puntos por llegar al resultado final, con los valores correctos.

c) **(5 pts)** Encuentre el rango de valores del coeficiente del lado derecho de la segunda restricción de modo que la base actual se mantenga.

Respuesta: Si cambiamos el coeficiente del lado derecho de una restricción debemos verificar si la solución sigue siendo factible:

$$x_B = B^{-1}b \geq 0$$
$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ b_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 25 - \dfrac{2b_2}{3} \geq 0 \\ \dfrac{b_2}{3} \geq 0 \end{array}\right\} 0 \leq b_2 \leq \frac{75}{2}$$

Es el rango de b_2 donde la solución sigue siendo factible y, por lo tanto, óptima.

2 puntos por decir que x_b debe ser mayor o igual a cero, 5 puntos en total por llegar al rango de valores (3 si sólo se pone una cota y no dos).

d) **(5 pts)** Determine en cuánto cambia el valor óptimo del problema si el lado derecho de la segunda restricción cambia de 20 a 25. Justifique su procedimiento.
Respuesta: Sabemos que el valor óptimo es $\hat{v} = c_B^T x_B$, pero además por dualidad fuerte tenemos que: $\hat{v} = c_B^T x_B = \lambda^T b$. Por lo tanto, $\Delta\hat{v} = {\lambda_i}^T \Delta b_i$.
Si tenemos que $\Delta b_2 = 5$. Entonces:

$$\Delta\hat{v} = {\lambda_2}^T \Delta b_2 = 1 \cdot 5 = 5$$

Es decir el valor óptimo aumentaría en 5 unidades.

2 puntos por decir que Δb_2 pertenece al rango de valores que hacen que la solución óptima se mantenga, 5 puntos en total por decir que el valor óptimo aumenta en 5 o que llega a 25 (se darán sólo 3 puntos si solamente se llega a la variación del valor óptimo).

Parte 3. (20 pts)

a) (10 pts) Considere un problema de programación lineal de la forma

$$\max \quad c^T x$$
$$s.a. \quad Ax = b, x \geq 0$$

Suponga que este problema tiene 5 restricciones y 200 variables, correspondientes a cantidades a plantar de diversos cultivos vegetales en un campo y se busca *maximizar* utilidades. El problema se ha resuelto usando el método SIMPLEX en un software apropiado. Las siguientes son las variables duales que se obtienen en el óptimo (en el mismo orden en que están las restricciones): $\pi_1 = 1{,}3$, $\pi_2 = 3{,}1$, $\pi_3 = -2{,}4$, $\pi_4 = 1{,}8$, $\pi_5 = 0{,}0$. Se le propone a la persona que resolvió el problema introducir una nueva especie vegetal a los cultivos. La columna correspondiente a este cultivo que se agregaría a la matriz A es:

$$\begin{bmatrix} 10{,}0 \\ 1{,}0 \\ 2{,}3 \\ 0{,}0 \\ 1{,}8 \end{bmatrix}$$

Este nuevo vegetal reporta una utilidad de $25 por unidad plantada. Determine si conviene o no introducir ese nuevo cultivo para aumentar aún más las utilidades. Justifique con mucha claridad su respuesta.

Respuesta: Esto consiste en evaluar el costo reducido de la nueva variable que entra como no básica. Ese costo es:

$$25-(10\times 1,3+1\times 3,1-2,3\times 2,4+0\times 1,8+1,8\times 0)=25-10,58=14,42>0$$

Como es > 0 y estamos maximizando, sí conviene ingresar esta nueva alternativa.

Asignación de puntaje:

- Escribir los costos reducidos del primal como $\mathbf{r}_D^\intercal = \mathbf{c}_D^\intercal - \mathbf{c}_B^\intercal \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$. (2 puntos)
- Definir y luego multiplicar cada factor de $\mathbf{c}_B^\intercal \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$.,llegando a 10,58 (2 puntos)
- Definir $\mathbf{c}_D^\intercal$ como 25 y llegar a 14,42. (2 puntos)
- Correcta interpretación del resultado anterior. (4 puntos)

b) (10 pts) Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \\ s.a. & 3x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & -3x_1 + x_2 - 2x_3 & \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Usando conceptos de dualidad, demuestre que este problema es no acotado.

Respuesta: El problema dual es:

$$\begin{array}{lll} \min & 4y_1 + 3y_2 & \\ s.a. & 3y_1 - 3y_2 & \geq 2 \\ & y_1 + y_2 & \geq 1 \\ & -2y_2 & \geq 2 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 & \end{array}$$

De la última restricción se tiene que $y_2 \leq -1$ lo que contradice de inmediato el requerimiento de que $y_2 \geq 0$, luego el dual es infactible. Por otro lado, el problema primal es claramente factible ya que la solución (0,0,0) satisface las restricciones. Por los teoremas de dualidad tenemos que el primal debe ser no acotado.

