Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingenieria Industrial y de Sistemas
ICS1113 - Optimización
Profesores: Mathias Klapp, Margarita Castro, Raimundo Cuadrado, Matías Villafranca.
Ayudante coordinador de tareas: Benjamín Rojas.

Tarea 3 ICS1113 - 2do semestre 2025

Reglas:

1. El desarrollo y entrega de esta tarea es individual o en pareja (entre dos estudiantes de cualquier sección), por lo que cada individuo o pareja debe entregar sus propias soluciones. No se recomienda repartir la tarea entre los integrantes, pues perjudica el aprendizaje y preparación de la evaluación presencial posterior.

2. Si la entrega es en pareja, entonces solo un integrante debe subir la tarea en Canvas hasta el 7/11/2025 a las 23:59 horas. Tareas atrasadas serán calificadas con nota 1.0 y no serán corregidas.

3. No se asignará puntaje fraccionario en cada pregunta.

4. El formato de entrega es un archivo .pdf (digitalizado o escrito a mano con los nombres de sus integrantes) más un archivo opcional. Si opta por una respuesta escrita a mano, entonces debe ser legible o habrá descuentos a criterio del corrector. Como archivo opcional puede adjuntar el .tex o .zip del proyecto LaTeX o código de gurobi si corresponde. Se bonificará con 3 décimas en esta tarea a quienes utilicen LaTeX (y entreguen el .tex que lo verifique).

5. Se habilitará un foro en Canvas en donde se responderán dudas del enunciado.

Pregunta 1: Dualidad [6 puntos]

Parte 1 [2 puntos]

Considere el siguiente problema de optimización lineal

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1a}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{1b}$$

$$x \geq 0. \tag{1c}$$

1. Escriba el dual del problema.
2. Usted sabe que $c_4 > c_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 5, 6, \ldots, n\}$. Use esta información para resolver el dual.
3. Use la respuesta obtenida en el punto anterior para resolver el problema primal.

Parte 2 [4 puntos]

Suponga que usted posee un código que resuelve un problema de factibilidad lineal. Formalmente, su código implementa una función ϕ que, dado dos enteros positivos m y n, una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, entrega un vector $x = \phi(m, n, A, b)$ que satisface el sistema $Ax \geq b$, si es que este vector existe.

Dado $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, considere el problema de programación lineal

$$\min \quad c^\top x \tag{2a}$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \geq b \tag{2b}$$

$$x \geq 0. \tag{2c}$$

Muestre cómo usaría la función ϕ para resolver el problema (2). Hint: Encuentre valores apropiados para entregarle a la función ϕ. Basta con un único llamado a ϕ.

Solución:

Parte 1 [2 ptos. si está todo correcto, 1 pto. si derivan el dual pero no encuentran la solución óptima, 0 ptos. en otro caso.]

1. El dual del problema es

$$\begin{aligned} \min \quad & \pi \\ \text{s.a.} \quad & \pi \geq c_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

2. Estamos minimizando π, entonces la solución (y valor) óptimo es $\pi^\star = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} c_i = c_4$.
3. Por dualidad fuerte, sabemos que $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^\star = \pi^\star = c_4$. Luego, $x_4^\star = 1$ y $x_i^\star = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$: $i \neq 4$ es una solución óptima del problema.

Parte 2 [4 ptos. si está todo correcto, 3 ptos. si hay errores menores (ej. notación), 2 ptos. si hay errores medios (ej. arrastre), 1 pto. si hay errores mayores, 0 ptos. en otro caso.]
Comencemos escribiendo el dual del problema (2) como

$$\begin{aligned} \max \quad & b^\top \pi \\ \text{s.a.} \quad & A^\top \pi \leq c \\ & \pi \geq 0. \end{aligned}$$

Por dualidad fuerte, si podemos encontrar dos vectores factibles x (primal) y π (dual) tales que $c^\top x = b^\top \pi$, entonces x y π son óptimos para sus problemas respectivos. Para que x y π sean factibles, basta con que satisfagan las restricciones de sus problemas. Luego, para que $c^\top x = b^\top \pi$, podemos agregar las restricciones $c^\top x \geq b^\top \pi$ y $c^\top x \leq b^\top \pi$. Formalmente, podemos escribir la matriz y los vectores

