PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2013
Profesores: P.Álvarez - P.Carrillo - A.Cataldo
R.Giesen - A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 3

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (9 puntos)

(a) (3 puntos) Dado el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(x) \\ &s.a: \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Suponga que x^* es solución óptima del modelo, ¿es verdad que entonces siempre debe cumplirse que $\nabla f(x^*) = 0$?

Respuesta:
Es claramente falso pues es una condición necesaria. Se puede apreciar esto con un contra-ejemplo. Sea la función $f(x, y)$ definida como:

$$f(x, y) = \sqrt{x^3 - y^2 + 2}$$

se puede ver que el punto $(-1, 1)$ es mínimo ($f(-1, 1) = 0$) y sin embargo el gradiente queda:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3 - y^2 + 2}}(3x^2) \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3 - y^2 + 2}}(-2y) \end{pmatrix}$$

y se observa que no existe para el punto (-1 , 1).

(b) (3 puntos) Dada la función $f(x, y) = x^2 + 2axy + a^2y^2$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Es el punto $x = (-ab, b)$ mínimo global de este problema para cualquier valor de $b \in \mathbb{R}$?

Respuesta:
Efectivamente es mínimo global del problema. Esto se verifica:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2ay \\ 2ax + 2a^2y \end{pmatrix}$$

tal que:

$$\nabla f(-ab, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es punto crítico.

Su matriz Hessiana queda:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ 2a & 2a^2 \end{bmatrix}$$

cuyos determinantes son 2 y 0. Siendo semidefinida positiva. Luego, $f(x,y)$ es convexa, y entonces $(-ab, b)$ mínimo global.

(c) (3 puntos) Explique claramente cuál es el problema al tratar de aplicar el método de Lagrange para resolver el siguiente problema, y por qué se presenta ese problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ \text{s.a:} & x^2 + y^2 = 1 \\ & y^2 = 1 \end{array}$$

Respuesta:
El lagrangeano queda:

$$L = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(y^2 - 1)$$

entonces, las condiciones de lagrange quedan:

$$\begin{array}{rcc} \dfrac{\partial L}{\partial x} & = & 2x + 2\lambda_1 x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} & = & 2(y-2) + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} & = & 2z = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} & = & x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} & = & y^2 - 1 = 0 \end{array}$$

de donde se pueden apreciar dos soluciones posibles para (x,y,z): (0,1,0) o (0,-1,0). Cualquiera de estas en las dos primeras condiciones se resuelve con infinitos valores para λ_1 y λ_2. Por lo cual el método no funciona en este caso. Esto se debe (se puede ver gráficamente) a que en cualquiera de los dos puntos determinados el gradiente de ambas restricciones (que son activas en el punto) son linealmente dependientes (y entonces el punto no es regular).

Pregunta 2 (12 puntos)

(a) (4 puntos) Considere un problema de flujo a costo mínimo en una red $G = (N, A)$, donde N son los nodos y A son los arcos (dirigidos) de la red. En cada nodo hay una oferta (o demanda, según el signo) d_i. ¿Es verdad que para que el problema tenga una solución factible es condición necesaria y suficiente el que $\sum_{i \in N} d_i = 0$, es decir, que la oferta sea igual a la demanda? Justifique claramente su respuesta.

Respuesta:
Asegurar que la suma de las demandas es igual a la suma de las ofertas asegura que se podrán satisfacer las condiciones de conservación de flujo entre los nodos. Esto se puede ver claramente con el sistema de ecuaciones de conservación de flujo:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} f_{ki} = \pm d_i \;\; \forall i \in N.$$

Si las sumamos todas, se obtiene:

$$0 = \sum_{i \in N} d_i$$

esto se asegura pues cada variables de flujo aparecerá exactamente 2 veces en las restricciones, en una con signo + y en otra con signo - (matriz de incidencia nodo-arco).

Sin embargo, no asegura que se puedan satisfacer las condiciones de cotas sobre los arcos.

(b) (4 puntos) Considere el siguiente problema, en donde A es una matriz de $m \times n$:

$$\begin{array}{rl} (P) & \text{Min } c^T x \\ & A^T x \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde los elementos de la matriz A son todos números positivos. Utilizando argumentos de dualidad, muestre que para que este problema sea no acotado, c debe tener alguna componente < 0.

