PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2026 - 2
Profesores: R. Cuadrado - M. Klapp - J.C. Muñoz - M. Villafranca - J. Villavicencio

Interrogación 2
Duración: 150 minutos.

Instrucciones

- ◇ **Durante la prueba se exigirá una identificación oficial** (con foto), por ejemplo: CI, TUC, pase escolar, etc. También deberá firmar la lista de asistencia.
- ◇ **Escriba su nombre completo, sección, número de lista en la primera hoja.** Además, escriba número de lista en cada hoja. No seguir estas instrucciones será penalizada con 2 décimas en la prueba.
- ◇ **Al finalizar la prueba**, cada estudiante debe:
  (a) **Escanearla y entregarla como PDF a CANVAS** en el buzón "Interrogación 1" que estará abierto desde el inicio de la evaluación hasta 15 minutos después de su hora de término. Procure que el escaneo sea legible, pues se corregirá sobre el documento escaneado. Un escaneo ilegible o incompleto no será corregido.
  (b) **Entregarla físicamente** como respaldo al equipo de ayudantes. Si no se recibe el respaldo físico de la prueba, esta será calificada con nota 1.
- ◇ La prueba es estrictamente individual. Si es sorprendido mirando trabajos de otros compañeros, se penalizará con nota 1
- ◇ Escribir respuestas en la prueba después de su término se penalizará con nota mínima en la pregunta o, incluso, en toda la prueba a criterio del equipo docente.
- ◇ Está prohibido el uso de dispositivos electrónicos durante la prueba. Solo se permite ocupar un dispositivo electrónico para escanear y subir su prueba a CANVAS.
- ◇ Si termina antes, entonces favor avisar a un ayudante para escanear y subir su prueba.
- ◇ **Sistema de Calificación:** La prueba tiene 60 puntos. Sean P y P_1 los puntajes obtenidos en toda la prueba y solamente en la pregunta 1, respectivamente. La Nota de la Interrogación será igual a:

$$\text{Nota Interrogación} = \begin{cases} \min\{P/10+1,\, 3\}, & \text{si } P_1 \in [0,4], \\ \min\{P/10+1,\, \frac{1}{2}P_1+1\}, & \text{si } P_1 \geq 4 \end{cases}$$

Pregunta 1 (20 puntos)

Considere que usted trabaja en una empresa dedicada a la producción y distribución de un producto genérico y su rol es planificar la distribución a sus clientes. En particular, suponga que para el día de mañana se constata que un conjunto $I = \{1, ..., n\}$ de clientes ha solicitado que le entreguen productos y que para atenderlos usted cuenta con el conjunto $J = \{1, ..., m\}$ de conductores posibles a contratar (cada uno con su camión). Su objetivo es determinar a qué conductores contratar y a qué clientes atender para maximizar las ganancias de la empresa al término de la jornada. Las ganancias de la empresa dependen de las siguientes características del sistema. Cada conductor $j \in J$ cobra $\$c_j$ por una jornada diaria de trabajo durante la cual puede entregar una capacidad máxima de W_j kilogramos (sumando todos los clientes que visita). Por otro lado, no es obligatorio atender a todos los clientes, pero cada cliente atendido debe ser asignado a un único camión (no es posible dividir el despacho a un cliente en dos o más visitas). Además, si el cliente $i \in I$ es atendido, debe recibir entre a_i y b_i kilogramos, donde $0 < a_i \leq b_i$. Considere, además, que la empresa recibe un ingreso de $\$p_i$ por cada kilogramo de carga entregado al cliente i.

Parte A (8 puntos)

Formule un modelo lineal que maximice las ganancias de la empresa. Para ello, considere las siguientes variables de decisión:

- $x_j \in \{0, 1\}$: 1 si contrata al conductor $j \in J$, y 0 en otro caso.
- $y_{ij} \in \{0, 1\}$: 1 si el cliente $i \in I$ es atendido por $j \in J$, y 0 en otro caso.

Puede definir variables adicionales si lo considera necesario.

Solución:

Variables de decisión:

Además de las variables **x** e **y** se define:

- $z_{ij} \in \mathbb{R}_+$: kilogramos de carga entregados al cliente $i \in I$ mediante el camión $j \in J$.

Función objetivo:

$$\max \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_i z_{ij} - \sum_{j \in J} c_j x_j.$$

Restricciones:

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in I \tag{1a}$$

$$y_{ij} \leq x_j \qquad \forall i \in I,\ j \in J \tag{1b}$$

$$a_i y_{ij} \leq z_{ij} \leq b_i y_{ij} \qquad \forall i \in I,\ j \in J \tag{1c}$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq W_j \qquad \forall j \in J \tag{1d}$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad \forall j \in J \tag{1e}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in I,\ j \in J \tag{1f}$$

$$z_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in I,\ j \in J. \tag{1g}$$

Nota de corrección:

- ◇ 2 puntos por las variables de decisión.
- ◇ 1 punto por la función objetivo.
- ◇ 5 puntos por las restricciones (1 punto por cada una de las primeras 4 y otro por la naturaleza de variables).
- ◇ Se descuenta 1 punto si no se declara la naturaleza de las variables.
- ◇ Para la restricción (1b) otra alternativa es: $\sum_{i \in I} y_{ij} \leq n \cdot x_j$
- ◇ Quitar puntos de forma significativa (sobre 2 puntos) si se sobrerrestringe el dominio (por ejemplo asumir que se entrega una cantidad fija al cliente).