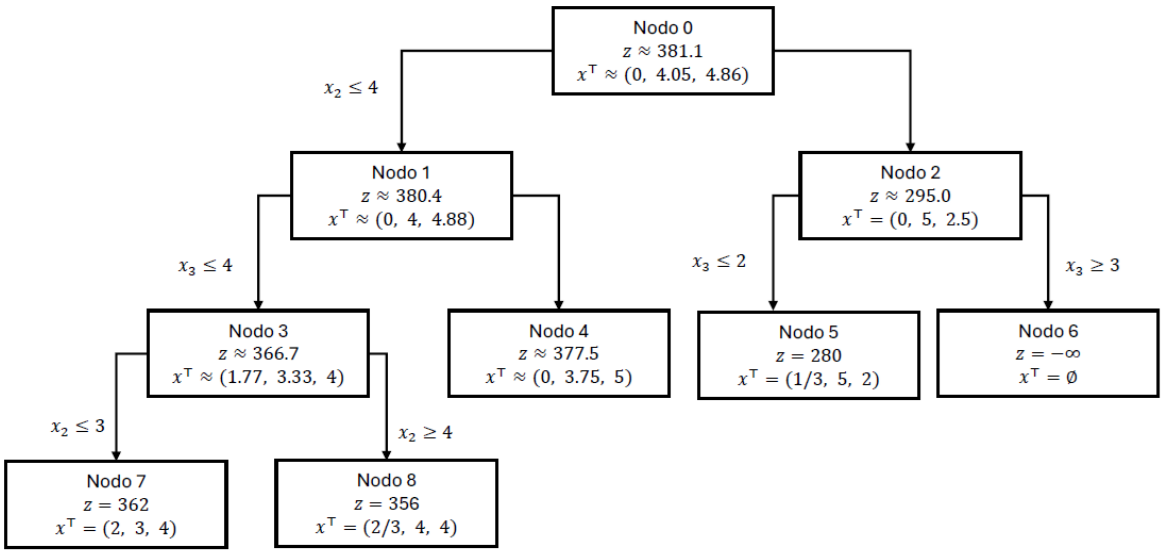
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -c^\top & b^\top \\ c^\top & -b^\top \\ A & 0 \\ I_n & 0 \\ 0 & -A^\top \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} x \\ \pi \end{pmatrix} \text{ y } \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad de $n \times n$, y resolver el problema (2) llamando a $\phi(2m+2n+2, m+n, \hat{A}, \hat{b})$.

Pregunta 2: Programación lineal entera [6 puntos]

Parte 1 [2 puntos]

Considere el siguiente arbol de Branch and Bound incompleto:



Responda las siguietes preguntas:

1. [0.5 puntos] ¿El problema es de maximización o minimización?
2. [0.5 puntos] ¿Cuáles son las restricciones añadidas para pasar del nodo 0 al nodo 2? ¿Y para pasar del nodo 1 al nodo 4?
3. [0.5 puntos] ¿Cuáles son las mejores cotas superior e inferior actuales? Calcule el gap de optimalidad.
4. [0.5 puntos] ¿Qué nodos pueden ser podados y por qué?

Parte 2 [4 puntos]

1. [1 punto] Sea $\mathbb{X} = \{(0.5, 0.5), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0.5, 1.5)\}$, escriba las restricciones que generan $\text{conv}(\mathbb{X})$.
2. [1 punto] Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbb{X}^{\text{R}} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ y $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{\text{R}} \cap \mathbb{Z}^n$. Muestre que
$$\max_{x \in \mathbb{X}^{\text{R}}} f(x) = \max_{x \in \text{conv}(\mathbb{X}^{\text{R}})} f(x) \geq \max_{x \in \text{conv}(\mathbb{X})} f(x) \geq \max_{x \in \mathbb{X}} f(x).$$
3. [1 punto] Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz totalmente unimodular. Muestre que cualquier submatriz de A es totalmente unimodular.
4. [1 punto] Sea $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{Z}^m$. Considere el sistema de restricciones
$$Ax \leq b,$$
$$x \in \mathbb{Z}^n,$$

a las cuales se le agregan el vector de variables auxiliares z para obtener el siguiente sistema de restricciones equivalentes

$$\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = b,$$
$$x \in \mathbb{Z}^n,$$
$$z \in \mathbb{R}^o.$$

Muestre que si z satisface este sistema (para algún $x \in \mathbb{Z}^n$), entonces $z \in \mathbb{Z}^o$.

Solución:

Parte 1

1. [0.5 ptos si está todo correcto, 0 ptos en otro caso.] A medida que agregamos restricciones, el valor es no creciente. Luego, es un problema de maximización.
2. [0.5 ptos si está todo correcto, 0 ptos en otro caso.] $x_2 \geq 5$ y $x_3 \geq 5$, respectivamente.
3. [0.5 ptos si está todo correcto, 0 ptos en otro caso.] La mejor cota inferior es 362 y la mejor cota superior es 377.5. El gap de optimalidad es $(377.5 - 362)/377.5 \approx 4.12\%$.
4. [0.5 ptos si está todo correcto, 0 ptos en otro caso.] El nodo 7 puede ser podado por integralidad. Como en este punto sabemos que $z^\star \in [362, 377.5]$, los nodos 5 y 8 pueden ser podados cota. El nodo 6 puede ser podado por infactibilidad. Solo queda seguir explorando el nodo 4.