Respuesta:
Para demostrar que el problema (P) es no acotado, probemos que el dual es infactible. El dual de (P) es:

$$\begin{array}{rl} (D) & \text{Max } b^T y \\ & Ay \leq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Se tendrán restricciones del tipo: $a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jm}y_m \leq c_j$. Como todos los coeficientes de la matriz A son no negativos, y las variables del dual deben ser no negativas, entonces si existe un $c_j < 0$, no existirá combinación de valores ≥ 0 que satisfagan la restricción j-ésima del dual, con lo cual el problema dual será infactible, y el primal no acotado.

(c) (4 puntos) Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{rlrcrcl} (P) & \text{Max} & x_1 & - & x_2 & & \\ & \text{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Se sabe que la solución de este problema es $(x_1^*, x_2^*) = (0, 2)$. Demuestre a través del dual de (P) que agregar la variable x_3, que cumple que $7 \geq x_3 \geq 0$ y cuyo coeficiente en la función objetivo es $c_3 = -1$, no cambia la estructura actual de la solución óptima.

Respuesta:
Se nos dice que la solución óptima de (P) es $(x_1^*, x_2^*) = (0, 2)$, mediante el teorema de holguras complementarias se obtiene que la solución del dual es $(y_1^*, y_2^*) = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

Ahora, el problema (P) con las modificaciones queda:

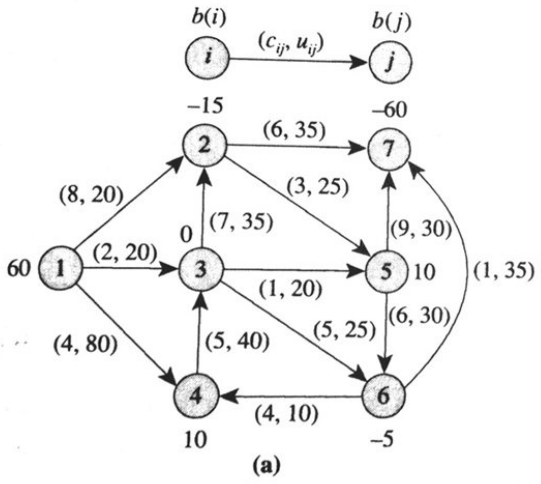
$$\begin{array}{rlrcrcrcl} (P) & \text{Max} & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & \\ & \text{s.a:} & 2x_1 & + & 3x_2 & & & \geq & 6 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 4 \\ & & & & & & x_3 & \leq & 7 \\ & & x_1 & & & & & \leq & 0 \\ & & & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

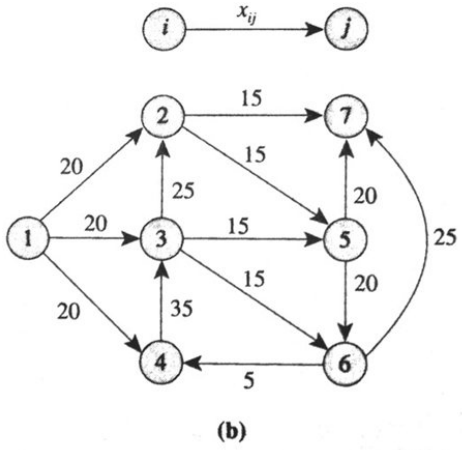
y su dual es:

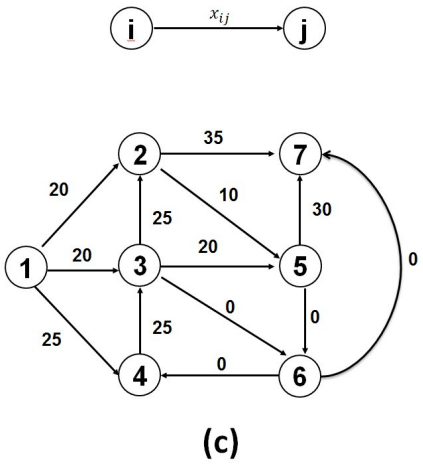
$$
\begin{array}{llrcrcrl}
(D) & \text{Min} & 6y_1 & + & 4y_2 & + & 7y_3 & \\
 & \text{s.a:} & 2y_1 & + & y_2 & & & \leq 1 \\
 & & 3y_1 & + & y_2 & & & \geq -1 \\
 & & & & & & y_3 & \geq -1 \\
 & & y_1 & & & & & \leq 0 \\
 & & & & y_2 & & & \geq 0 \\
 & & & & & & y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