Parte B (12 puntos)

Suponiendo que el modelo de la parte A es correcto, incorpore las siguientes condiciones adicionales a su modelo. Puede definir nuevas variables, restricciones o modificar la función objetivo según corresponda. No es necesario reescribir el modelo completo.

(i) **(4 puntos)** Para el cliente $i \in I$, defina el conjunto $I_i \subseteq I \setminus \{i\}$ de clientes cuyas cargas no pueden ser transportadas por el mismo conductor que lleva la carga de i.

Solución:

$$y_{ij} + y_{kj} \leq 1 \qquad \forall i \in I,\ k \in I_i,\ j \in J.$$

o, altenativamente,

$$y_{ij} + \sum_{k \in I_i} y_{kj} \leq 1 \qquad \forall i \in I,\ j \in J.$$

Nota de corrección: Aquí dar todo el puntaje si está correcta y 3 puntos por errores menores como índices. El resto cero.

(ii) **(4 puntos)** Ningún conductor puede transportar más del doble de carga que otro conductor contratado.

Solución:

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 2 \sum_{i \in I} z_{ik} + W_j(1 - x_k) \qquad \forall j, k \in J : \ j \neq k.$$

Nota de corrección:

- ◇ 2 puntos por comparar correctamente las cargas de los camiones.
- ◇ 2 puntos por considerar que la restricción está condicionada.

(iii) **(4 puntos)** Si un cliente recibe al menos $\delta_i \in [a_i, b_i]$ kilogramos de carga, entonces ese cliente le pagará a su empresa un monto fijo adicional de $\$\beta_i$ por el despacho.

Solución:

Variable adicional:

- ◇ $u_i \in \{0, 1\}$: 1 si recibe el pago adicional del cliente $i \in I$, y 0 en otro caso.

Nueva función objetivo:

$$\max \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_i z_{ij} - \sum_{j \in J} c_j x_j + \sum_{i \in I} \beta_i u_i.$$

Restricciones adicionales:

$$\sum_{j \in J} z_{ij} \geq \delta_i u_i \qquad \forall i \in I,$$

Nota de corrección:

- ◇ 1 punto por definir la variable de decisión.
- ◇ 1 punto por modificar la función objetivo.
- ◇ 1 punto por la restricción.

Pregunta 2 (7 puntos)

¿Es el siguiente conjunto convexo? Justifique.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rl} \max_{i\in\{1,\dots,n\}}\{x_i\} & \leq 1 \\ \min_{i\in\{1,\dots,n\}}\{x_i\} & \geq 0 \\ |x_1| + |\sum_{i=2}^n x_i| & \leq 3 \end{array} \right\}$$

Solución: La forma más rápida es mostrar que S es un poliedro (y, por lo tanto, es convexo), pues:

- $\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\{x_i\} \leq 1$ es equivalente a $x_i \leq 1$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$
- $\min_{i\in\{1,\dots,n\}}\{x_i\} \geq 0$ es equivalente a $x_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$
- $|x_1| + |\sum_{i=2}^n x_i| \leq 3$ es equivalente a $\sum_{i=1}^n x_i \leq 3$, pues $x_i \geq 0$.

Luego,

$$S = \left\{ x \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq 3 \right\}$$

Nota de corrección: Se puede probar por definición, es decir, hay que mostrar que si $x, y \in S$ entonces $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$

Nota de corrección: Si llega al dominio con restricciones redundantes al desarmar los valores absolutos, también está correcto.

Pregunta 3 (12 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{lrll} \max & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & & \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq b_1, & (1) \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq b_2, & (2) \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0, & \end{array}$$

donde el vector de costo (c_1, c_2, c_3) y el de recurso (b_1, b_2) son desconocidos. Considere que $x^0 = (4, 3, 0)$ es un vértice del dominio y, además, una de las múltiples soluciones óptimas de este problema. En x_0, los costos reducidos de las variables de holgura de las restricciones (1) y (2), con la función objetivo siendo maximizada, son $-9/5$ y $-7/5$, respectivamente.

(a) (4p) Deduzca los valores del vector de recursos b. Justifique.

Solución: Al ser vértice x^0 activa al menos 3 restricciones en $\mathbb{R}^3$. Ya activa $x_3 \geq 0$. Las otras dos deben ser $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq b_1$ y $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq b_2$. (2puntos por notar esto)

Al reemplazar x^0 y asumir que están en igualdad se obtiene que $b_1 = 4+2\cdot 3+0 = 10$ y que $b_2 = 3\cdot 4+3+2\cdot 0 = 15$. Luego:

$$b = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(2 puntos por obtener el valor de b)

(b) (8p) Deduzca los valores del vector de costos c. Justifique.