Parte 2

1. [1 pto. si está todo correcto, 0 ptos. en otro caso.] Podemos escribirlo como

$$\text{conv}(\mathbb{X}) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_1 \leq 1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

2. [1 pto. si está todo correcto, 0 ptos. en otro caso.] Como $\mathbb{X}^{\text{R}}$ es un poliedro, entonces es convexo. De esto se desprende que $\text{conv}(\mathbb{X}^{\text{R}}) = \mathbb{X}^{\text{R}}$. Además, como $\mathbb{X} = \mathbb{X}^{\text{R}} \cap \mathbb{Z}^n$, entonces $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}^{\text{R}}$ y $\mathbb{X} \subset \text{conv}(\mathbb{X}) \subset \text{conv}(\mathbb{X}^{\text{R}}) = \mathbb{X}^{\text{R}}$. Se concluye que

$$\max_{x \in \mathbb{X}^{\text{R}}} f(x) = \max_{x \in \text{conv}(\mathbb{X}^{\text{R}})} f(x) \geq \max_{x \in \text{conv}(\mathbb{X})} f(x) \geq \max_{x \in \mathbb{X}} f(x).$$

3. [1 pto. si está todo correcto, 0 ptos. en otro caso.] Sea M una submatriz de A. Podemos notar que, por construcción, todas las submatrices de M también son submatrices de A. En particular, como A es submodular, todas sus submatrices cuadradas tienen determinante 1, 0 ó -1. Luego, todas las submatrices cuadradas de M también tendrán determinante 1, 0 ó 1, por lo cual M también es submodular.
4. [1 pto. si está todo correcto, 0 ptos. en otro caso.] Es fácil notar que la restricción del nuevo sistema es

$$Ax + z = b$$

equivalente a

$$z = b - Ax.$$

Como A, b y x solo incluyen enteros, entonces z también debe ser entero.

Pregunta 3: Sudoku [6 puntos]

Un sudoku es un rompecabezas que consiste en una cuadrícula de 9 filas por 9 columnas, dividida a su vez en 9 subcuadrículas de 3×3. El objetivo es completar la cuadrícula con números del 1 al 9 cumpliendo las siguientes reglas:

- Cada fila debe contener todos los números del 1 al 9, sin repetir ninguno.
- Cada columna debe contener todos los números del 1 al 9, sin repetir ninguno.
- Cada subcuadrícula de 3×3 debe contener todos los números del 1 al 9, sin repetir ninguno.

La Figura 1 muestra un ejemplo de una instancia de sudoku, y la Figura 2 entrega una solución a dicha instancia.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Figura 1: Instancia de sudoku.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Figura 2: Solución de sudoku.

Una instancia de sudoku se puede representar como un conjunto Φ tal que todos los elementos $(i, j, k) \in \Phi$ indican que el número k está en la casilla (i, j) de la cuadrícula. Por ejemplo, en la Figura 1,

$$\Phi = \{(1,1,5), (1,2,3), (1,5,7), (2,1,6), (2,4,1), (2,5,9), (2,6,5), \ldots, (9,9,9)\}$$

Realice lo siguiente:

1. [1 punto] Formule el sudoku como un problema de programación lineal entera. Hint: Su función objetivo puede ser una constante.
2. [2 puntos] Dada una instancia de sudoku Φ y una solución factible $\hat{x}$ para Φ, formule un problema de programación lineal entera que le permita verificar si $\hat{x}$ es solución única o, en caso contrario, le entregue una solución distinta de $\hat{x}$.
3. Implemente ambos modelos en python/gurobi y utilicelos para lo siguiente:
   (a) [1 puntos] Resuelva la instancia de la Figura 1 y verifique que la solución que se muestra en la Figura 2 es única. Puede encontrar los valores de Φ asociados a la Figura 1 en el cuaderno `P3.ipynb` bajo el nombre de `Phi_1`.

(b) [2 punto] Resuelva la instancia de la Figura 3, utilizando el modelo asociado al punto 2, para entregar todas sus posibles soluciones. Los valores de Φ asociados a la Figura 3 se encuentran en el archivo `P3.ipynb` bajo el nombre de `Phi_2`.

		3		2		6		
9			3		5			1
		1	8		6	4		
		8	1		2	9		
7								8
		6			8	2		
		2	6		9	5		
8			2		3			9
		5		1		3		

Figura 3: Instancia 2.

Nota: En el archivo `P3.ipynb` también encontrará una función que le permite hacer gráficos similares a los de las Figuras 1, 2 y 3. Puede utilizarlos para entregar sus respuestas si así desea.