del dual se puede apreciar claramente que la restricción $y_3 \geq -1$ es redundante. Luego, el problema lo resuelven valores no negativos de y_3, y se observa que y_3 no está aparece en las primeras dos restricciones, por lo que, su valor óptimo es claramente $y_3^* = 0$. Por lo cual, el problema dual queda igual al que se obtendría sin las nuevas condiciones impuestas, y por lo tanto, su solución óptima seguiría siendo la misma. Por lo que la estructura de solución del problema (P) tampoco cambió.

Pregunta 3 (14 puntos)







Considere la red de la Figura (a). En el dibujo, $b(i)$ (el número al lado de los nodos) es la oferta (o demanda en caso de ser negativa) de cada nodo, y el par de número (c_{ij}, u_{ij}) en los arcos

representan, respectivamente: c_{ij}, el costo del arco (i,j), u_{ij}, la capacidad del arco (i,j). La Figura (b) corresponde a la misma red, pero se indican, para cada arco, flujos específicos.

(i) (1 punto) Verifique que la solución presentada en la Figura (b) es una solución factible del problema de flujo a mínimo costo.

Respuesta:
Para verificar factibilidad de la solución entregada se debe verificar conservación de flujo en los nodos y que se respetan las condiciones de cotas en los arcos. Es rápidamente verificable que la solución posee flujos no negativos en todos los arcos, luego, respeta las cotas mínimas.

Respeto a las cotas superiores se verifica que:

$$\begin{aligned} x_{12} &= 20 \leq 20 \\ x_{13} &= 20 \leq 20 \\ x_{14} &= 20 \leq 80 \\ x_{25} &= 15 \leq 25 \\ x_{27} &= 15 \leq 35 \\ x_{32} &= 25 \leq 35 \\ x_{35} &= 15 \leq 20 \\ x_{36} &= 15 \leq 25 \\ x_{43} &= 35 \leq 40 \\ x_{56} &= 20 \leq 30 \\ x_{57} &= 20 \leq 30 \\ x_{64} &= 5 \leq 10 \\ x_{67} &= 25 \leq 35 \end{aligned}$$

La conservación de flujo en los nodos es:

$$\begin{array}{lll} \text{Nodo 1} & 60 = & 20 + 20 + 20 \\ \text{Nodo 2} & -15 = & -20 - 25 + 15 + 15 \\ \text{Nodo 3} & 0 = & -20 - 35 + 25 + 15 + 15 \\ \text{Nodo 4} & 10 = & 35 - 20 - 5 \\ \text{Nodo 5} & 10 = & 20 + 20 - 15 - 15 \\ \text{Nodo 6} & -5 = & 5 + 25 - 15 - 20 \\ \text{Nodo 7} & -60 = & -15 - 20 - 25 \end{array}$$

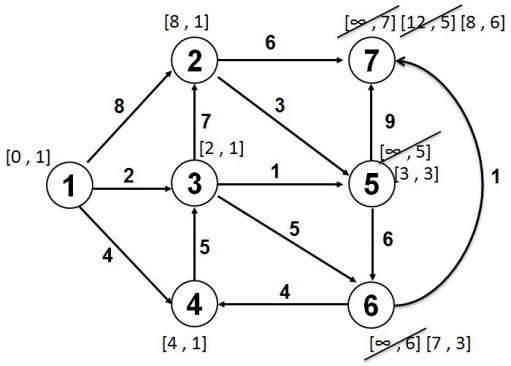
(ii) (3 puntos) Para la red de la Figura (a) utilice el algoritmo de Dijkstra para encontrar el árbol de ruta mínimas que comienza en el nodo 1.

Respuesta:

En el siguiente grafo se entregan las iteraciones del algoritmo de Dijkstra. La información de las etiquetas sobre los nodos corresponde a [distancia desde el nodo 1, predecesor].