Solución: Consideremos el problema en forma estándar de maximización:

$$\begin{array}{lrl} \max & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 10, \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 & = 15, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0, \end{array}$$

En la base $B = (1, 2)$, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} (r_4, r_5) & \\ &= (0,0) - (c_1, c_2) \cdot \bar{A}_{4,5} \\ &= (-c_1, -c_2) \cdot A_B^{-1} \cdot A_{4,5} \\ &= (-c_1, -c_2) \cdot A_B^{-1} \cdot I \\ &= (-c_1, -c_2) \cdot A_B^{-1} \end{aligned}$$

(2 puntos por enunciar un método que llega a c_1, c_2):

Luego:

$$(c_1, c_2) = (-r_3, -r_4)A_B = (9/5, 7/5)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = (6, 5).$$

(2 puntos por calcular c_1, c_2)

Por otro lado, se comenta que la solución óptima es múltiple, por lo que el costo reducido de x_3 debe ser nulo:

$$0 = c_3 - (c_1, c_2)A_B^{-1}A_3 = c_3 + (r_3, r_4)A_3.$$

(2 puntos por enunciar un método que llega a c_3)

Luego:

$$c_3 = (9/5, 7/5)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 23/5.$$

(2 puntos por cálculo de c_3)

Finalmente:

$$c = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 23/5 \end{bmatrix}$$

Pregunta 4 (15 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{lrll} \max & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & & \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 2, & \\ & x_1 & \leq 1 & \\ & x_i & \geq 0, & \forall i \in \{1, ..., 4\} \end{array}$$

Claramente, este problema posee solución óptima.

(a) (6p) Identifique todos sus vértices.

Solución: Hay que intersectar 4 restricciones en $\mathbb{R}^4$ y ya tenemos una en igualdad. Hay 6 vértices:

- Tres valores $x_i = 0$ generan tres vértices: $(0, 1, 0, 0), (0, 0, 2/3, 0), (0, 0, 0, 1/2)$.
- Dos valores $x_i = 0$ y $x_1 = 1$ generan tres vértices: $(1, 1/2, 0, 0), (1, 0, 1/3, 0), (1, 0, 0, 1/4)$.
- Menos de dos valores $x_i = 0$ no puede generar un vértice (menos de 4 restricciones).
- El origen es infactible.

Nota de corrección: 1 punto por deducir cómo obtener vértices (4 restricciones deben activarse).

Nota de corrección: 5 puntos por los 6 vértices, 4 por 5, 3 por 4, 2 por 2 o 3, 1 por 1, 0 en otro caso.

Nota de corrección: Descontar 1 punto por cada solución entregada que no es vértice.

(b) (4p) Determine su solución óptima. No es necesario ejecutar el algoritmo simplex.

Solución: Se puede evaluar cada vértice y notar que el valor óptimo se da en $(1, 1/2, 0, 0)$

Nota de corrección: 2 puntos por la comprehensión de lo que hay que hacer y 2 puntos por la ejecución.

(c) (5p) Verifique que cumple la condición de optimalidad del algoritmo simplex.

Solución: Si consideramos el problema en forma estándar:

$$\begin{array}{lrll} \max & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & & \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 2, & \\ & x_1 + x_5 & = 1 & \\ & x_i & \geq 0, & \forall i \in \{1, ..., 5\}, \end{array}$$

podemos evaluar los costos reducidos en la base $B = \{1, 2\}$ dados por:

$$\begin{aligned} r_D^T &= c_D^T - c_B^T A_B^{-1} A_D \\ &= (1,2,0) - (2,2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1,2,0) - (2,2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1,2,0) - (1,1) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1,2,0) - (3,4,1) \\ &= (-1,-2,-1) \end{aligned}$$

y se verifica que son no positivos (condició de optimalidad en forma de maximización).

Nota de corrección: 2 puntos por la comprehensión de lo que hay que hacer y 3 puntos por la ejecución.

Pregunta 5 (6 puntos)

Considere un polítopo $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ de n variables y m restricciones y una función $f(x)$ continua y estrictamente convexa. Muestre que

$$\max\{f(x) \text{ s.a. } x \in \mathbb{X}\}$$

solo admite solución óptima en los vértices de $\mathbb{X}$.

Solución: Supongamos que la solución óptima x^* no es vértice y puede ser escrita como el promedio de dos soluciones factibles diferentes $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, es decir, $x^* = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Por convexidad estricta de $f(x)$, se obtiene que:

$$f(x^*) < \frac{1}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) \leq \max(f(x_1), f(x_2)),$$

es decir, x_1 o x_2 (o ambas) posee(n) mayor valor objetivo que x^*. CONTRADICCIÓN. x^* debe ser vértice.

Nota de corrección: El argumento puede hacerse con combinación convexa en vez de promedio.

Ayuda

Fórmula de inversa de matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$