Solución:

1. [1 pto. si está todo correcto, 0 ptos. en otro caso.] Sean $i, j, k \in N := \{1, 2, \ldots, 9\}$, donde (i, j) indican las coordenadas (fila, columna) de una casilla de la cuadrícula, y k representa el número a ingresar en dicha casilla.

   Las variables de decisión son $x_{ijk} \in \{0, 1\}$, donde $x_{ijk} = 1$ si el número k va en la casilla (i, j), $x_{ijk} = 0$ e.c.c.

   El problema de programación entera es

$$\min 0, \tag{3a}$$

   s.a.

$$x_{ijk} = 1 \quad \forall (i, j, k) \in \Phi, \tag{3b}$$

$$\sum_{i \in N} x_{ijk} = 1 \quad \forall j, k \in N, \tag{3c}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ijk} = 1 \quad \forall i, k \in N, \tag{3d}$$

$$\sum_{q=0}^{2} \sum_{r=0}^{2} x_{i+q, j+r, k} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, 4, 7\}, \forall k \in N, \tag{3e}$$

$$\sum_{k \in N} x_{ijk} = 1 \quad \forall i, j \in N, \tag{3f}$$

$$x \in \{0,1\}^{N \times N \times N}. \tag{3g}$$

La función objetivo (3a) es una constante, dado que solo nos interesa resolver el problema de factibilidad. Las restricciones (3b) generan la asignación inicial del juego. Las restricciones (3c), (3d) y (3e) obligan a que cada número k aparezca una vez en la columna j, una vez en la fila i y una vez en cada subcuadrícula de 3×3, respectivamente. Las restricciones (3f) aseguran que cada celda contiene exactamente un número. Las restricciones (3g) indican la naturaleza de las variables de decisión.

2. [2 ptos. si está todo correcto, 1 pto. si hay errores menores, 0 ptos. en otro caso.] Una solución factible $\hat{x}$ para Φ puede obtenerse resolviendo el modelo (3a)–(3g). Para verificar que $\hat{x}$ es única, podemos definir $\hat{k}_{ij} = \{k : \hat{x}_{ijk} = 1\}$ para todo $i, j \in N$ como el número que la solución $\hat{x}$ ubica en la casilla (i, j). Luego, basta con resolver (3a) s.a. (3b)–(3g) y

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} x_{ij\hat{k}_{ij}} \leq 9^2 - 1. \tag{3h}$$

La restricción (3h) nos asegura que la nueva solución, en caso de existir, tenga al menos un elemento distinto a $\hat{x}$. Si al resolver (3a)–(3h) obtenemos una solución factible, será distinta de $\hat{x}$. Si el modelo es infactible, entonces $\hat{x}$ es única.

3. [1 pto. si muestra certificado de que lo verificó y/o funciona bien su código), 0 ptos. en otro caso.] Ver archivo adjunto. Se verifica que la solución es única.

4. [2 ptos. si está todo correcto, 1 pto. si hay errores menores, 0 ptos. en otro caso.] Podemos usar el modelo con las restricciones (3h) de manera recursiva, aplicando el siguiente algoritmo.

   i. Resolver el modelo (3a)–(3g) para Φ y guardar la primera solución en $\hat{x}_1$.

   ii. Inicializar $n \leftarrow 1$.

   iii. **Mientras** haya soluciones:

      a. Agregar una restricción tipo (3h) que excluya la solución $\hat{x}_n$ y volver a resolver el modelo.

      b. **Si** no se encuentra ninguna solución nueva, **detener**.

      c. En caso contrario, guardar la nueva solución como $\hat{x}_{n+1}$ y aumentar $n \leftarrow n + 1$.

   iv. **Devolver** la lista de soluciones $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$.

   En nuestro ejemplo, las soluciones son dos y se muestran a continuación.

4	8	3	9	2	1	6	5	7
9	6	7	3	4	5	8	2	1
2	5	1	8	7	6	4	9	3
5	4	8	1	3	2	9	7	6
7	2	9	5	6	4	1	3	8
1	3	6	7	9	8	2	4	5
3	7	2	6	8	9	5	1	4
8	1	4	2	5	3	7	6	9
6	9	5	4	1	7	3	8	2

Figura 4: Solución 1.

4	8	3	7	2	1	6	9	5
9	6	7	3	4	5	8	2	1
2	5	1	8	9	6	4	7	3
5	3	8	1	7	2	9	4	6
7	2	9	5	6	4	1	3	8
1	4	6	9	3	8	2	5	7
3	7	2	6	8	9	5	1	4
8	1	4	2	5	3	7	6	9
6	9	5	4	1	7	3	8	2

Figura 5: Solución 2.