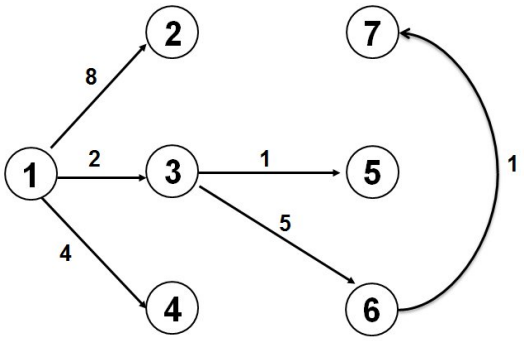
El desarrollo de las iteraciones implicó que:

- ◇ Iteración 1: cerrar el nodo 3.
- ◇ Iteración 2: cerrar el nodo 5.
- ◇ Iteración 3: cerrar el nodo 4.
- ◇ Iteración 4: cerrar el nodo 6.
- ◇ Iteración 5: cerrar el nodo 2 ó 7.



◇ Iteración 6: cerrar el nodo restante.

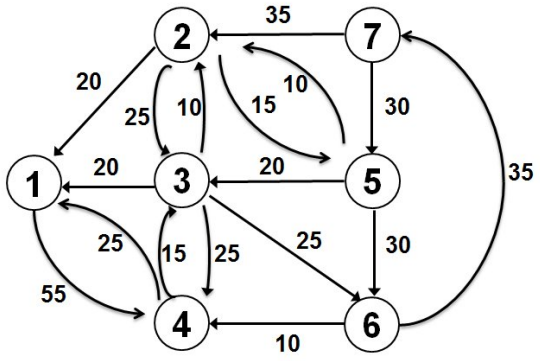
En consecuencia, el árbol de rutas mínimas es:



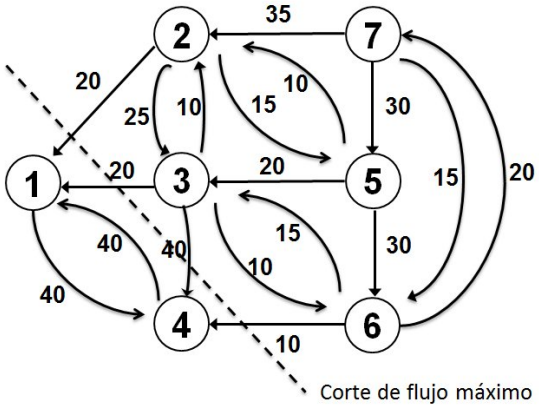
(iii) (5 puntos) A partir de los flujos presentados en la Figura (c) utilice el algoritmo de Ruta Aumentable (conocido también como algoritmo de Aumento de Flujo, o de Ford-Fulkerson) para encontrar el flujo máximo desde el nodo 1 al nodo 7, y el corte mínimo que separa el nodo 1 del 7.

Respuesta:

La red residual se presenta en el siguiente grafo:



donde se puede apreciar una ruta incremental: 1-4-3-6-7 (o una alternativa 1-4-3-2-5-6-7) de capacidad 15. Incorporando este flujo incremental, se obtiene una nueva solución, que posee la red incremental presentada en el siguiente grafo:



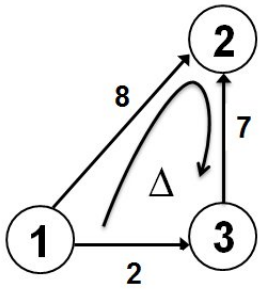
No existen más rutas incrementales desde 1 a 7. Por lo tanto, la solución obtenida es óptima.

Para las preguntas (iv) y (v) considere que los arcos tienen capacidad infinita, es decir, $u_{ij} = \infty$, para todo $(i, j) \in A$.

(iv) (2 puntos) ¿Puede ser la solución presentada en la Figura (b) óptima? (Hint: no es necesario resolver). Justifique claramente su respuesta

Respuesta:
No. Si no existe limitante de capacidad máxima en los arcos la solución óptima debe ser un árbol de envergadura máxima, a no ser que exista más de una base óptima. Para esto último, deberían existir rutas de igual costo entre los nodos de la red.