Asignación de puntaje:

- Escribir correctamente el dual, junto con mencionar el corolario de dualidad. (6 puntos)
- Mencionar infactibilidad del dual. (1 punto)
- Demostrar infactibilidad del dual (1 punto)
- Mencionar factibilidad del primal (1punto)
- Demostrar factibilidad del primal (1 punto)

c) (10 pts Extras, no responder esta pregunta no lo perjudica) Considere un dominio D definido por un conjunto de desigualdades lineales:

$$D = \{x \in R^n : Ax \leq b\}$$

donde *A* es una matriz de *n* filas y *m* columnas y *b* es un vector de *m* componentes. Nos interesa resolver el siguiente problema: encontrar la esfera más grande contenida en el conjunto *D*. Una esfera con centro *u* y radio *r* es un conjunto de la forma:

$$S(u,r) = \{x \in R^n : \|x-u\|_2 \leq r\},$$

donde $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}$ es la norma euclidiana del vector *v*.

i) **(3 pts)**¿Qué condición debe cumplir el conjunto *D* para que el problema tenga solución?

Respuesta: El conjunto D debe ser acotado, de otra manera no hay esfera finita dentro de él, el radio puede crecer indefinidamente.

ii) **(3 pts)** Sea $\overline{x}$ un punto en el *interior* del conjunto *D*, es decir, $A\overline{x} < b$. Suponga que $\alpha_1,...,\alpha_m$ son las filas de la matriz A. ¿Cuánto es la distancia (euclidiana) desde $\overline{x}$ al conjunto $\{x \in R^n : \alpha_i^T x = b_i\}$?

Respuesta: es $\frac{b_i - \alpha_i^T \overline{x}}{\|\alpha_i\|}$. Este es un resultado básico de geometría.

iii) **(4 pts)** Basándose en lo anterior, muestre que el problema de encontrar la esfera más grande contenida en el conjunto *D*, se puede plantear como un problema de Programación Lineal.

Respuesta: El problema que se debe formular es:

$$\begin{aligned} &\max \quad t \\ &s.a. \quad \alpha_i^T x + t\|\alpha_i\| \le b_i \quad i = 1,...,m \end{aligned}$$

Parte 4. (16 pts)

El siguiente es un ejemplo de problema de "programación de proyectos". Un hospital se prepara para instalar un acelerador lineal en reemplazo de una antigua unidad de cobalto. La tabla siguiente muestra las actividades necesarias para llevar a cabo el proyecto de instalación. Algunas de las actividades deben realizarse antes que otras, y eso está indicado en la tabla como "actividades predecesoras". Se indica también la duración, en días, de la actividad.

Actividad	Descripción	Duración (días)	Predecesoras
A	Instalación de soportes	8	C
B	Instalación de cableado	14	Ninguna
C	Remoción de Unidad de cobalto	2	Ninguna
D	Instalar acelerador	7	A,B,C
E	Pruebas de funcionamiento	14	D

Escriba un modelo de programación lineal que permita determinar el instante de tiempo en que deben comenzar las distintas actividades, de modo que el proyecto total se complete en el menor tiempo posible y se respeten todas las relaciones de precedencia entre las actividades. Para simplificar puede suponer que el proyecto comienza en el instante de tiempo $t = 0$. (Para que el modelo sea lineal continuo, suponga, a modo de simplificación, que el tiempo se puede considerar en forma continua, es decir está permitido considerar fracciones de día.) (Ind: se darán cuatro puntos por la identificación correcta de las variables, 8 por las restricciones y otros cuatro por la función objetivo)

Respuesta:

En este problema, definiremos los conjuntos TFA de los tiempos finales de cada actividad y TIA de los tiempos iniciales de cada actividad. En base a éstos encontrar las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo.

Variables de decisión:

T_i : el tiempo en que se comienza la actividad i.
i = {1(A), 2(B), 3(C), 4(D), 5(E)}

Restricciones:

i) actividades predecesoras:

$T_1 \ge T_3 + 2$ (Actividad A parte después que termine la actividad C)

$T_4 \ge T_1 + 8$ (Actividad D parte después que terminen las actividades A, B, C)

$T_4 \geq T_2 + 14$
$T_4 \geq T_3 + 2$
$T_5 \geq T_4 + 7$ (Actividad E parte después que termine la actividad D)

Nota: En este conjunto de restricciones existe una redundante. Esta restricción puede estar o no estar siendo correcto en ambos casos.

ii) No negatividad:

$T_i \geq 0 \qquad \forall i, i = \{1,2,3,4,5\}$

Función Objetivo:

Dos posibilidades:

Primera respuesta correcta pero menos general:
Reconocer que la última actividad es la actividad 5. De esta forma se puede definir una variable auxiliar: Tf= T5 + 14, y de esta manera obtener la función objetivo:

Min (Tf), o equivalentemente, Min T5.

Segunda respuesta correcta y general para problemas de programación de proyectos:
Muchas veces no se puede reconocer cual es la última actividad. En estos casos conviene generar una variable auxiliar que sea mayor que el tiempo final de cada actividad. Así al minimizarla se está minimizando la última actividad.

$Tf \geq T_1 + 8$
$Tf \geq T_2 + 14$
$Tf \geq T_3 + 2$
$Tf \geq T_4 + 7$
$Tf \geq T_5 + 14$

Y de esta manera obtener la función objetivo:

Min (Tf)

Parte 5 (20 pts).