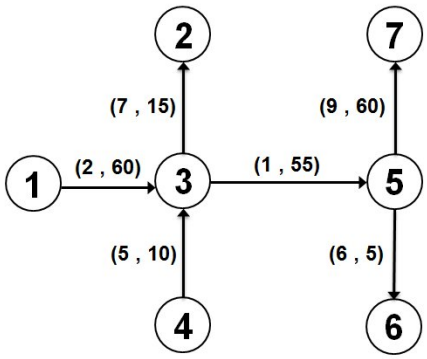
Para verificar que la solución presentada no es óptima, tomemos el ciclo entre los nodos 1, 2 y 3.



En la Figura se aprecia que se puede crear un ciclo δ con flujo 20 que permite obtener una nueva solución factible con costo menor que la actual.

(v) (3 puntos) Verifique si acaso el árbol formado por los arcos: (1, 3), (3, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 6) y (5, 7) es una base óptima del problema de flujo a costo mínimo sin considerar las capacidades de los arcos. Si no lo es, realice una iteración del algoritmo simplex especializado en redes.

Respuesta:
En la siguiente figura se ve esquemáticamente el árbol asociado, cuya información entre paréntesis corresponde a (c_{ij}, x_{ij}).



con esta información construimos el sistema de ecuaciones que permita determinar el valor de las variables duales:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{13} &= 0 = 2 - \pi_1 + \pi_3 \\
\bar{c}_{32} &= 0 = 7 - \pi_3 + \pi_2 \\
\bar{c}_{43} &= 0 = 5 - \pi_4 + \pi_3 \\
\bar{c}_{35} &= 0 = 1 - \pi_3 + \pi_5 \\
\bar{c}_{56} &= 0 = 6 - \pi_5 + \pi_6 \\
\bar{c}_{57} &= 0 = 9 - \pi_5 + \pi_7
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= 0 \\
\pi_2 &= -2 \\
\pi_3 &= -9 \\
\pi_4 &= 3 \\
\pi_5 &= -3 \\
\pi_6 &= -9 \\
\pi_7 &= -12
\end{aligned}$$

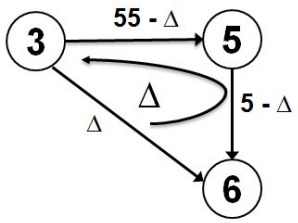
Con esta información, los costos reducidos de los flujos no básicos son:

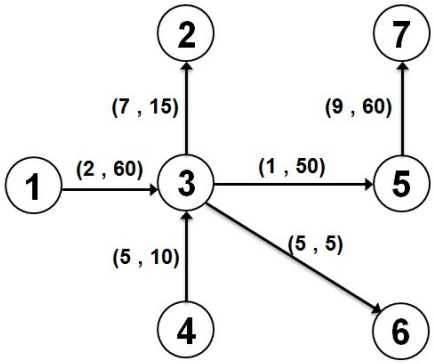
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} &= 8 - 0 + (-9) = -1 \\
\bar{c}_{14} &= 4 - 0 + (3) = 7 \\
\bar{c}_{25} &= 3 - (-9) + (-3) = 9 \\
\bar{c}_{27} &= 6 - (-9) + (-12) = 3 \\
\bar{c}_{36} &= 5 - (-2) + (-9) = -2 \\
\bar{c}_{64} &= 4 - (-9) + (3) = 16 \\
\bar{c}_{67} &= 1 - (-9) + (-12) = -2
\end{aligned}$$

Claramente la solución actual no es óptima pues existen costos reducidos negativos para flujos que están en su cota inferior.

Entonces, ingresamos el arco $(3, 6)$ para reasignar flujo. La siguiente figura muestra esa reasignación:

donde la reasignación debe ser de 5 unidades de flujo. Entonces, se obtiene una nueva distribución de flujos en la red, la que se muestra en el siguiente grafo.





Pregunta 4 (11 puntos)

(a) Considere el siguiente problema de Optimización no lineal sin restricciones, en dos variables:

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + \beta x_1 x_2 + 2x_2^2 + x_2^4$$

donde β es un escalar.

(I) (2 puntos) Determine un rango de valores de β que hacen que este problema tenga solución y esta sea única. Justifique con precisión su argumento.