Considere el siguiente problema de Optimización Lineal:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 11 \\ & x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) (10 pts) Resuelva el problema mediante el método SIMPLEX de dos fases. (Ind: se necesitan en total 3 iteraciones si hace la Fase I teniendo cuidado de poner las variables artificiales que realmente se necesitan).
Respuesta:
Planteamos el formato estándar:

$$Max: x_1 + x_2$$

$$s.a.$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 11$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 10$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_6 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Y comenzamos con el tableau de fase 1 agregando una variable artificial a la primera restricción (Considerando el problema original como de minimización)

X1	X2	X3	X4	X5	X6	A	LD
2	3	-1	0	0	0	1	11
-1	1	0	1	0	0	0	2
1	1	0	0	1	0	0	10
3	-2	0	0	0	1	0	10
-1	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0

3 ptos.

Pivoteamos la última fila

X1	X2	X3	X4	X5	X6	A	LD
2	3	-1	0	0	0	1	11
-1	1	0	1	0	0	0	2
1	1	0	0	1	0	0	10
3	-2	0	0	0	1	0	10
-1	-1	0	0	0	0	0	0
-2	-3	1	0	0	0	0	-11

Entra x2 y sale min(11/3; 2/1; 10/1; *) = 2/1 → sale x4

X1	X2	X3	X4	X5	X6	A	LD
5	0	-1	-3	0	0	1	5
-1	1	0	1	0	0	0	2
2	0	0	-1	1	0	0	8
1	0	0	2	0	1	0	14
-2	0	0	1	0	0	0	2
-5	0	1	3	0	0	0	-5

Entra x1 y sale min(5/5; *; 8/2; 14/1) = 5/5 → sale A

X1	X2	X3	X4	X5	X6	A	LD
1	0	-0,2	-0,6	0	0	0,2	1
0	1	-0,2	0,4	0	0	0,2	3
0	0	0,4	0,2	1	0	-0,4	6
0	0	0,2	2,6	0	1	-0,2	13
0	0	-0,4	-0,2	0	0	0,4	4
0	0	0	0	0	0	1	0

3 ptos.

El problema de fasé 1 es óptimo con la variable artificial en cero, luego podemos obtener un vértice de fase 2 eliminando las filas y columnas de fase 1:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	LD
1	0	-0,2	-0,6	0	0	1
0	1	-0,2	0,4	0	0	3
0	0	0,4	0,2	1	0	6
0	0	0,2	2,6	0	1	13
0	0	-0,4	-0,2	0	0	4

Entra x3 y sale min(*; *; 6/0,4; 13/0,2) = 6/0,4 → sale x5

X1	X2	X3	X4	X5	X6	LD
1	0	0	-0,5	0,5	0	4
0	1	0	0,5	0,5	0	6
0	0	1	0,5	2,5	0	15
0	0	0	2,5	-0,5	1	10
0	0	0	0	1	0	10

4 ptos.

Llegamos al tableau óptimo

b) (4 pts) Encuentre **todas** las soluciones óptimas. Explique claramente su método para hacer esto.
Respuesta:
La solución vértice es óptima (costos reducidos no básicos no negativos), pero no única puesto a que hay una variable no básica con costo reducido cero. Iteramos para encontrar el próximo vértice. Entra x4 y sale min(*; 6/0,5; 15/0,5; 10/2,5) = 10/2,5 → sale x6.

X1	X2	X3	X4	X5	X6	LD
1	0	0	0	0,4	0,2	6
0	1	0	0	0,6	-0,2	4
0	0	1	0	2,6	-0,2	13
0	0	0	1	-0,2	0,4	4
0	0	0	0	1	0	10

3 ptos.

Esto otro vértice también es óptimo. Todas las soluciones óptimas se pueden escribir como:

$$X = \lambda \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 13 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2\lambda \\ 4+2\lambda \\ 13+2\lambda \\ 4-4\lambda \\ 0 \\ 10\lambda \end{bmatrix}, \quad \text{con } \lambda \in [0;1]$$

1 ptos.

c) (3 pts) Escriba el dual del problema.
Respuesta:
El problema Dual es:

$$\begin{aligned} &Min\ 11\lambda_1 - 2\lambda_2 + 10\lambda_3 + 10\lambda_4 \\ &s.a. \\ &2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 \geq 1 \\ &3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 \geq 1 \\ &\lambda_1, \lambda_2 \leq 0 \\ &\lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \end{aligned}$$

3 ptos.

d) (3 pts) Determine una solución dual óptima (haga esto sin resolver en detalle el problema dual).
Respuesta:
La solución óptima del dual es igual a los costos reducidos de las holguras en el tableau final (recordar que resolvimos el problema considerando el problema de minimización), esto es:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$$

3 ptos.

Se puede observar que las holguras del dual para esta solución también son nulas, por lo tanto, tenemos una solución degenerada, lo que era esperable dado que el problema primal tenía múltiples soluciones.

Error de cálculo (sin error conceptual): -3ptos.