Respuesta:
El gradiente de f es:

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 + \beta x_2 \\ 4x_2^3 + 4x_2 + \beta x_1 \end{bmatrix}$$

y el Hessiano es:

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 6 & \beta \\ \beta & 12x_2^2 + 4 \end{pmatrix}$$

La forma de hacer que la solución sea única es que la función se estrictamente convexa. Para eso el Hessiano debe ser definido positivo, lo que se logra si $6 > 0$ (que lo es) y si $72x_2^2+24-\beta^2$. Como $72x_2^2 \geq 0$, debe tenerse que $24-\beta^2 > 0$, lo que implica que si $\beta^2 < 24$, entonces el Hessiano es definido positivo, para todo x y la función será estrictamente convexa.

(II) (2 puntos) Asuma que $\beta = 1$ (ese valor está efectivamente en el intervalo que usted debió determinar en a)). Considere el punto $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Muestre que este punto no es solución óptima del problema.

Respuesta:
Esto es muy simple. el gradiente evaluado en ese punto es:

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

que es distinto de cero. Luego, $(1,1)$ no puede ser punto crítico ni óptimo.

(III) (2 puntos) Partiendo en el punto $(1,1)$ anterior, realice una iteración del método de Newton "puro" (sin minimización unidireccional) para minimizar la función f.

Solución:
Lo que hay que calcular es $x^1 = x^0 - [\nabla^2 f(x^0)]^{-1}\nabla f(x^0)$. En este caso, ya tenemos el gradiente de la parte anterior y

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

cuya inversa (aproximada) es:

$$[\nabla^2 f(1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,168 & -0,011 \\ -0,011 & 0{,}063 \end{bmatrix}$$

Luego, el nuevo punto es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,168 & -0,011 \\ -0,011 & 0,063 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,084 \\ 0,505 \end{bmatrix}$$

(b) Considere el siguiente problema de optimización restringida, el cual es importante en algunas aplicaciones geométricas:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -\sum_{j=1}^{n} \log x_j \\ s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & x_j > 0, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

(I) (2 puntos) Argumente que las restricciones "$x_j > 0$" no son necesarias y el problema puede ser considerado como uno con sólo una restricción de igualdad.

Respuesta:
Esto se sigue simplemente de la definición de la función objetivo: el logaritmo no está definido en $x = 0$ y a medida que x es muy pequeño, la función objetivo tiende a infinito. Luego, la solución óptima tiene que tener solución con componentes positivas.

(II) (3 puntos) Usando el Teorema de Lagrange, demuestre que la solución óptima del problema es

$$x_j = \frac{1}{n}, j = 1, \ldots, n$$

(no le pedimos que argumente condiciones de segundo orden).

Respuesta:

El Lagrangeano del problema es (da lo mismo cómo lo escriban):

$$L(x,\lambda) = -\sum_{j=1}^{n} \log x_j + \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} x_j - 1 \right).$$

Calculando las derivadas del Lagrangeano y planteando la condición de optimalidad, se tiene:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = -\frac{1}{x_k} + \lambda = 0, k = 1, \ldots, n,$$

que es lo mismo que:

$$\frac{1}{\lambda} = x_k, k = 1, \ldots, n.$$

Luego, todas las componentes tiene el mismo valor, igual a $1/\lambda$. Usando la restricción de que $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, se deduce de inmediato que $x_k = 1/n$, para todo k.

Pregunta 5 (14 puntos)

AKME es un gran fabricante de artículos para la captura de aves, que realiza el envío de sus pedidos mediante contenedores transportados por terceros y debe determinar qué transportistas usar para cada despacho.

La red de distribución de AKME se puede representar mediante un grafo $G = (N, A)$, donde N son las distintas localidades. El nodo 0 representa la planta de AKME, y el resto de los nodos corresponde a puntos de paso o ubicaciones de los clientes. Los arcos representan la posibilidad de transportar directamente un contenedor entre un par de puntos. AKME debe entregar un conjunto C de contenedores, a un conjunto $B \subseteq N - \{0\}$ de clientes. El **parámetro** D_c representa el nodo donde está el cliente que recibirá el contenedor $c \in C$.

Para realizar el transporte, AKME tiene un conjunto T de transportistas conocidos y confiables, pero no todos los transportistas operan sobre todas las zonas de la red. Por eso denotaremos por V^t, los tramos o arcos que puede operar el transportista $t \in T$. El transportista t le cobra M_{ij}^t [$] a AKME por llevar un contenedor desde i hasta j, donde $(i,j) \in V^t$. Además, se sabe que el transportista t puede trasladar a lo más A_{ij}^t contenedores desde i a j simultáneamente. Cada contenedor debe ser transportado por un único transportista.

Basándose en la información entregada, formule un problema de programación lineal entera que determine la forma de realizar el transporte de los pedidos de AKME a sus clientes mediante los transportistas existentes, a costo mínimo.

Pauta Pregunta 5

Variables de decisión

- X^{ct}: 1, si el contenedor $c \in C$ es asignado al transportista $t \in T$; 0, en otro caso.
- Y_{ij}^{ct}: 1, si el contenedor $c \in C$, asignado al transportista $t \in T$, se mueve desde i a j, $(i,j) \in V^t$; 0, en otro caso.

Función objetivo

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{c \in C} \sum_{(i,j) \in V^t} M_{ij}^t Y_{ij}^{ct} + \sum_{t \in T} \sum_{c \in C} \sum_{(i,j) \in V_t : i \neq 0} Q_i^t Y_{ij}^{ct}$$

Restricciones - Opción 1

◇ Asignación única de cada contenedor a un único transportista.

$$\sum_{t \in T} X^{ct} = 1, \ \forall c \in C$$

◇ Capacidad máxima del transportista en cada tramo.

$$\sum_{c \in C} Y_{ij}^{ct} \leq A_{ij}^{t}, \ \forall t \in T, \ \forall (i,j) \in V^t$$

◇ Largo máximo de la ruta de despacho.

$$\sum_{(i,j) \in V^t} Y_{ij}^{ct} \leq P \cdot X^{ct}, \ \forall c \in C, \ \forall t \in T$$

◇ Balance de contenedores.

$$\sum_{j \in N:(i,j) \in V^t} Y_{ij}^{ct} - \sum_{j \in N:(j,i) \in V^t} Y_{ji}^{ct} = \begin{cases} X^{ct}, & i = 0 \\ -X^{ct}, & i = D_c \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases} \quad \forall i \in N, \ \forall c \in C, \ \forall t \in T$$

◇ Naturaleza de las variables.

$$X^{ct} \in \{0,1\}, \ \forall c \in C, \ \forall t \in T$$

$$Y_{ij}^{ct} \in \{0,1\}, \ \forall c \in C, \ \forall t \in T, \ \forall (i,j) \in V^t$$

Restricciones - Opción 2

◇ Asignación única de cada contenedor a un único transportista.

$$\sum_{t \in T} X^{ct} = 1, \ \forall c \in C$$

◇ Capacidad máxima del transportista en cada tramo.

$$\sum_{c \in C} Y_{ij}^{ct} \leq A_{ij}^{t}, \ \forall t \in T, \ \forall (i,j) \in V^t$$

◇ Largo máximo de la ruta de despacho.

$$\sum_{(i,j) \in A^t} Y_{ij}^{ct} \leq P, \ \forall c \in C, \ \forall t \in T$$

◇ Evitar movimientos imposibles.

$$Y_{ij}^{ct} \leq X^{ct}, \ \forall t \in T, \ \forall c \in C, \ \forall (i,j) \in V^t$$

◇ Balance de contenedores.

$$\sum_{t \in T} \sum_{j \in N:(i,j) \in V^t} Y_{ij}^{ct} - \sum_{t \in T} \sum_{j \in N:(j,i) \in V^t} Y_{ji}^{ct} = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ -1, & i = D_c \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases} \quad \forall i \in N, \ \forall c \in C$$

◇ Naturaleza de las variables.

$$X^{ct} \in \{0,1\}\,,\ \forall c \in C,\ \forall t \in T$$

$$Y_{ij}^{ct} \in \{0,1\}\,,\ \forall c \in C,\ \forall t \in T,\ \forall (i,j) \in V^t$$